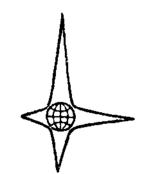


ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

1212 1243 1258 1141

Deuxième édition *Nouvelle édition*

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

par

N. BOURBAKI

XVII, XX, XXII, I

PREMIERE PARTIE

LES STRUCTURES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE

LIVRE I

THÉORIE DES ENSEMBLES

CHAPITRE I. DESCRIPTION DE LA MATHÉMATIQUE FORMELLE

CHAPITRE II. THÉORIE DES ENSEMBLES

Deuxième édition 1960

CHAPITRE III. ENSEMBLES ORDONNÉS — CARDINAUX — NOMBRES ENTIERS

1956

CHAPITRE IV. STRUCTURES

1957

FASCICULES DE RÉSULTATS

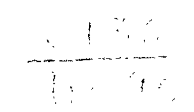
Troisième édition, 1958



HERMANN

НАЧАЛА МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ



ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

ОСНОВНЫЕ СТРУКТУРЫ АНАЛИЗА

КНИГА ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО

Г. Н. ПОВАРОВА и Ю. А. ШИХАНОВИЧА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

В. А. УСПЕНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1965

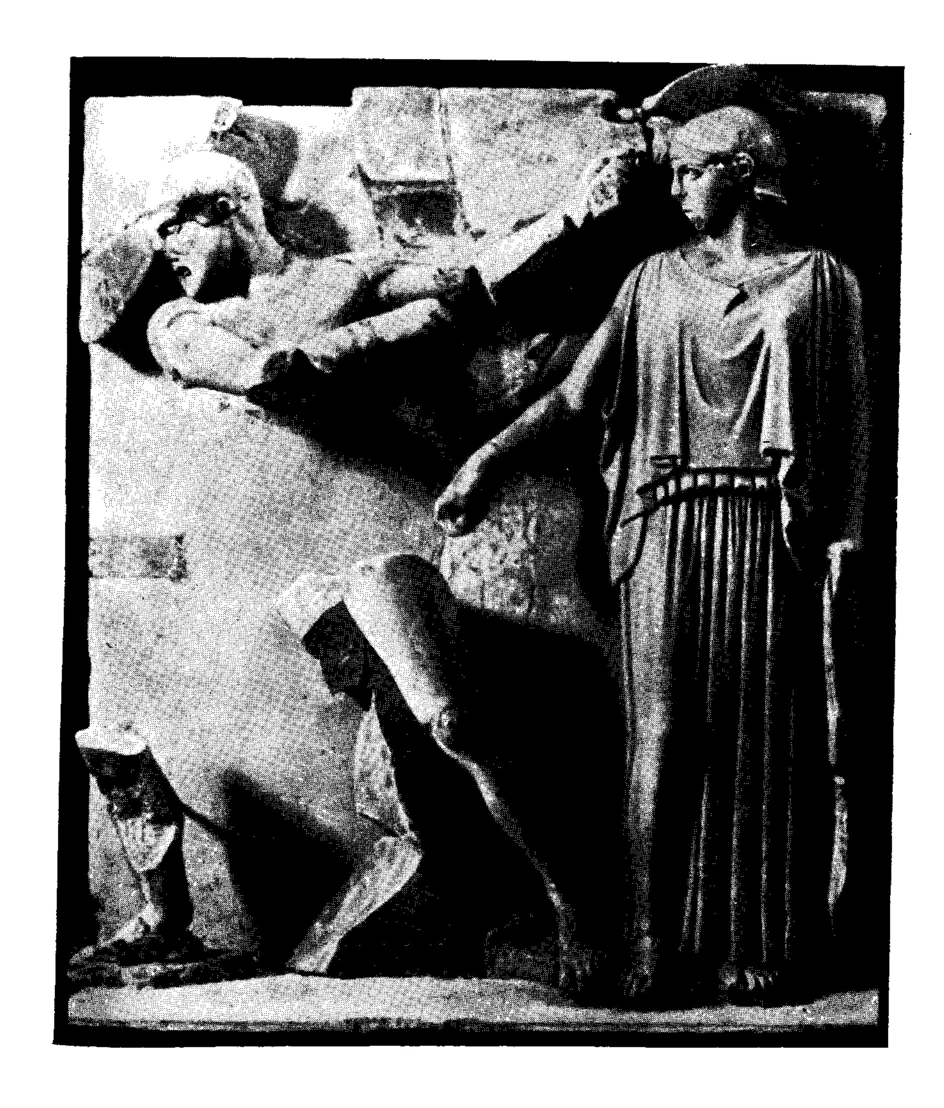
Трактат Н. Бурбаки „Начала математики“ имеет целью изложить всю современную математику с единой и оригинальной точки зрения.

Много выпусков этого трактата уже вышло во Франции. Они вызвали большой интерес математиков всего мира как новизной изложения, так и высоким научным уровнем.

Настоящее издание представляет собой перевод первой книги первой части этого трактата, т. е. книги, в которой закладываются наиболее фундаментальные и общие понятия, служащие основой всего дальнейшего изложения. Книга содержит следующие главы: „Описание формальной математики“, „Теория множеств“, „Упорядоченные множества; кардинальные числа; целые числа“, „Структуры“, а также сводку результатов и исторический очерк теории множеств и оснований математики.

Книга не предполагает каких-либо предварительных знаний, а требует лишь навыка в математических рассуждениях. Она рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам



ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

1. Что представляет собой французский оригинал данного издания

Трактат Никола Бурбаки „Начала математики“ ⟨“Éléments de mathématique“ par Nicolas Bourbaki⟩ является одним из наиболее известных и наиболее нестандартных произведений современной математической литературы. Он еще не закончен, и не известно, как будет выглядеть все сочинение в целом и даже какого оно будет объема. Поскольку во время писания трактата математика тоже движется вперед, есть основания полагать, что работа не будет завершена никогда.

Трактат ⟨traité⟩ делится на *части* ⟨parties⟩, части — на *книги* ⟨livres⟩, книги — на *главы* ⟨chapitres⟩. Каждая книга, вообще говоря, должна, кроме глав, содержать еще *Словарь* ⟨Dictionnaire⟩ и *Сводку результатов* ⟨Fascicule de résultats⟩. Кроме того, каждая глава или группа глав сопровождаются относящимся к этой главе или группе глав *Историческим очерком* ⟨Note historique⟩. Трактат издается парижским издательством Hermann в серии „Actualités scientifiques et industrielles“ и выходит отдельными *выпусками* ⟨fascicules⟩, начиная с 1939 г. Каждый выпуск содержит связную часть текста какой-либо из книг трактата. Выпуски нумеруются в том порядке, в каком они выходят в свет; номер выпуска сохраняется и при переизданиях. Порядок издания выпусков не соответствует логическому порядку частей, книг и глав; это объясняется тем, что, как указывает сам автор в своих анонсах, „составление большинства глав трактата ведется одновременно“. В выпуски французского издания вкладываются брошюры, каждая из которых содержит список вышедших выпусков, распределение опубликованных глав, словарей и сводок результатов по книгам и „Способ пользования данным трактатом“ ⟨„Mode d'emploi de ce traité“⟩. Кроме того, в эти выпуски, как правило, вкладываются относящиеся к предыдущим выпускам нумеруемые *списки опечаток*.

Список вышедших в свет выпусков трактата Н. Бурбаки приведен в приложении I к настоящему предисловию (см. стр. 13—15). В приложении II (стр. 15—16) показано, как опубликованные в этих выпусках главы, словари и сводки результатов объединяются в книги и части.

Если признаком законченности книги считать наличие в ней Сводки результатов или Словаря (их функции разъясняются в пп. 5 и 9 „Способа пользования“), то законченными следует считать книги I, III, IV и V первой части. Надо, впрочем, иметь в виду,

что уже вышедшие разделы Трактата время от времени перерабатываются, иногда очень значительно, и выходят новыми изданиями.

Большая часть исторических очерков (см. о них в п. 11 „Способа пользования") собрана воедино в книге Н. Бурбаки „Очерки по истории математики" („Éléments d'histoire des mathématiques"), формально не входящей в трактат „Начала математики" и выпущенной в 1960 г. тем же издательством Hermann в качестве IV выпуска серии „Histoire de la pensée".

Ряд разделов трактата Н. Бурбаки вышел в русском переводе. Список этих русских изданий см. в приложении III на стр. 16—17.

Настоящее русское издание представляет собой перевод первой книги (озаглавленной „Теория множеств" („Théorie des Ensembles")) первой части (называемой „Основные структуры Анализа" („Les structure fondamentales de l'Analyse")) трактата. Во французском издании эту книгу составляют следующие четыре выпуска (приводимые в том порядке, в каком их переводы скомпанованы в настоящем издании): XVII (содержащий главы I и II), XX (содержащий главу III и Исторический очерк к § 5 главы III), XXII (содержащий главу IV и Исторический очерк к главам I—IV) и I (содержащий Сводку результатов). Для перевода были использованы второе издание выпуска XVII, первые издания выпусков XX и XXII и третье издание выпуска I[1]).

Переводам названных выпусков предпослан в настоящем издании перевод „Способа пользования данным трактатом", выполненный с экземпляра, вложенного во второе издание выпуска X (1961 г.).

В настоящем переводе учтены списки опечаток № 1—9. Незначительное число мелких неточностей исправлено без оговорок.

2. *Н. Бурбаки о своем трактате*

В аннотации, помещенной в XXII выпуске Трактата, говорится:

„В Трактате математика рассматривается с самого ее начала и даются полные доказательства. Поэтому его чтение не предполагает в принципе никаких специальных математических знаний, а требует лишь некоторого навыка к математическим рассуждениям и некоторой способности к абстракции.

Тем не менее Трактат рассчитан преимущественно на читателей, обладающих по крайней мере хорошим знанием материала, преподаваемого во Франции в курсе общей математики, — в других странах на первом или первых двух годах университетского обучения, — а также по возможности некоторым знанием основных разделов дифференциального и интегрального исчисления.

Трактат никоим образом не имеет своей целью служить энциклопедией современных математических знаний; мы произвели систематический отбор, особенно стараясь развить базисные понятия, используемые при решении большинства задач современной математики. Чтобы сделать эти понятия приложимыми к возможно большему числу случаев, мы представили их в самой общей и, следовательно, самой абстрактной форме, которая позволяет яснее всего видеть структуру различных разрабатываемых теорий. По той же причине мы не стремились включить в изложение каждой теории все теоремы, известные к настоящему моменту; мы принципиально ограничились теми из них, которые составляют логический каркас теории и знание которых необходимо для решения большинства задач, использующих эту теорию. Многие другие результаты, имеющие более ограниченную сферу применения, даны в форме упражнений, содержащих обычно указания, достаточно подробные для их решения.

Трактат разделен на отдельные книги. К каждой книге, как правило, приложена сводка результатов; в ней можно найти большинство определений и сформулированные без доказательства основные теоремы данной книги. Подобная сводка дает математику, желающему пользоваться соответствующей теорией, весьма удобный справочник; кроме того, она может помочь читателю получить представление о книге в целом раньше, чем он приступит к подробному ее изучению".

Так говорит о своем Трактате сам автор. За более подробными сведениями о строении и целях трактата мы отсылаем читателя к „Способу пользования" (стр. 19—22) и к „Введению" (стр. 23—30). Однако, пожалуй, наиболее отчетливо взгляд автора на роль его трактата передает открывающая настоящее издание иллюстрация (во французском издании она открывает собой первый выпуск)[1]).

3. *„Теория множеств" — первая книга „Начал математики"*

Целью трактата Бурбаки является построение всей или почти всей математики на базе теории множеств. Математические объекты

---

[1]) Вот библиографические описания (описываются именно те издания, с которых осуществлен данный перевод):

1) N. Bourbaki. Fascicule XVII. Éléments de mathématique. Première partie. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre 1. Description de la mathématique formelle. Chapitre 2. Théorie des ensembles. Deuxième édition. Paris, Hermann, 1960. 137 стр. + вклейка.

2) Éléments de mathématique par N. Bourbaki. XX. Première partie. Les structures fondamentales de l' Analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre III. Ensembles ordonnés. Cardinaux. Nombres entiers. Paris, Hermann et C°, 1956. 118 стр.

3) N. Bourbaki. XXII. Éléments de mathématique. I. Les structures fondamentales de l'Analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Chapitre 4. Structures. Paris, Hermann, 1957, 125 стр.

4) N. Bourbaki. I. Éléments de mathématique. I. Les structure fondamentales de l'Analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Fascicule de résultats. Troisième édition. Paris, Hermann, 1958, 63 стр.

[1]) Слепок с изображенного на ней метопа храма Зевса в Олимпии читатель может увидеть в зале № 5 Музея изобразительных искусств имени Пушкина в Москве.

рассматриваются автором как множества, наделенные той или иной „структурой“ (об этом последнем понятии см. § 8 „Сводки результатов“). В п. 2 прежнего варианта „Способа пользования“ говорилось: „Первая часть Трактата посвящена основным структурам Анализа ...; в каждой из книг, на которые делится эта часть, изучается одна из этих структур или ряд близкородственных структур ... Общие принципы, изучаемые в первой части, найдут затем в следующих частях применение к теориям, в которых появляются одновременно различные структуры“.

Естественно, что при таком способе изложения первая книга — „Теория множеств“ — занимает совершенно особое место в трактате. Автор, намеревающийся систематически выводить всю математику из теории множеств (путем присоединения к последней дополнительных аксиом), именно в этой книге закладывает фундамент своего построения. Поэтому введение к первой книге может в известном смысле рассматриваться как введение ко всему трактату.

В первой главе дается описание метода, посредством которого будет развиваться теория на протяжении всего Трактата. Таковым служит формальный аксиоматический метод[1]), в котором (в отличие от неформального аксиоматического метода) четко формулируются не только аксиомы, но и правила вывода из них. Предложения рассматриваемой теории предстают при этом в виде *знакосочетаний*, а правила вывода одних предложений из других — в виде правил формального преобразования этих знакосочетаний. Именно таким способом развивается во второй главе теория множеств.

Разумеется, знакосочетания и действия с ними могут при желании рассматриваться безо всякой интерпретации, как говорят, с чисто *синтаксической* точки зрения (т. е. исключительно с точки зрения взаимного расположения самих знаков). Однако наибольший интерес представляют, конечно, те построения, которые сопровождаются интерпретацией, т. е. наделением рассматриваемых знакосочетаний определенным *содержанием*. В книге такая интерпретация постоянно указывается. Более того, благодаря широкому использованию так называемых сокращающих символов (см., например, определение символа „1“ на стр. 187—188) и соглашений о словесном прочтении знакосочетаний, текст книги по мере удаления от начала все более и более приобретает характер обычного математического текста (лишь в главе IV приходится снова вернуться к формальному языку). Однако следует всегда помнить, что каждое звучащее обычно предложение (вроде „Существует такое множество, что...“ и т. п.) представляет собой на самом деле не что иное, как произведенную на основе сделанных соглашений словесную запись некоторого знакосочетания, — причем как раз такого, что это знакосочетание — при

[1]) См. А. Чёрч, Введение в математическую логику, М., ИЛ, 1960, стр. 55.

его интерпретации, заданной особым соглашением, — и это предложение — при обычном его истолковании в повседневном математическом языке — выражают одно и то же суждение. Таким образом, большинство предложений может расшифровываться двумя согласованными между собой способами — обычным, содержательным (как выражающее некоторое суждение) и формальным (как изображающее некоторое знакосочетание); см. для примера формулировку Предложения 1 на стр. 85. Этот особый, „двусмысленный“ стиль изложения представляется педагогической удачей автора: он позволяет, развивая формальную аксиоматическую теорию, считать, что мы занимаемся содержательной математикой (или, наоборот, занимаясь обычной математикой, развивать вместе с тем формальную теорию).

В третьей главе излагается теория упорядоченных множеств и кардинальных (количественных) чисел. К сожалению, важнейшее понятие ординального (порядкового) числа встречается лишь в упражнениях.

В главе IV определяется и изучается основное для всего трактата (вынесенное даже в название всей первой части) понятие структуры.

В силу самой тематики первой книги, помещенный в ней, как и в других, Исторический очерк (касающийся оснований математики, логики, теории множеств) более тесно связан здесь с основным изложением, чем где-либо в других разделах Трактата; достаточно сказать, что именно в нем формулируются знаменитые теоремы Гёделя об ограниченности формального аксиоматического метода. [Поэтому было решено набрать его в русском издании тем же шрифтом, что и основной текст (во французском оригинале исторические очерки набираются петитом).]

Наконец, Сводка результатов должна сделать возможным для читателя изучение последующих книг Трактата без непосредственного обращения к достаточно напряженному тексту глав I—IV.

4. *Некоторые критические замечания*

Перед любым автором, избирающим для развития своей теории формальный аксиоматический метод, всегда встают две проблемы: проблема *непротиворечивости*, состоящая в выяснении того, не окажется ли в его формальной теории *слишком много* теорем (настолько много, что они уже начнут противоречить друг другу), и проблема *полноты*, состоящая в выяснении того, можно ли в этой теории получить *достаточно много* теорем (а именно получить в качестве теорем все выразимые в теории содержательно истинные утверждения).

Во введении (стр. 28—30) автор достаточно отчетливо ставит перед собой первую проблему и решает ее, по его словам, „в реалистическом духе“. Это решение слагается, во-первых, из надежды, что противоречие в аксиоматической теории множеств не встретится, и, во-вторых, из убеждения, что если оно и встретится, то его

можно будет устранить, слегка видоизменив эту теорию. Однако подкрепляющий надежду аргумент не кажется достаточно убедительным. Он состоит в том, что „за 40 лет с тех пор, как сформулировали с достаточной точностью аксиомы теории множеств и стали извлекать из них следствия в самых разнообразных областях математики, еще ни разу не встретилось противоречие" (введение, стр. 29). Не говоря уже о том, что аксиомы, о которых сказано в этом отрывке, были все же не те, которые положены в основу теории Бурбаки, было бы, конечно, неправильным рассматривать развитие математики после формулирования аксиом теории множеств как процесс извлечения следствий из этих аксиом. Поэтому ссылаться здесь можно не на сорокалетний опыт *математики*, а на сорокалетний опыт *аксиоматической теории множеств*. Впрочем, автор, по-видимому, исходит из того, что все результаты, полученные с тех пор математикой, могли бы быть получены и средствами аксиоматической теории множеств. Может быть, это и так; однако это еще не представляется достаточно очевидным. Строго говоря, нет гарантии даже того, что все теоремы Трактата могут быть доказаны в рамках формализованной теории, описанной в главе I первой книги. „Двусмысленный стиль", о котором говорилось в предыдущем пункте, таит в себе и известную опасность: становится трудным проследить, возможно ли любое доказательство, встречающееся в Трактате и имеющее внешний вид содержательного рассуждения, воспроизвести формально. Но тут мы сталкиваемся уже с проблемой полноты.

Как показал Гёдель в своей знаменитой *теореме о неполноте*, или *первой теореме*, каждая достаточно сильная непротиворечивая формальная теория неполна, т. е. существует истинное утверждение, выражающееся на языке этой теории, но не доказуемое в ней[1]; критерием силы теории является здесь доказуемость в ней так называемых аксиом арифметики. Аксиомы арифметики доказуемы в аксиоматической теории множеств; следовательно, по теореме Гёделя, аксиоматическая теория множеств, если непротиворечива, то неполна. Итак, мы получили, что существует истинное предложение, выразимое на языке аксиоматической теории множеств, но не доказуемое в ней. Более того, теорема Гёделя дает способ построения такого предложения; относительно этого (теперь уже конкретного) предложения мы можем *установить*, стало быть, что оно истинно содержательно, но не доказуемо формально. Установление истинности какого-либо предложения есть то, что в обычной математике называют *доказательством*; мы имеем, следовательно, пример такого *содержательного доказательства*, которое не может быть проведено *формально* (в рассматриваемой аксиоматической теории, в данном

[1]) На стр. 344 читатель найдет определение полноты (и, следовательно, неполноты), не опирающееся на понятие истины. Оба определения эквивалентны для широкого класса теорий.

случае в теории Бурбаки). Где гарантия, что такие доказательства не встречаются в реальной математической практике (и, быть может, даже где-нибудь в последних книгах трактата Бурбаки)? И не показывает ли все это *принципиальную ограниченность* метода формализации?

Разумеется, построенное истинное, но не доказуемое в данной формальной теории предложение мы можем присоединить в качестве новой аксиомы к исходной системе; но тогда тем же способом получим другое предложение, обладающее теми же свойствами (относительно расширенной системы) и т. д. Во введении автор пишет (стр. 28), что „возможность полной формализации" сохраняется в Трактате „всюду в виду, как некий горизонт". Как видим, это сравнение (во всяком случае, если говорить о всей математике, а не только о Трактате) оказывается более точным, чем, возможно, хотелось бы автору.

Автор не считает нужным хотя бы поставить проблему полноты. Даже в заключительном Историческом очерке, где на стр. 344 приводится теорема Гёделя о неполноте, автор говорит о ней просто как о значительном результате метаматематики, не замечая, или не желая замечать ее самого прямого отношения к применяемому в трактате методу. Можно, конечно, возразить, что автор, по-видимому, и не признает никакого понятия истины, отличного от понятия доказуемости в формальной системе (теорема Гёделя формулируется им без привлечения этого понятия): «Таким образом, „математическая истина" пребывает исключительно в логической дедукции из посылок, устанавливаемых путем произвольного задания аксиом»,—пишет Н. Бурбаки в Историческом очерке (стр. 316—317). Однако становится непонятным тогда, в каком же смысле следует понимать истинность, скажем, утверждений о непротиворечивости и полноте формальных теорий. Такое понимание истины делает Исторический очерк довольно тенденциозным, оставляя его, впрочем, интересным и поучительным.

5. *Некоторые терминологические замечания*

Общая оригинальность Трактата Н. Бурбаки распространяется и на его терминологию, изобилующую специфическими „бурбакизмами". При переводе имелось в виду сохранить характер терминологии, даже там, где ее необычность заходила слишком далеко. Так, например, знак „$\leqslant$" читается у Бурбаки „est plus petit que", что переводится „меньше"; таким образом, фраза „нуль меньше нуля" выражает на языке данного издания истинное суждение.

Характерная для Трактата тенденция к максимальной общности и движению от общего к частному проявляется и в системе терминов и обозначений. Она выражается здесь прежде всего в стремлении к возможно большему объему термина. Автор каждый раз желает рассмотреть как можно более общую ситуацию и именно для нее ввести более короткое название или более простой символ. При

переходе же от более общей ситуации к более частной названия и символы соответственно усложняются. Возникающие на этом пути термины и обозначения иногда оказываются расходящимися с принятыми в русской математической литературе, а иногда и просто со словоупотреблением русского языка. Приведем несколько примеров, которые поясняют сказанное и одновременно предостерегут читателя от возможной ошибки, связанной с необычным употреблением знакомых ему слов.

1) *Последовательностью* называется в Трактате (стр. 222, определение 2) не только функция, определенная на *всем* натуральном ряде, но и функция, определенная на произвольной части натурального ряда, — и далее различаются *конечные последовательности* и *бесконечные последовательности*.

2) Аналогично *счетным* называется в Трактате (стр. 227, определение 3) не только множество, равномощное всему натуральному ряду, но и множество, равномощное какой-либо его *части*, — и далее различаются *конечные счетные* множества и *бесконечные счетные* множества.

3) Про структуру $\mathscr{S}_1$ говорится, что она *тоньше* структуры $\mathscr{S}_2$, если существует некоторое естественным образом ассоциируемое с этими структурами отображение. При этом каждая структура оказывается тоньше самой себя. Если структура $\mathscr{S}_1$ тоньше структуры $\mathscr{S}_2$, а структура $\mathscr{S}_2$ не тоньше структуры $\mathscr{S}_1$ (более частная ситуация!), то говорится, что $\mathscr{S}_1$ *строго тоньше*, чем $\mathscr{S}_2$. (См. стр. 257.)

4) Аналогично про теорию $\mathcal{T}'$ говорят, что она *сильнее* теории $\mathcal{T}$, если знаки, явные аксиомы и схемы теории $\mathcal{T}$ выражаются определенным образом в $\mathcal{T}'$ (см. стр. 43); всякая теория оказывается при этом сильнее самой себя. В духе трактата было бы говорить, что теория $\mathcal{T}'$ *строго сильнее*, чем $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T}'$ сильнее $\mathcal{T}$, а $\mathcal{T}$ не сильнее $\mathcal{T}'$.

5) Для обозначения более общей ситуации, при которой множество X есть подмножество множества Y, употребляется *более простой* знак „$\subset$“ и пишется „$X \subset Y$“ (а не „$X \subseteq Y$“, как часто пишут в советской математической литературе); та *более частная* ситуация, когда X есть подмножество множества Y, не совпадающее со всем Y, обозначается более длинно „$X \subset Y$ и $X \neq Y$“ (а не „$X \subset Y$“, как пишут в этом случае в тех системах, где существует знак „$\subseteq$“). (См. стр. 75, определение 1.)

6) Знак нестрогого неравенства „$\leqslant$“ описывает *более общую* ситуацию, нежели знак строгого неравенства „$<$“ (здесь наблюдается отклонение от общего стиля обозначений Бурбаки, согласно которому первый из этих знаков должен был бы иметь более простое начертание, нежели второй), и потому имеет в трактате *более короткое* прочтение: „меньше“ — в то время как второй знак читается „строго меньше“.

Аналогично знак нестрогого неравенства „$\geqslant$“ читается в трактате „больше“, а знак строгого неравенства „$>$“ читается „строго больше“ (см. стр. 140—141).

7) Понятие числа, большего нуля, является более общим по сравнению с понятием числа, строго большего нуля. Поэтому первое из этих понятий обозначено более коротким термином — „положительное число“ (таковым является, в частности, нуль), а второе — более длинным — „строго положительное число“ (см. стр. 384).

При желании восстановить французский прообраз того или иного термина следует обратиться к алфавитному указателю в конце книги: соответствующий французский термин будет помещен там в угловых скобках после термина русского.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ПЕРЕЧЕНЬ ВЫПУСКОВ ФРАНЦУЗСКОГО ИЗДАНИЯ [1])

Выпуски французского издания трактата Н. Бурбаки нумеруются римскими цифрами в том порядке, в каком они впервые выходят в свет; при переизданиях сохраняются те же номера. Кроме того, каждый выпуск имеет свой номер в серии „Actualités scientifiques et industrielles“; этот номер пишется арабскими цифрами и иногда сохраняется при переиздании, а иногда нет. Ниже перечисляются выпуски трактата в порядке их „римской“ нумерации.

В скобках указан год выхода в свет последнего из известных редактору изданий данного выпуска, а также порядковый номер этого издания — в тех случаях, когда таковой был обозначен на титульном листе.

I.	Livre I. Théorie des ensembles. Fascicule de résultats.	(1958, 3-е изд.)
II.	Livre III. Topologie générale. Ch. 1. Ch. 2.	(1961, 3-е изд.)
III.	Livre III. Topologie générale. Ch. 3. Ch. 4.	(1960, 3-е изд.)
IV.	Livre II. Algèbre. Ch. 1.	(1958, новое изд.)
V.	Livre III. Topologie générale. Ch. 5. Ch. 6. Ch. 7. Ch. 8.	(1955, 2-е изд.)
VI.	Livre II. Algèbre. Ch. 2.	(1962, 3-е изд.)

[1]) Не претендует на полноту.

VII.	Livre	II. Algèbre. Ch. 3.	(1958, новое изд.)
VIII.	Livre	III. Topologie générale. Ch. 9.	(1960, 2-е изд.)
IX.	Livre	IV. Fonctions d'une variable réelle. Ch. 1. Ch. 2. Ch. 3.	(1958, 2-е изд.)
X.	Livre	III. Topologie générale. Ch. 10[1]).	(1961, 2-е изд.)
XI.	Livre	II. Algébre. Ch. 4. Ch. 5.	(1959, 2-е изд.)
XII.	Livre	IV. Fonctions d'une variable réelle. Ch. 4. Ch. 5. Ch. 6. Ch. 7.	(1951)
XIII.	Livre	VI. Intégration. Ch. 1. Ch. 2. Ch. 3. Ch. 4.	(1952)
XIV.	Livre	II. Algèbre. Ch. 6. Ch. 7.	(1964, 2-е изд.)
XV.	Livre	V. Espaces vectoriels topologiques. Ch. 1. Ch. 2.	(1953)
XVI.	Livre	III. Topologie générale. Fascicule de résultats.	(1953)
XVII.	Livre	I. Théorie des ensembles. Ch. 1. Ch. 2.	(1960, 2-е изд.)
XVIII.	Livre	V. Espaces vectoriels topologiques. Ch. 3 Ch. 4. Ch. 5. Dictionnaire.	(1955)
XIX.	Livre	V. Espaces vectoriels topologiques. Fascicule de résultats.	(1955)
XX.	Livre	I. Théorie des ensembles. Ch. 3.	(1963, 2-е изд.)
XXI.	Livre	VI. Intégration. Ch. 5.	(1956)
XXII.	Livre	I. Théorie des ensembles. Ch. 4.	(1957)
XXIII.	Livre	II. Algèbre. Ch. 8.	(1958)
XXIV.	Livre	II. Algèbre. Ch. 9.	(1959)

[1]) В первом издании этого выпуска (1949) имеется еще Dictionnaire.

XXV.	Livre	VI. Intégration. Ch. 6.	(1959)
XXVI.		Groupes et algèbres de Lie. Ch. 1.	(1960)
XXVII.		Algèbre commutative. Ch. 1. Ch. 2.	(1960)

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫШЕДШИХ ГЛАВ ТРАКТАТА

Указанные в приложении I главы, словари и сводки результатов следующим образом объединяются в книги и части.

Первая часть. Основные структуры Анализа

Книга 1. Теория множеств.
⟨Théorie des ensembles.⟩

Глава 1. Описание формальной математики.
Глава 2. Теория множеств.
Глава 3. Упорядоченные множества. Кардинальные числа. Целые числа.
Глава 4. Структуры.
Сводка результатов.

Книга 2. Алгебра.
⟨Algèbre.⟩

Глава 1. Алгебраические структуры.
Глава 2. Линейная алгебра.
Глава 3. Полилинейная алгебра.
Глава 4. Полиномы и рациональные дроби.
Глава 5. Коммутативные тела.
Глава 6. Упорядоченные группы и тела.
Глава 7. Модули на кольцах главных идеалов.
Глава 8. Полупростые модули и кольца.
Глава 9. Полуторалинейные и квадратичные формы.

Книга III. Общая топология.
⟨Topologie générale.⟩

Глава 1. Топологические структуры.
Глава 2. Равномерные структуры.
Глава 3. Топологические группы.

Глава 4. Действительные числа.
Глава 5. Однопараметрические группы.
Глава 6. Числовые и проективные пространства.
Глава 7. Аддитивные группы $\mathbf{R}^n$.
Глава 8. Комплексные числа.
Глава 9. Использование комплексных чисел в общей топологии.
Глава 10. Функциональные пространства.
Словарь.
Сводка результатов.

Книга IV. Функции одного действительного переменного.
⟨Fonctions d'une variable réelle.⟩

Глава 1. Производные.
Глава 2. Первообразные и интегралы.
Глава 3. Элементарные функции.
Глава 4. Дифференциальные уравнения.
Глава 5. Локальное исследование функций.
Глава 6. Обобщенные тэйлоровские разложения. Формула суммирования Эйлера — Маклорена.
Глава 7. Гамма-функция.
Словарь.

Книга V. Топологические векторные пространства.
⟨Espaces vectoriels topologiques.⟩

Глава 1. Топологические векторные пространства над нормированным телом.
Глава 2. Выпуклые множества и локально выпуклые пространства.
Глава 3. Пространства непрерывных линейных отображений.
Глава 4. Двойственность в топологических векторных пространствах.
Глава 5. Гильбертовы пространства (элементарная теория).
Словарь.
Сводка результатов.

Книга VI. Интегрирование.
⟨Intégration.⟩

Глава 1. Неравенства выпуклости.
Глава 2. Пространства Рисса.
Глава 3. Меры на локально бикомпактных пространствах.
Глава 4. Продолжение меры. Пространства L^p.
Глава 5. Интегрирование мер.
Глава 6. Векторное интегрирование.

Вторая часть

Книга (без номера). Группы и алгебры Ли.
⟨Groupes et algèbre de Lie.⟩
Глава 1. Алгебры Ли.

Книга (без номера). Коммутативная алгебра
Глава 1. Плоские модули.
Глава 2. Локализация.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

РУССКИЕ ПЕРЕВОДЫ РАЗДЕЛОВ ТРАКТАТА

К настоящему времени вышли в свет следующие русские переводы разделов Трактата.

1) Н. Бурбаки. Общая топология. Основные структуры. Пер. с франц. С. Н. Крачковского. Под ред. Д. А. Райкова. С предисловием П. С. Александрова. М., Физматгиз, 1958, 324 стр. + 2 вклейки.

Содержит первые три главы третьей книги [в переводе со вторых изданий выпусков II (1951) и III (1951)] и — в качестве приложения — Сводку результатов первой книги [в переводе со второго издания выпуска I (1951)].

2) Н. Бурбаки. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства. Пер. с франц. С. Н. Крачковского. Под ред. Д. А. Райкова. М., Физматгиз, 1959, 247 стр.

Содержит главы IV—VIII третьей книги.

3) Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. Пер. с франц. Д. А. Райкова. М., ИЛ, 1959. 410 стр. + 5 вклеек.

Содержит перевод всей пятой книги, а также перевод „Способа пользования данным Трактатом“ [французский оригинал этого варианта „Способа пользования“ был вложен, например, во второе издание XVII выпуска (1960 г.)].

4) Н. Бурбаки. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. Пер. с франц. Д. А. Райкова. М., Физматгиз, 1962. 516 стр. + 4 вкладки.

Содержит перевод первых трех глав второй книги.

Кроме того, вышел перевод „Очерков по истории математики :
Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. Пер. с франц. И. Г. Башмаковой. Под ред. К. А. Рыбникова. М., ИЛ, 1963, 292 стр.

Наконец, в сборнике „Математическое просвещение“, вып. 5, М., Физматгиз, 1960, на стр. 99—112 помещен выполненный Д. Н. Лен-

ским перевод программной статьи Н. Бурбаки „Архитектура математики“, появившейся в 1948 г.[1]). В том же выпуске „Математического просвещения“ можно прочесть на стр. 113—115 статью А. А. Ляпунова „О фундаменте и стиле современной математики (по поводу статьи Н. Бурбаки)“, а на стр. 229—239 — выполненный Ф. Л. Варпаховским и Г. А. Шестопал перевод статьи П. Халмоша „Николай Бурбаки“, в которой приводятся достаточно подробные сведения об авторе настоящего Трактата[2]).

В. Успенский

9 июня 1964 г.

---

[1]) Этот же перевод помещен в виде приложения в русском издании „Очерков по истории математики“ (стр. 245—259). В обеих названных пуб-
ликациях этого перевода последняя фраза содержит опечатку. Напечатано:
„*идеи* заменить *вычислениями*“, следует читать: „*вычисление* заменить
идеями“ (в оригинале „substituer les *idées* au *calcul*“; см. сб. „Les grands
courants de la pensée mathématique“, présentés par F. Le Lionnais, Fontenay-
aux-Roses (Seine), Cahiers du Sud, 1948, стр. 47).

[2]) (*Примечание при корректуре.*) См. также анонимную статью „«Эвклид» двадцатого века“ в 1-м номере журнала „Наука и жизнь“ за 1965 г. (стр 136—137).

СПОСОБ ПОЛЬЗОВАНИЯ ДАННЫМ ТРАКТАТОМ

1. В Трактате математика рассматривается с самого ее начала и даются полные доказательства. Поэтому его чтение не предполагает в принципе никаких специальных математических знаний, а требует лишь некоторого навыка к математическим рассуждениям и некоторой способности к абстракции.

Тем не менее Трактат рассчитан преимущественно на читателей, обладающих по крайней мере хорошим знанием материала, преподаваемого на первом или первых двух годах университетского обучения.

2. Принятый способ изложения является аксиоматическим и абстрактным; чаще всего происходит переход от общего к частному. Выбор такого метода вызван главной целью этого Трактата, состоящей в том, чтобы дать прочные основания всей современной математики в целом. Для этого совершенно необходимо сразу же вооружиться весьма большим числом очень общих понятий и принципов. Кроме того, потребности доказательства диктуют, чтобы главы, книги и части следовали в строго фиксированном логическом порядке. Поэтому полезность некоторых рассмотрений будет обнаружена читателем, лишь если он уже обладает весьма обширными знаниями или же если он будет иметь терпение отложить свое суждение до тех пор, когда ему представится случай убедиться в этой полезности.

3. Чтобы в какой-то мере бороться с этим неудобством, в текст довольно часто вводятся примеры, использующие факты, которые читатель может уже знать из других источников, но которые еще не излагались в Трактате; эти примеры всюду помещены между двумя значками °...ₒ[1]). Большинство читателей, несомненно, найдет, что эти примеры облегчают понимание текста, и предпочтет не про-

---

[1]) В оригинале * ... * — *Прим. ред.*

пускать их, даже при первом чтении; однако такой пропуск, разумеется, не вызвал бы, с логической точки зрения, никаких неудобств.

4. Трактат разделяется на книги.

В первой части Трактата книги нумеруются, и, в принципе, любая формулировка текста предполагает известными только результаты, изложенные ранее в установленном порядке. Во второй части это правило соблюдается внутри каждой книги, но из соображений удобства изложения книги уже не располагаются в линейном порядке. Читатель найдет в начале каждой книги или главы второй части Трактата точные указания о ее логических связях с другими книгами этой части (книги первой части предполагаются известными); так он сможет проверить отсутствие порочного круга.

5. Читатель, быть может, захочет иногда составить себе общее представление о суммарном содержании какой-либо книги Трактата, прежде чем приступать к подробному изучению ее. Эта задача будет ему облегчаться *сводками результатов*, прилагаемыми, как правило, к каждой книге и рассчитанными в то же время на занятых читателей, которые желали бы как можно скорее начать изучение специальных проблем. Эти сводки будут содержать по возможности самое существенное из того, что будет необходимо для изучения следующих книг.

6. Логический каркас каждой главы составляют ее *определения*, *аксиомы* и *теоремы*: именно это особенно необходимо сохранять в уме, имея в виду дальнейшее. Результаты, менее важные, или те, которые нетрудно вновь вывести из теорем, выступают под названием „предложений“, „лемм“, „следствий“, „замечаний“ и т. д.; те, которые можно пропустить при первом чтении, печатаются мелким шрифтом. Под названием „схолия“ читатель иногда найдет комментарий к особенно важной теореме.

7. Некоторые места имеют целью уберечь читателя от серьезной ошибки, в которую он рисковал впасть; эти места отмечены на полях знаком Z („опасный поворот“).

8. *Упражнения* должны, с одной стороны, дать возможность читателю проверить, хорошо ли он усвоил текст; с другой стороны, они должны познакомить его с результатами, которые не нашли себе места в тексте, но тем не менее по-своему интересны. Их можно пропускать при первом чтении; однако изучающему рекомендуется решать некоторые из них хотя бы при втором чтении. Наиболее трудные отмечаются значком ¶ [1]).

9. Терминология, принятая в этом Трактате, была предметом особого внимания. *Прилагались старания нигде не отступать от общепринятой терминологии без весьма серьезных причин*. Не только каждый выпуск будет снабжен подробным *указателем*, но за каждой книгой будет следовать *словарь*, где будут объясняться и обсуждаться, кроме терминов, употребляемых в этом Трактате, соответствующие термины, употребляемые до сих пор в наиболее важных языках. Такой словарь позволит читателю Трактата приступить к изучению оригинальных работ на различных языках, а математику, привыкшему к другой терминологии, быстро освоиться с терминологией Трактата.

10. Прилагались старания к тому, чтобы, не жертвуя простотой изложения, пользоваться всюду строго корректным языком. Насколько возможно, *вольности речи*, без которых любой математический текст рискует стать педантичным и даже трудно читаемым, отмечались попутно; в нужных случаях они упоминаются в указателях и словарях.

11. Так как текст посвящен в основном догматическому изложению теории, читатель найдет библиографические ссылки лишь в виде исключений; эти ссылки будут сосредоточиваться в *исторических очерках*, помещаемых обычно *в конце каждой главы*, и здесь же читатель найдет, если представится случай, указания на еще не решенные проблемы теории. Библиография, которая следует за каждым из этих обзоров, чаще всего содержит только оригинальные книги и статьи, сыгравшие наибольшую роль в развитии рассматриваемой теории; она никоим образом не претендует на полноту, в частности, ссылки, которые должны лишь установить первенство, почти всегда будут опущены.

Что касается упражнений, то вообще не было сочтено полезным указывать их источники, каковые весьма различны (оригинальные работы, учебные руководства, сборники упражнений).

---

[1]) В указанных на стр. 16—17 русских переводах разделов Трактата наиболее трудные упражнения отмечались звездочкой. — *Прим. ред.*

12. Ссылки на то или иное место Трактата даются следующим образом:

а) Если надо сослаться на теоремы, аксиомы или определения, излагаемые *в том же самом параграфе*, то они обозначаются, если это возможно, своими номерами.

б) Если они излагаются *в другом параграфе той же главы*, то, кроме того, указывается этот параграф.

в) Если они излагаются *в другой главе той же книги*, то указываются соответствующие глава и параграф.

г) Если они находятся *в другой книге*, то сначала указывают, сверх того, эту книгу по ее названию.

Сводки результатов обозначаются буквами Рез: например, *Множ.* Рез означает „сводка результатов теории множеств". Если какая-либо глава была модифицирована в последующих изданиях, ссылки на эту главу будут содержать указание на издание, если только место, на которое ссылаются, не осталось неизменным по сравнению с первым изданием.

Таблицы соответствия между последовательными изданиями дают читателю возможность отыскать в новом издании определения, предложения или упражнения, нумерация которых изменилась по сравнению с предыдущим изданием.

13. Каждый раз, когда читателю может быть полезно иметь перед своими глазами во время всего чтения данного выпуска некоторые аксиомы, некоторые определения и т. д., таковые будут воспроизводиться на *разворачивающейся вклейке*, помещаемой в конце выпуска.

ВВЕДЕНИЕ

Со времен греков говорить „математика" — значит говорить „доказательство". Некоторые сомневаются даже, что вне математики имеются доказательства в том точном и строгом смысле, какой получило это слово у греков и какой мы хотим придать ему здесь. С полным правом можно сказать, что этот смысл не изменился. То, что было доказательством для Эвклида, остается доказательством и в наших глазах; а в эпоху, когда понятие доказательства было под угрозой утраты и математика находилась из-за этого в опасности, образцы искали именно у греков. Однако к столь славному наследию в течение последнего века прибавились новые важные завоевания.

Действительно, анализ механизма доказательств в хорошо подобранных математических текстах позволил раскрыть строение доказательств с точки зрения как словаря, так и синтаксиса. Это привело к заключению, что достаточно ясный математический текст можно было бы выразить на условном языке, который содержит лишь небольшое число неизменных „слов", соединяемых друг с другом, согласно синтаксису, состоящему из небольшого числа не допускающих исключений правил; так выраженный текст называется *формализованным*. Запись шахматной партии с помощью обычной шахматной нотации и таблица логарифмов суть формализованные тексты. Формулы обычного алгебраического исчисления также будут формализованными текстами, если полностью кодифицировать правила, управляющие употреблением скобок, и строго их придерживаться; но в действительности некоторые из этих правил познаются лишь в процессе употребления, и этот же процесс санкционирует некоторые отступления от них.

Проверка формализованного текста требует лишь в некотором роде механического внимания, так как единственные возможные источники ошибок — это длина или сложность текста. Вот почему математик большей частью доверяет собрату, сообщающему результат алгебраических вычислений, если только известно, что эти вычисления не слишком длинны и выполнены тщательно. Напротив, в неформализованном тексте всегда существует опасность ошибочных умозаключений, к которым может привести, например, злоупотребление интуицией или рассуждение по аналогии. Однако в действительности математик, желающий убедиться в полной правильности, или, как говорят, "строгости", доказательства или теории, отнюдь не прибегает к одной из тех полных формализаций, которыми мы сейчас располагаем, и даже большей частью не пользуется частич-

ными и неполными формализациями, доставляемыми алгебраическим и другими подобными исчислениями. Обыкновенно он довольствуется тем, что приводит изложение к такому состоянию, когда его опыт и чутье математика говорят ему, что перевод на формализованный язык был бы теперь лишь упражнением (быть может, очень тягостным) в терпении. Если, как нередко бывает, возникают сомнения, то в конечном счете они относятся именно к возможности прийти без двусмысленности к такой формализации — употреблялось ли одно и то же слово в разных смыслах в зависимости от контекста, нарушались ли правила синтаксиса бессознательным употреблением способов рассуждения, не разрешаемых явно этими правилами, была ли, наконец, совершена фактическая ошибка. Если оставить в стороне последний случай, то непременно рано или поздно сомнения преодолеваются тем, что текст редактируется, все больше и больше приближаясь к формализованному тексту, пока, по общему мнению математиков, дальнейшее продолжение этой работы не станет излишним. Иными словами, правильность математического текста всегда проверяется более или менее явным сравнением с правилами какого-либо формализованного языка.

Аксиоматический метод, собственно говоря, есть не что иное, как искусство составлять тексты, формализация которых легко достижима. Он не является новым изобретением, но его систематическое употребление в качестве инструмента открытий составляет одну из оригинальных черт современной математики. В самом деле, и при записи, и при чтении формализованного текста совершенно несущественно, приписывается ли словам и знакам этого текста то или иное значение или даже не приписывается никакого, — важно лишь точное соблюдение правил синтаксиса. Именно поэтому алгебраические вычисления, как знает каждый, могут служить для решения задач о килограммах или о франках, о параболах или о равномерно ускоренных движениях. Таким же преимуществом — и по тем же причинам — обладает и всякий текст, составленный по аксиоматическому методу. Коль скоро теоремы Общей топологии установлены, их можно применять по желанию и к обычному пространству, и к гильбертову, равно как и ко многим другим пространствам. Эта возможность придавать разнообразное содержание словам или первичным понятиям теории составляет вместе с тем важный источник обогащения интуиции математика, которая отнюдь не обязательно имеет пространственную или чувственную природу, как часто думают, а скорее представляет собой некоторое знание поведения математических объектов, часто прибегающее к помощи образов самой различной природы, но основанное прежде всего на повседневном знакомстве с этими объектами. На таком пути нередко открывалась возможность плодотворного изучения в какой-либо теории свойств, которые в ней по традиции оставались без внимания, но которые систематически изучались в общей аксиоматической теории, охватывающей данную теорию как частную

модель (например, свойств, ведущих свое историческое происхождение от другой частной модели этой общей теории). Более того, — и это нам особенно важно в настоящем Трактате — аксиоматический метод позволяет, когда дело касается сложных математических объектов, расчленить их свойства и перегруппировать эти свойства вокруг немногих понятий, т. е., если воспользоваться словом, которое далее получит точное определение, он позволяет классифицировать свойства по *структурам*, которым они принадлежат (одна и та же структура, разумеется, может фигурировать в связи с разными математическими объектами). Так, среди свойств сферы одни являются топологическими, другие — алгебраическими, а третьи могут рассматриваться как относящиеся к дифференциальной геометрии или к теории групп Ли. Каким бы искусственным этот принцип классификации ни становился иногда по мере переплетения структур, именно он лежит в основе распределения по книгам материала, составляющего предмет настоящего Трактата.

Подобно тому как искусство правильно говорить на живом языке существовало еще до грамматики, так и аксиоматический метод применялся задолго до изобретения формализованных языков. Однако его сознательное применение может основываться только на знании общих принципов, управляющих этими языками, и их соотношений с обычными математическими текстами. Мы намереваемся в этой книге Трактата дать сначала описание одного такого языка вместе с изложением общих принципов, применимых ко многим другим подобным языкам. Однако для наших целей будет достаточно лишь одного-единственного языка. В самом деле, если прежде могли думать, что каждая отрасль математики зависит от специфических интуиций, дающих ей первичные понятия и истины, и потому для каждой отрасли необходим свой специфический формализованный язык, то сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника — Теории множеств. Таким образом, нам будет достаточно изложить принципы какого-то одного формализованного языка, рассказать, как сформулировать на этом языке Теорию множеств, а затем постепенно, по мере того как наше внимание будет направляться на различные отрасли математики, показывать, как они включаются в Теорию множеств. Поступая так, мы не намереваемся давать законы на вечные времена. Может случиться, что когда-нибудь математики согласятся использовать способы рассуждения, не поддающиеся формализации в излагаемом здесь языке. Тогда придется если и не полностью изменить этот язык, то по крайней мере расширить правила синтаксиса. Решение принадлежит будущему.

Само собой разумеется, описание формализованного языка делается на обычном языке, подобно описанию правил игры в шахматы; мы не входим в обсуждение психологических или метафизических

проблем, связанных с применимостью обычного языка в таких обстоятельствах (например, возможности опознать, что какая-нибудь буква алфавита является „той же самой“ в двух различных местах страницы, и т. д.). Равным образом невозможно выполнить такое описание без того, чтобы не применять нумерацию; хотя строгие умы могли бы почувствовать затруднение при этом и даже найти здесь логическую ошибку, тем не менее ясно, что в данном случае цифры используются лишь как опознавательные метки (впрочем, заменимые другими знаками, например цветами или буквами) и что подсчет знаков в выписанной формуле еще не составляет никакого математического рассуждения. Мы не будем обсуждать возможность обучить принципам формализованного языка существа, умственное развитие которых не доходило бы до умения читать, писать и считать.

Если бы формализованная математика была так же проста, как игра в шахматы, то, составив описание выбранного нами формализованного языка, мы должны были бы затем лишь излагать наши доказательства на этом языке, подобно тому как автор шахматного трактата записывает в своей нотации партии, которым он хочет научить, сопровождая их в случае необходимости комментариями. Однако вопрос решается отнюдь не столь легко, и не требуется большого опыта, чтобы убедиться в абсолютной неосуществимости подобного проекта: даже простейшее доказательство из начального раздела Теории множеств потребовало бы сотен знаков дла своей полной формализации. Поэтому, уже начиная с Книги I настоящего Трактата, возникает настоятельная необходимость сокращать формализованный текст введением новых слов (называемых „сокращающими символами“) и дополнительных правил синтаксиса (называемых „дедуктивными критериями“) в довольно значительном количестве. Поступая так, мы получаем языки, гораздо более удобные, чем формализованный язык в собственном смысле, и относительно которых любой мало-мальски опытный математик будет убежден, что их можно рассматривать как стенографические транскрипции формализованного языка. Но мы уже не будем иметь уверенности, что переход от одного из этих языков к другому может быть сделан чисто механическим образом. Чтобы обрести эту уверенность, пришлось бы настолько усложнить правила синтаксиса, управляющие употреблением новых слов, что польза от этих слов стала бы иллюзорной. Здесь, как и в алгебраическом исчислении и при употреблении почти любых обозначений, которыми обычно пользуются математики, удобный инструмент предпочитается другому, теоретически более совершенному, но слишком громоздкому.

Как увидит читатель, введение этого сжатого языка сопровождается „рассуждениями“ особого типа, принадлежащими к так называемой *Метаматематике*. Эта дисциплина, абстрагируясь полностью от всякого значения, которое могло бы первоначально приписываться словам или фразам формализованных математических текстов, рассматривает эти тексты как особые простые объекты, как собрания некоторых заранее данных объектов, для которых важен лишь порядок их расположения. И как трактат по химии заранее объявляет результат эксперимента, производимого при данных условиях, так и метаматематические „рассуждения“ будут обычно устанавливать, что после некоторой последовательности операций над текстом данного типа окончательный текст будет текстом другого данного типа. В простейших случаях такие утверждения, по правде говоря, являются чистыми трюизмами (их можно было бы сравнить, например, со следующим утверждением: „Когда в мешке с шарами, содержащем черные шары и шары белые, заменят все черные шары белыми, в мешке останутся только белые шары“; ср. стр. 34). Но очень скоро (ср. стр. 37—38) мы встречаем примеры, в которых аргументация принимает типично математический характер, с преимущественным употреблением произвольных целых чисел и рассуждений по индукции. Если выше мы устранили возражение против употребления нумерации при описании формализованного языка, то теперь мы не можем более отрицать опасность логической ошибки, поскольку теперь как будто с самого начала используются все ресурсы арифметики и в то же время предполагается изложить, между прочим, ее основания. На это некоторые находят возможным отвечать, что в рассуждениях такого рода мы лишь описываем операции, поддающиеся выполнению и контролю, и что по этой причине мы почерпываем в этих рассуждениях убеждение другого порядка, чем то, которое мы приписываем математике в собственном смысле. Проще, по-видимому, сказать, что *можно было бы* обойтись без метаматематических рассуждений, если бы формализованная математика была действительно записана: вместо использования „дедуктивных критериев“ мы каждый раз вновь начинали бы последовательности операций, которые мы теперь хотим сократить тем, что предсказываем их результат. Но формализованная математика не может быть записана вся полностью, и потому в конце концов приходится питать доверие к тому, что можно назвать здравым смыслом математика, — доверие, аналогичное тому, которое бухгалтер и инженер, не подозревая о существовании аксиом Пеано, питают к формуле или численной таблице и которое в конечном счете основано на том, что оно никогда не было подорвано фактами.

Итак, мы очень скоро покинем формализованную математику, но тем не менее будем заботиться о том, чтобы отмечать дорогу, по которой к ней можно вернуться. Льготы, приносимые первыми же „вольностями речи“ такого рода, позволят нам написать остальную часть Трактата (и, в частности, сводку результатов Книги I) так, как пишутся на практике все математические тексты, т. е. отчасти обычным языком, отчасти с помощью формул, составляющих частичные форма-

лизации, специальные и неполные, из которых алгебраическое исчисление может служить наиболее известным примером. Часто даже мы будем пользоваться обычным языком еще более смело, с произвольно вводимыми вольностями речи, с полным опущением мест, относительно которых предполагается, что мало-мальски искушенный читатель способен их легко восстановить, с указаниями, не переводимыми на формализованный язык и служащими для облегчения этого восстановительного процесса. Другие места, равно непереводимые, будут содержать комментарии, назначение которых сделать более ясным развитие идей, с обращением в случае необходимости к интуиции читателя; использование риторических средств становится поэтому законным, лишь бы оставалась неизменной возможность формализации текста. Первые примеры такого стиля будут даны уже в этой Книге Трактата, в гл. III, излагающей теорию целых и кардинальных чисел.

Итак, написанный по аксиоматическому методу и сохраняющий всюду в виду, как некий горизонт, возможность полной формализации, наш Трактат претендует на полную строгость — претензия, которую не опровергают ни изложенные выше соображения, ни списки *опечаток*, с помощью которых мы исправляли и будем исправлять ошибки, время от времени вкрадывающиеся в текст. Благодаря тому, что мы постоянно стараемся держаться настолько близко к формализованному тексту, насколько это представляется возможным без невыносимых длиннот, проверка в принципе легка; ошибки (неизбежные при подобном предприятии) можно обнаружить без больших затрат времени, и риск, что они сделают недействительными главу или целую Книгу Трактата, остается весьма незначительным.

В том же реалистическом духе мы рассматриваем здесь вопрос о непротиворечивости — один из вопросов, наиболее занимающих современных логиков и в той или иной мере встающих уже с самого начала при создании формализованных языков (см. „Исторический очерк"). Та или иная математическая теория называется противоречивой, если какая-либо теорема доказывается в ней вместе со своим отрицанием. Тогда из обычных правил умозаключения, лежащих в основе правил синтаксиса формализованных языков, можно вывести следствие, что любая теорема одновременно и истинна, и ложна в этой теории, теряющей тем самым всякий интерес. Если, таким образом, мы нечаянно придем к противоречию, то мы не можем оставить его существовать далее, не обесценивая теории, в которой оно возникло.

Можно ли приобрести уверенность, что этого никогда не случится? Не пускаясь по этому поводу в выходящие за пределы нашей компетенции споры о самом понятии уверенности, заметим, что метаматематика может попытаться рассмотреть проблемы непротиворечивости своими собственными методами. В самом деле, сказать, что некото-

рая теория противоречива, сводится к тому, чтобы сказать, что она содержит правильное формализованное доказательство, оканчивающееся заключением $0 \neq 0$. Но метаматематика может пытаться с помощью способов рассуждения, заимствованных у математики, изучить строение этого формализованного текста, предполагаемого записанным, и в итоге ухитриться „доказать" невозможность такого текста. В самом деле, такие „доказательства" были даны для некоторых частных формализованных языков, менее богатых, чем тот, который мы хотим ввести, но достаточно богатых для того, чтобы на них можно было записать значительную часть классической математики. Можно спросить, правда, что́ именно „доказывается" таким путем; ведь если бы математика была противоречива, то некоторые ее применения к материальным объектам, и в частности к формализованным текстам, рисковали бы стать иллюзорными. Чтобы избежать этой дилеммы, было бы необходимо, чтобы непротиворечивость формализованного языка можно было „доказать" посредством рассуждений, формализуемых в языке, менее богатом и тем самым более достойном доверия. Но знаменитая теорема метаматематики, принадлежащая Гёделю[1]), говорит, что это невозможно для языка того типа, который мы хотим описать, т. е. для языка, достаточно богатого аксиомами, чтобы допускать формулировку результатов классической арифметики.

С другой стороны, при доказательствах „относительной" непротиворечивости (т. е. при доказательствах, устанавливающих непротиворечивость данной теории в предположении непротиворечивости другой теории, например Теории множеств) метаматематическая часть рассуждения (ср. гл. I, § 2, n°4) настолько проста, что даже не представляется возможным подвергнуть ее сомнению, не отказываясь при этом от всякого рационального употребления наших умственных способностей. Так как ныне различные математические теории привязываются в отношении логики к Теории множеств, то отсюда следует, что всякое противоречие, встреченное в одной из этих теорий, дало бы повод противоречию в самой Теории множеств. Это, конечно, не есть аргумент, позволяющий заключить о непротиворечивости Теории множеств. Однако за 40 лет с тех пор, как сформулировали с достаточной точностью аксиомы Теории множеств и стали извлекать из них следствия в самых разнообразных областях математики, еще ни разу не встретилось противоречие, и можно с основанием надеяться, что оно и не появится никогда.

Если бы дело и сложилось иначе, то, конечно, замеченное противоречие было бы внутренне присуще самим принципам, положенным в основание Теории множеств, а потому нужно было бы видоизменить эти принципы, стараясь по возможности не ставить под угрозу те части математики, которыми мы наиболее дорожим. И ясно, достичь этого тем более легко, что применение аксиоматического

[1]) См. Исторический очерк, стр. 347. — *Прим. ред.*

метода и формализованного языка позволит формулировать эти принципы более четко и отделять от них следствия более определенно. Впрочем, приблизительно это и произошло недавно, когда устранили „парадоксы“ Теории множеств принятием формализованного языка, по существу эквивалентного с описываемым здесь нами. Подобную ревизию следует предпринять и в случае, когда этот язык окажется в свою очередь противоречивым.

Итак, мы верим, что математике суждено выжить и что никогда не произойдет крушения главных частей этого величественного здания вследствие внезапного выявления противоречия; но мы не утверждаем, что это мнение основано на чем-либо, кроме опыта. Этого мало, скажут некоторые. Но вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение своей науки; это дает им право смотреть в грядущее спокойно.

ГЛАВА I

ОПИСАНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

§ 1. Термы и соотношения

1. Знаки и знакосочетания

Знаки любой математической теории $\mathcal{T}$ [1]) таковы:

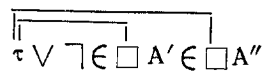
1° *Логические знаки* [2]): $\square$, τ, $\vee$, $\urcorner$.
2° Буквы.

Мы понимаем под этим прописные и строчные латинские буквы, снабжаемые штрихами. Так, A, A′, A″, A‴, ... — буквы. Во всяком месте текста можно ввести буквы, отличные от встречавшихся в предыдущих рассуждениях.

3° *Специальные знаки*, зависящие от рассматриваемой теории.

В теории множеств мы пользуемся только тремя специальными знаками: $=$, $\in$, $\supset$.

Знакосочетание теории $\mathcal{T}$ есть последовательность знаков этой теории, написанных рядом друг с другом, причем некоторые знаки, отличные от букв, могут быть соединены линиями, идущими над строкой и называемыми *связями*. °Например, в теории множеств, где $\in$ есть специальный знак,



есть знакосочетание.$_{o}$

Употребление одних только знакосочетаний привело бы к непреодолимым типографским и умственным затруднениям. Поэтому в обычных текстах используются сокращающие символы (особенно слова обычного языка), не принадлежащие к формальной математике. Введение этих символов составляет цель *определений*. Их употребление *теоретически не является необходимым* и часто дает повод к путанице, избегать которую позволяет лишь некоторый опыт.

Примеры. 1) Знакосочетание $\vee \urcorner$ изображается символом $\Rightarrow$.

---

[1]) Смысл последнего выражения будет постепенно уточняться на протяжении всей главы.

[2]) Об интуитивном смысле этих знаков см. п° 3, „Замечание“.

2) Следующие символы изображают знакосочетания (притом весьма длинные):

„3 и 4",
$\varnothing$,
N,
Z,
„числовая прямая",
„функция Г",
$f \circ g$,
$\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$,
$1 \in 2$,
„всякое конечное тело коммутативно",
„нули функции $\zeta(s)$, отличные от $-2, -4, -6, \ldots$, лежат на прямой $\mathrm{Re}(s) = 1/2$".

Вообще говоря, символ, служащий для изображения знакосочетания, содержит все встречающиеся в нем буквы. Иногда, однако, это правило можно нарушить без большой опасности впасть в путаницу. °Например, символ „замыкание множества E" изображает знакосочетание, которое, содержа букву E, содержит также букву, изображающую множество окружений равномерной структуры множества E. Напротив, $\int_0^1 f(x)\,dx$ изображает знакосочетание, в котором буква x (равно как и буква d) не содержится. Знакосочетания, изображаемые символами N, Z, „функция Г", не содержат никаких букв.₀

Всякая *математическая теория* (или просто *теория*) содержит правила, позволяющие сказать, что некоторые знакосочетания являются *термами*, а некоторые — *соотношениями* теории, а также правила, позволяющие сказать, что некоторые знакосочетания являются *теоремами* теории.

Описание этих правил, которое будет дано в этой главе, *не принадлежит* к формальной математике; в него входят знакосочетания, более или менее неопределенные, например неопределенные буквы. Чтобы облегчить изложение, удобно обозначать эти знакосочетания возможно менее громоздкими символами. А именно мы будем пользоваться комбинациями знаков (какой-либо математической теории), полужирных курсивных букв (быть может, снабженных индексами или штрихами) и особых символов, примеры которых мы приведем. Так как мы хотим лишь избежать многословия (см. сноску в § 3, n° 1, стр. 44), мы не будем излагать строгих и общих правил относительно употребления этих символов. Читатель без труда сможет воспроизвести в каждом отдельном случае знакосочетание, о котором идет речь. Допуская вольность речи, мы часто будем говорить, что используемые символы *суть* знакосочетания, вместо того чтобы сказать, что они *обозначают* знакосочетания. Таким образом, при нижеследующем изложении правил такие выражения, как „знакосочетание $\boldsymbol{A}$" или „буква $\boldsymbol{x}$", нужно было бы заменять выражениями „знакосочетание, обозначенное через $\boldsymbol{A}$", или „буква, обозначенная через $\boldsymbol{x}$".

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — знакосочетания. Обозначим через $\boldsymbol{AB}$ знакосочетание, получаемое при записи знакосочетания $\boldsymbol{B}$ справа от знакосочетания $\boldsymbol{A}$. Обозначим через $\vee \boldsymbol{A} \neg \boldsymbol{B}$ знакосочетание, получаемое при записи слева направо знака $\vee$, знакосочетания $\boldsymbol{A}$, знака $\neg$, знакосочетания $\boldsymbol{B}$ и т. д.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — знакосочетание, а $\boldsymbol{x}$ — буква. Обозначим через $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A})$ знакосочетание, получаемое следующим образом: мы пишем знакосочетание $\tau\boldsymbol{A}$, соединяем связью каждый экземпляр буквы $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{A}$ со знаком τ, написанным слева от $\boldsymbol{A}$, и заменяем букву $\boldsymbol{x}$, каждый ее экземпляр, символом $\square$. Таким образом, знакосочетание, обозначаемое символом $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A})$, *не содержит* $\boldsymbol{x}$.

Пример. Символ $\tau_x(\in xy)$ изображает знакосочетание $\tau \in \square y$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — знакосочетания, а $\boldsymbol{x}$ — буква. Знакосочетание, получаемое при замене буквы $\boldsymbol{x}$, каждого ее экземпляра в $\boldsymbol{A}$, знакосочетанием $\boldsymbol{B}$, обозначается через $(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}$ (читать: „$\boldsymbol{B}$ замещает $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{A}$"). Если $\boldsymbol{x}$ не встречается в $\boldsymbol{A}$, то $(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}$ тождественно с $\boldsymbol{A}$; в частности, $(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x})\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A})$ тождественно с $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A})$.

Пример. Если в знакосочетании

$$\vee \in xy = xx$$

заменить букву x символом $\square$ в каждом месте ее появления, то получим знакосочетание

$$\vee \in \square y = \square\square.$$

Если нам дано знакосочетание $\boldsymbol{A}$ и мы особенно интересуемся какой-нибудь буквой $\boldsymbol{x}$ или двумя разными буквами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ (которые могут встречаться или не встречаться в $\boldsymbol{A}$), мы часто будем писать $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{x}\}$ или $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$. В этом случае мы пишем $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{B}\}$ вместо $(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}$. Символ $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ обозначает знакосочетание, получаемое при *одновременной* замене буквы $\boldsymbol{x}$ знакосочетанием $\boldsymbol{B}$ и буквы $\boldsymbol{y}$ знакосочетанием $\boldsymbol{C}$ во всех местах их появления в $\boldsymbol{A}$ (заметим, что $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ могут содержаться в $\boldsymbol{B}$ и в $\boldsymbol{C}$); если $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{y}'$ — буквы, отличные от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и друг от друга и не встречающиеся ни в $\boldsymbol{A}$, ни в $\boldsymbol{B}$, ни в $\boldsymbol{C}$, то $\boldsymbol{A}\{\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\}$ есть не что иное, как $(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{C}|\boldsymbol{y}')(\boldsymbol{x}'|\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'|\boldsymbol{y})\boldsymbol{A}$.

Замечание. Когда мы даем определение сокращающего символа Σ для изображения некоторого знакосочетания, то соглашаемся (обычно не оговаривая особо), чтобы знакосочетание, получаемое подстановкой знакосочетания $\boldsymbol{B}$ в исходное знакосочетание вместо некоторой буквы $\boldsymbol{x}$, изображалось символом, получаемым заменой буквы $\boldsymbol{x}$ в Σ знакосочетанием $\boldsymbol{B}$ (чаще же сокращающим символом, изображающим знакосочетание $\boldsymbol{B}$).

°Например, уточнив, какое знакосочетание изображает символ $\mathrm{E} \otimes \mathrm{F}$, где E и F — буквы (знакосочетание, которое, впрочем, содержит и другие буквы, кроме E и F), мы будем пользоваться без объяснений символом $\mathbf{Z} \otimes \mathrm{F}$.₀

Это правило может привести к путанице, избегаемой различными типографскими приемами, из которых наиболее частый состоит в том, что $\boldsymbol{x}$ заменяется символом $(\boldsymbol{B})$, а не символом $\boldsymbol{B}$.

°Например, $\mathrm{M} \cap \mathrm{N}$ обозначает знакосочетание, содержащее букву N. Если вместо N подставить знакосочетание, изображаемое символом $\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}$, то получится знакосочетание, которое можно обозначить символом $\mathrm{M} \cap (\mathrm{P} \cup \mathrm{Q})$.₀

2. Критерии подстановки

Формальная математика состоит только из написанных явным образом знакосочетаний. Однако даже при употреблении сокращающих символов построение математики строго в соответствии с этим принципом привело бы к крайне длинным рассуждениям. Поэтому мы установим в этой Книге Трактата *критерии*, которые будут касаться неопределенных знакосочетаний и каждый из которых раз навсегда опишет окончательный результат определенной последовательности манипуляций над этими знакосочетаниями. Эти критерии, стало быть, не являются теоретически необходимыми; их обоснование относится к *метаматематике*.

Построение метаматематики практически само делает необходимым употребление сокращающих символов, часть из которых уже была указана. Большинство этих символов будет использоваться также и в математике.

Мы будем пользоваться следующими критериями, называемыми *критериями подстановки*:

CS1. *Пусть* A *и* B *— знакосочетание,* x *и* x' *— буквы. Если* x' *не встречается в* A, *то* $(B \mid x) A$ *тождественно с* $(B \mid x')(x' \mid x) A$.

CS2. *Пусть* A, B *и* C *— знакосочетание,* x *и* y *— разные буквы* [1]. *Если* y *не встречается в* B, *то* $(B \mid x)(C \mid y) A$ *тождественно с* $(C' \mid y)(B \mid x) A$, *где* C' *— знакосочетание* $(B \mid x) C$.

CS3. *Пусть* A *— знакосочетание,* x *и* x' *— буквы. Если* x' *не встречается в* A, *то* $\tau_x(A)$ *тождественно с* $\tau_{x'}(A')$, *где* A' *— знакосочетание* $(x' \mid x) A$.

CS4. *Пусть* A *и* B *— знакосочетания,* x *и* y *— разные буквы. Если* x *не встречается в* B, *то* $(B \mid y) \tau_x(A)$ *тождественно с* $\tau_x(A')$, *где* A' *— знакосочетание* $(B \mid y) A$.

CS5. *Пусть* A, B, C *— знакосочетания,* x *— буква. Знакосочетания* $(C \mid x)(\neg A)$, $(C \mid x)(\vee AB)$, $(C \mid x) \Rightarrow (AB)$, $(C \mid x)(sAB)$ *(*s *— специальный знак) тождественны соответственно с* $\neg A'$, $\vee A'B'$, $\Rightarrow A'B'$, $sA'B'$, *где* A', B' *суть соответственно* $(C \mid x) A$, $(C \mid x) B$.

Объясним, например, принцип проверки критерия CS2. Сравним операцию перехода от A к $(B \mid x)(C \mid y) A$ с операцией перехода от A к $(C' \mid y)(B \mid x) A$. При обеих операциях не изменяется ни один знак, содержащийся в A и отличный от x и y. На каждое место, где x встречается в A, мы должны подставить B вместо x как при первой, так и при второй операции: это очевидно для первой, а для второй это вытекает из того, что y не встречается в B. Наконец, на каждом месте, где y встречается в A, первая операция состоит в том, чтобы

[1] В соответствии с тем, что отмечалось в n° 1, фраза „x и y — разные буквы“ представляет собой вольность речи для того, чтобы сказать: „x и y *обозначают* разные буквы в рассматриваемых нами знакосочетаниях“.

подставить C вместо y, а затем B — вместо x на каждое место, где x встречается в C; но ясно, что это сводится к подстановке вместо y формулы $(B \mid x) C$ на каждое место, где y встречается в A.

3. Формативные конструкции

Среди специальных знаков всякой теории одни будут называться *реляционными*, а другие — *субстантивными*. С другой стороны, каждому специальному знаку приписывается целое число, называемое его *весом* (практически всегда число 2).

Знакосочетание называется знакосочетанием *первого рода*, если оно начинается со знака τ или с субстантивного знака или сводится к одной букве; в противном случае знакосочетание называется знакосочетанием *второго рода*.

Формативная конструкция теории $\mathcal{T}$ есть последовательность знакосочетаний, обладающая следующим свойством: для каждого знакосочетания A из последовательности выполняется одно из указанных ниже условий:

а) A есть буква;

б) в последовательности существует знакосочетание второго рода B, предшествующее A, такое, что A есть $\neg B$;

в) существуют два знакосочетания второго рода B и C, предшествующие A (различные или нет), такие, что A есть $\vee BC$;

г) существуют знакосочетание второго рода B, предшествующее A, и буква x, такие, что A есть $\tau_x(B)$;

д) существует специальный знак s веса n [1]) из $\mathcal{T}$ и n знакосочетаний первого рода $A_1, A_2, \ldots, A_n$, предшествующие A, такие, что A есть $sA_1A_2 \ldots A_n$.

Мы называем *термами* (соответственно *соотношениями*) теории $\mathcal{T}$ знакосочетания первого рода (соответственно второго рода), *встречающиеся в формативных конструкциях теории* $\mathcal{T}$.

Пример. °В теории множеств, в которой $\in$ есть реляционный знак веса 2, следующая последовательность является формативной конструкцией:

$$A$$
$$A'$$
$$A''$$
$$\in AA'$$
$$\in AA''$$
$$\neg \in AA'$$
$$\vee \neg \in AA' \in AA''$$
$$\tau \vee \neg \in \square A' \in \square A''.$$

[1]) Как говорилось выше, при построении современных математических теорий можно было бы ограничиться рассмотрением только специальных знаков веса 2 и, следовательно, не употреблять выражения „целое число n“ в определении формативной конструкции.

Таким образом, знакосочетание, приведенное в качестве примера в n° 1, есть терм теории множеств.$_\circ$

Замечание. Интуитивно, термы — это знакосочетания, изображающие *объекты* (*предметы*), а соотношения — формулы, изображающие *утверждения*, которые можно делать об этих предметах. Условие а) означает, что буквы изображают предметы. Условие б) означает, что если B — утверждение, то $\neg B$, так называемое *отрицание* этого утверждения B, также есть утверждение (читаемое: „не B"). Условие в) означает, что если B и C — утверждения, то $\vee BC$, так называемая *дизъюнкция* B и C, также есть утверждение (читаемое: „B или C"); поэтому $\Rightarrow BC$ есть утверждение (читаемое: „не B или C" или „B имплицирует C", или „B влечет C"). Условие г) означает, что если B — утверждение и x — буква, то $\tau_x(B)$ есть предмет; будем рассматривать утверждение B как утверждение, выражающее некоторое свойство предмета x, тогда, если существует предмет, обладающий этим свойством, знакосочетание $\tau_x(B)$ изображает привилегированный объект, обладающий этим свойством; в противном случае $\tau_x(B)$ изображает предмет, о котором нельзя ничего сказать. Наконец, условие д) означает, что если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — предметы, а s — реляционный (соответственно, субстантивный) знак веса n, то $sA_1A_2 \ldots A_n$ есть утверждение, относящееся к предметам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (соответственно, предмет, зависящий от предметов $A_1, A_2, \ldots, A_n$).

Примеры. Символы $\varnothing$, N, „числовая прямая", „функция Г", $f \circ g$ изображают термы. Символы $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $1 \in 2$, „всякое конечное тело коммутативно", „нули функции $\zeta(s)$, отличные от $-2, -4, -6, \ldots$, лежат на прямой $\operatorname{Re}(s) = 1/2$" изображают соотношения. Символ „3 и 4" не изображает ни терма, ни соотношения.

Начальный знак соотношения есть $\vee$, $\neg$ или реляционный знак; начальный знак терма есть τ или субстантивный знак, если только терм не сводится к одной букве. В самом деле, это утверждение о термах вытекает из того, что терм есть знакосочетание первого рода. Если A — соотношение, то A встречается в какой-нибудь формативной конструкции, не является буквой и не начинается с τ; следовательно, возможны три случая: 1) впереди A имеется такое знакосочетание B, что A есть $\neg B$; 2) впереди A имеются такие два знакосочетания B и C, что A есть $\vee BC$; 3) впереди A имеются такие знакосочетания $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что A есть $sA_1A_2 \ldots A_n$, где s — реляционный знак.

4. Формативные критерии

CF1. *Если A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$, то $\vee AB$ есть соотношение теории $\mathcal{T}$.*

В самом деле, рассмотрим две формативные конструкции теории $\mathcal{T}$, одна из которых содержит A, а другая содержит B. Рассмотрим последовательность знакосочетаний, получаемую при записи сначала всех знакосочетаний первой конструкции, затем знакосочетаний второй, а затем знакосочетания $\vee AB$. Так как A и B — знакосочетания второго рода, то сразу же видно, что эта последовательность есть формативная конструкция теории $\mathcal{T}$. Знакосочетание $\vee AB$ — второго рода; следовательно, оно является соотношением теории $\mathcal{T}$.

Аналогичным образом устанавливаются три следующих критерия:

CF2. *Если A — соотношение теории $\mathcal{T}$, то $\neg A$ есть соотношение теории $\mathcal{T}$.*

CF3. *Если A — соотношение теории $\mathcal{T}$, а x — буква, то $\tau_x(A)$ есть терм теории $\mathcal{T}$.*

CF4. *Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — терм теории $\mathcal{T}$, а s — реляционный (соответственно субстантивный) знак веса n теории $\mathcal{T}$, то $sA_1A_2 \ldots A_n$ есть соотношение теории $\mathcal{T}$ (соответственно терм теории $\mathcal{T}$).*

Эти критерии сразу же влекут следующий:

CF5. *Если A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$, то $\Rightarrow AB$ есть соотношение теории $\mathcal{T}$.*

CF6. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формативная конструкция теории $\mathcal{T}$, а x и y — буквы. Предположим, что y не встречается в этих A_i. Тогда $(y|x)A_1, (y|x)A_2, \ldots, (y|x)A_n$ есть формативная конструкция теории $\mathcal{T}$.*

В самом деле, пусть A_i' — знакосочетание $(y|x)A_i$. Если A_i — буква, то и A_i' — буква. Если A_i имеет вид $\neg A_j$, где A_j — знакосочетание второго рода, предшествующее A_i в конструкции, то A_i' тождественно с $\neg A_j'$, согласно CS5, и A_j' есть знакосочетание второго рода. Аналогичным образом рассуждаем, если A_i имеет вид $\vee A_jA_k$ или $sA_{j_1}A_{j_2} \ldots A_{j_m}$, где s — специальный знак теории $\mathcal{T}$. Если, наконец, A_i имеет вид $\tau_z(A_j)$, где A_j — знакосочетание второго рода, предшествующее A_i в конструкции, то возможно несколько случаев:

а) z — буква, отличная от x и y; тогда A_i' тождественно с $\tau_z(A_j')$, согласно CS4, и A_j' есть знакосочетание второго рода;

б) z тождественно с x; тогда A_i не содержит x, и, следовательно, A_i' тождественно с A_i, т. е. с $\tau_x(A_j)$; так как y не встречается в A_j, то $\tau_x(A_j)$ тождественно с $\tau_y(A_j')$, согласно CS3;

в) z тождественно с y; тогда A_i есть знакосочетание τA_j, потому что y не встречается в A_j; следовательно, A_i' есть знакосочетание $\tau A_j'$, т. е. $\tau_u(A_j')$, где u — буква, не встречающаяся в A_j'.

CF7. *Пусть A — соотношение (соответственно терм) теории $\mathcal{T}$, а x и y — буквы. Тогда $(y|x)A$ есть соотношение (соответственно терм) теории $\mathcal{T}$.*

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формативная конструкция, в которой встречается A. Покажем шаг за шагом, что если A_i — соотношение (соответственно терм), то знакосочетание $(y|x)A_i$, которое мы обозначим через A_i', есть соотношение (соответственно терм). Предположим, что мы установили это для $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$, и установим это для A_i. Если A_i — буква, то и A_i' — буква. Если впереди A_i в конструкции имеется такое соотношение A_j, что A_i есть $\neg A_j$, то A_i' тождественно с $\neg A_j'$, согласно CS5, а $\neg A_j'$ есть соотношение, согласно CF2. Аналогичным образом рассуждаем, если впереди A_i имеются такие соотношения A_j, A_k, что A_i есть $\vee A_jA_k$, или такие термы $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}$, что A_i есть $sA_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_m}$, где s — специальный знак теории $\mathcal{T}$ веса m. Если впереди A_i имеется такое соотношение A_j, что A_i есть $\tau_z(A_j)$, то возможны несколько случаев:

а) z отлично от x и y; тогда A_i' тождественно с $\tau_z(A_j')$, согласно CS4, и мы уже знаем, что A_j' — соотношение; следовательно, A_i' есть терм, согласно CF3;

б) z тождественно с x; тогда A_i не содержит x, и, следовательно, A_i' тождественно с A_i, а потому является термом;

в) z тождественно с y. Пусть тогда u — буква, отличная от x и y и не встречающаяся в $A_1, A_2, \ldots, A_j$; согласно CF6, последовательность знакосочетаний $(u|y)A_1, \ldots, (u|y)A_j$, которую мы обозначим через $A_1'', \ldots, A_j''$, составляет формативную конструкцию теории $\mathcal{T}$; так как y не встречается больше в этой новой конструкции, то $(y|x)A_1'', \ldots, (y|x)A_j''$ есть формативная конструкция в силу CF6, так что $(y|x)A_j''$ есть соотношение теории $\mathcal{T}$; следовательно, $\tau_u((y|x)A_j'')$ есть терм теории $\mathcal{T}$. Но этот терм тождествен с $(y|x)\tau_u(A_j'')$, согласно CS4, а значит, и с $(y|x)\tau_y(A_j)$, согласно CS3, а значит, и с A_i'.

CF8. *Пусть A — соотношение (соответственно терм) теории $\mathcal{T}$, x — буква и T — терм этой теории. Тогда $(T|x)A$ есть соотношение (соответственно терм) теории $\mathcal{T}$.*

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формативная конструкция, в которой встречается A. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_p$ — различные буквы, встречающиеся в T. Поставим в соответствие каждой букве x_i букву x_i', отличную от $x_1, \ldots, x_p$ и от букв, встречающихся в $A_1, \ldots, A_n$, причем буквы $x_1', \ldots, x_p'$ должны быть попарно различны. Знакосочетания $(x_1'|x_1)(x_2'|x_2)\ldots(x_p'|x_p)T$ есть терм T', согласно CF7, и $(T|x)A$ тождественно с $(x_1|x_1')(x_2|x_2')\ldots(x_p|x_p')(T'|x)A$ ввиду CS1. Поэтому достаточно показать, что $(T'|x)A$ есть соотношение (соответственно терм); иначе говоря, отныне можно предполагать, что буквы, встречающиеся в T, не встречаются в $A_1, \ldots, A_n$. Покажем теперь постепенно, что если A_i — соотношение (соответственно терм), то знакосочетание $(T|x)A_i$, которое мы обозначим через A_i', есть соотношение (соответственно терм). Предположим, что это установлено для $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$, и установим это для A_i. Если A_i — буква, то A_i' есть либо эта буква, либо T, а следовательно, терм. Если A_i имеет вид $\neg A_j$, где A_j — соотношение, предшествующее A_i в конструкции, то A_i' тождественно с $\neg A_j'$, согласно CS5, и мы уже знаем, что A_j' — соотношение; следовательно, A_i' есть соотношение, согласно CF2. Аналогичным образом рассуждаем, если A_i имеет вид $\vee A_jA_k$ или $sA_{j_1}\ldots A_{j_m}$. Если, наконец, A_i имеет вид $\tau_z(A_j)$, где A_j — соотношение, предшествующее A_i в конструкции, то возможны несколько случаев:

а) z отлична от x и от букв, встречающихся в T; тогда A_i' тождественно с $\tau_z(A_j')$, согласно CS4, и мы знаем уже, что A_j' — соотношение; следовательно, A_i' есть терм, согласно CF3;

б) z тождественна с x; тогда A_i не содержит x, и, следовательно, A_i' тождественно с A_i, а потому является термом;

в) z встречается в T; тогда z не встречается в A_j, так что A_i тождественно с τA_j, а значит, и с $\tau A_j'$; но мы уже знаем, что A_j' — соотношение, а $\tau A_j'$ тождественно с $\tau_u(A_j')$, где u — буква, не встречающаяся в A_j'; отсюда следует, что A_i' есть терм, согласно критерию CF3.

Интуитивно, если A — соотношение теории $\mathcal{T}$, которое мы можем рассматривать как выражающее некоторое свойство объекта x, то утверждать $(B|x)A$ — это значит сказать, что объект B обладает этим свойством. Если A — терм теории $\mathcal{T}$, то он изображает объект, зависящий некоторым образом от объекта, обозначенного символом x; терм $(B|x)A$ изображает то, чем становится объект A, когда в качестве x берется B.

Упражнения

1) Пусть $\mathcal{T}$ — теория без специальных знаков. Ни одно знакосочетание теории $\mathcal{T}$ не является соотношением. Единственные знакосочетания теории $\mathcal{T}$, являющиеся термами, суть знакосочетания, сводящиеся к одной букве.

2) Пусть A — терм или соотношение теории $\mathcal{T}$. Показать, что каждый знак $\square$, если он имеется в A, связан с одним и только одним знаком τ, расположенным слева от него. Показать, что всякий знак τ, если он имеется в A, либо не связан с другими знаками, либо связан с некоторыми знаками $\square$, расположенными справа от него. Ни один другой знак не связан ни с какими знаками.

3) Пусть A — терм или соотношение теории $\mathcal{T}$. Показать, что каждый специальный знак, если он имеется в A, предшествует некоторому знаку $\square$, или знаку τ, или букве, или субстантивному знаку.

¶ 4) Пусть A — терм или соотношение теории $\mathcal{T}$, а B — знакосочетание этой теории. Показать, что AB не есть ни терм, ни соотношение теории $\mathcal{T}$. (Рассуждать индуктивно по числу знаков в A.)

5) Пусть A — знакосочетание теории $\mathcal{T}$, а x — буква. Если $\tau_x(A)$ — терм теории $\mathcal{T}$, то A — соотношение теории $\mathcal{T}$.

6) Пусть A и B — знакосочетания теории $\mathcal{T}$. Если A и $\Rightarrow AB$ — соотношения теории $\mathcal{T}$, то и B — соотношение этой теории (использовать упр. 4).

§ 2. Теоремы

Чтобы облегчить чтение дальнейшего, мы будем писать отныне в случае, когда A *— соотношение,* „не (A)“ *вместо* $\neg A$. *Если* A *и* B *— соотношения, мы будем писать* „(A) или (B)“ *вместо* $\vee AB$ *и* $(A) \Rightarrow (B)$ *вместо* $\Rightarrow AB$. *Иногда мы будем опускать скобки. Читатель сможет без труда определить в каждом случае, о каком знакосочетании идет речь.*

1. Аксиомы

Задание специальных знаков определяет термы и соотношения теории $\mathcal{T}$. Чтобы завершить построение теории $\mathcal{T}$, делают следующее:

1° Записывают сначала некоторое количество соотношений теории $\mathcal{T}$; эти соотношения называются *явными аксиомами* теории $\mathcal{T}$; буквы, встречающиеся в явных аксиомах — *константами* теории $\mathcal{T}$.

2° Задают одно или несколько правил[1]), называемых *схемами*[2]) теории $\mathcal{T}$, которые должны обладать следующими особенностями: а) применение каждого такого правила $\mathfrak{R}$ дает соотношение теории $\mathcal{T}$; б) если T—терм теории $\mathcal{T}$, x—буква, R—соотношение теории $\mathcal{T}$, построенное применением схемы $\mathfrak{R}$, то соотношение $(T|x)R$ также может быть построено применением схемы $\mathfrak{R}$.

Во всех случаях, которые мы будем рассматривать, проверка этих условий будет легка.

Всякое соотношение, образованное применением какой-либо схемы теории $\mathcal{T}$, называется *неявной аксиомой* теории $\mathcal{T}$.

Интуитивно аксиомы изображают либо очевидные утверждения, либо гипотезы, из которых собираются извлечь следствия; константы изображают вполне определенные предметы, для которых свойства, выражаемые явными аксиомами, предполагаются истинными. Напротив, если буква x не является константой, то она изображает предмет совершенно неопределенный; если некоторое свойство предмета x предполагается верным вследствие аксиомы, то эта аксиома необходимо является неявной, так что данное свойство также истинно для любого предмета T.

[1]) Эти правила мы будем выражать, используя для сокращения символы, о которых мы говорили в § 1, n°1 (а именно полужирные курсивные буквы); однако при формулировке правил было бы нетрудно обойтись совершенно без этих символов (см. § 3, n°1, сноску на стр. 44).

[2]) Схемы называются также *схемами аксиом* (в дальнейшем автор употребляет иногда именно этот последний термин). — *Прим. ред.*

2. Доказательства

Всякий *доказательный текст* теории $\mathcal{T}$ состоит из:

1° вспомогательной формативной конструкции из соотношений и термов теории $\mathcal{T}$;

2° *доказательства* теории $\mathcal{T}$, т. е. последовательности соотношений теории $\mathcal{T}$, встречающихся во вспомогательной формативной конструкции, таких, что для каждого соотношения R этой последовательности выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

$а_1$) R есть явная аксиома теории $\mathcal{T}$;

$а_2$) R получается применением схемы теории $\mathcal{T}$ к термам или соотношениям, встречающимся во вспомогательной формативной конструкции;

б) в упомянутой последовательности существуют два отношения S, T, предшествующие R, такие, что T есть $S \Rightarrow R$.

Теорема теории $\mathcal{T}$ есть соотношение, *встречающееся в какой-нибудь доказательстве теории* $\mathcal{T}$.

Таким образом, это понятие существенно связано с состоянием рассматриваемой теории в тот момент, когда ее описывают: соотношение теории $\mathcal{T}$ *становится* теоремой этой теории тогда, когда его сумели включить в какое-нибудь доказательство теории $\mathcal{T}$.

Не может иметь смысла говорить про соотношение теории $\mathcal{T}$, что оно „не является теоремой этой теории“, если не уточнить, какая стадия развития теории имеется в виду[1]).

Вместо „теорема теории $\mathcal{T}$“ говорят также „соотношение, *истинное* (*верное, справедливое*) в $\mathcal{T}$“ (или „предложение“, „лемма“, „следствие“ и т. д.). Пусть R—соотношение теории $\mathcal{T}$, x—буква, T — терм теории $\mathcal{T}$; если $(T|x)R$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, говорят, что T *удовлетворяет в* $\mathcal{T}$ *соотношению* R (или что T есть некоторое *решение соотношения* R), когда R рассматривается как соотношение по (относительно) x.

В обычной математике чаще всего опускают указание, что выписанные соотношения составляют доказательство.

Соотношение называется *ложным* в $\mathcal{T}$, если его отрицание есть теорема теории $\mathcal{T}$. Говорят, что теория $\mathcal{T}$ *противоречива*, когда можно написать соотношение, одновременно истинное и ложное в $\mathcal{T}$.

Здесь опять-таки идет речь о понятии, относящемся к определенной стадии развития данной теории. Необходимо остерегаться путаницы (к сожалению, внушаемой интуитивным смыслом слова „ложный“), состоящей в том, чтобы думать будто, доказав ложность соотношения R в $\mathcal{T}$, мы тем самым доказали, что R „не является истинным“ в $\mathcal{T}$ (собственно говоря, эта последняя фраза не имеет никакого точного смысла *в математике*, как мы это видели выше).

[1]) Разумеется, возможна и другая точка зрения, предполагающая, что мы понимаем смысл слов „данное соотношение не является теоремой данной теории“ (т. е. не является теоремой *ни на какой* стадии ее развития; иными словами, *никакое* доказательство теории *не содержит* этого соотношения). — *Прим. ред.*

Мы дадим в дальнейшем метаматематические критерии, называемые *дедуктивными критериями*, которые позволят нам сокращать доказательства. Эти критерии мы будем обозначать буквой C с идущим за ней номером.

C1 (*силлогизм*). *Пусть A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$. Если A и $A \Rightarrow B$ — теоремы теории $\mathcal{T}$, то B также теорема теории $\mathcal{T}$.*

В самом деле, пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ есть доказательство теории $\mathcal{T}$, в котором встречается A, и пусть $S_1, S_2, \ldots, S_p$ есть доказательство теории $\mathcal{T}$, в котором встречается $A \Rightarrow B$. Очевидно, что $R_1, R_2, \ldots, R_n, S_1, S_2, \ldots, S_p$ есть доказательство теории $\mathcal{T}$, в котором встречаются A и $A \Rightarrow B$. Следовательно,

$$R_1, R_2, \ldots, R_n, S_1, S_2, \ldots, S_p, B$$

есть доказательство теории $\mathcal{T}$, а это в свою очередь доказывает, что B есть теорема теории $\mathcal{T}$.

3. Подстановки в теорию

Пусть $\mathcal{T}$ — теория, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — ее явные аксиомы, x — буква, T — терм этой теории. Пусть $(T|x)\mathcal{T}$ есть теория, у которой знаки и схемы те же самые, что и у $\mathcal{T}$, и у которой явные аксиомы суть $(T|x)A_1, (T|x)A_2, \ldots, (T|x)A_n$.

C2. *Пусть A — теорема теории $\mathcal{T}$, T — терм теории $\mathcal{T}$, x — буква. Тогда $(T|x)A$ есть теорема теории $(T|x)\mathcal{T}$.*

В самом деле, пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ есть доказательство теории $\mathcal{T}$, в котором встречается A. Рассмотрим последовательность $(T|x)R_1, (T|x)R_2, \ldots, (T|x)R_n$, являющуюся последовательностью соотношений теории $\mathcal{T}$, согласно CF8 (§ 1, n° 4). Мы покажем, что это — доказательство теории $(T|x)\mathcal{T}$; тем самым критерий будет установлен. Если R_k — неявная аксиома теории $\mathcal{T}$, то $(T|x)R_k$ также является неявной аксиомой теории $\mathcal{T}$ (см. n° 1), а следовательно, и теории $(T|x)\mathcal{T}$. Если R_k — явная аксиома теории $\mathcal{T}$, то $(T|x)R_k$ является явной аксиомой теории $(T|x)\mathcal{T}$. Наконец, если перед R_k идут соотношения R_i и R_j, где R_j есть $R_i \Rightarrow R_k$, то перед $(T|x)R_k$ идут $(T|x)R_i$ и $(T|x)R_j$, и это последнее соотношение тождественно с $(T|x)R_i \Rightarrow (T|x)R_k$ (критерий CS5).

C3. *Пусть A — теорема теории $\mathcal{T}$, T — терм теории $\mathcal{T}$ и x — буква, не являющаяся константой теории $\mathcal{T}$. Тогда $(T|x)A$ есть теорема теории $\mathcal{T}$.*

Это следует сразу же из C2, потому что x не встречается в явных аксиомах теории $\mathcal{T}$.

В частности, если $\mathcal{T}$ не содержит явных аксиом или явные аксиомы не содержат букв, то критерий C3 применим без ограничения на букву x.

4. Сравнение теорий

Мы говорим, что теория $\mathcal{T}'$ *сильнее* теории $\mathcal{T}$, или *более сильна, чем* теория $\mathcal{T}$, если все знаки теории $\mathcal{T}$ являются знаками теории $\mathcal{T}'$, все явные аксиомы теории $\mathcal{T}$ являются теоремами теории $\mathcal{T}'$ и схемы теории $\mathcal{T}$ являются схемами теории $\mathcal{T}'$.

C4. *Если теория $\mathcal{T}'$ сильнее теории $\mathcal{T}$, то все теоремы теории $\mathcal{T}$ являются теоремами теории $\mathcal{T}'$.*

Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — доказательство теории $\mathcal{T}$. Мы покажем шаг за шагом, что каждое R_i есть теорема теории $\mathcal{T}'$; тем самым критерий будет установлен. Предположим, что наше утверждение установлено для соотношений, предшествующих R_k, и установим его для R_k. Если R_k — аксиома теории $\mathcal{T}$, то это — теорема теории $\mathcal{T}'$ по определению. Если впереди R_k стоят отношения R_i и $R_i \Rightarrow R_k$, то мы знаем уже, что R_i и $R_i \Rightarrow R_k$ суть теоремы теории $\mathcal{T}'$; следовательно, и R_k есть теорема теории $\mathcal{T}'$, согласно C1.

Если каждая из теорий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ сильнее другой, то говорят, что $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ *эквивалентны*, или *равносильны*. Тогда всякая теорема теории $\mathcal{T}$ есть теорема теории $\mathcal{T}'$, и обратно.

C5. *Пусть $\mathcal{T}$ — теория, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — ее явные аксиомы, $a_1, a_2, \ldots, a_h$ — ее константы, $T_1, T_2, \ldots, T_h$ — ее термы. Предположим, что $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\ldots(T_h|a_h)A_i$ (для $i = 1, 2, \ldots, n$) являются теоремами теории $\mathcal{T}'$, что знаки теории $\mathcal{T}$ являются знаками теории $\mathcal{T}'$ и что схемы теории $\mathcal{T}$ являются схемами теории $\mathcal{T}'$. Тогда если A — теорема теории $\mathcal{T}$, то $(T_1|a_1)\ldots(T_h|a_h)A$ есть теорема теории $\mathcal{T}'$.*

В самом деле, $\mathcal{T}'$ сильнее теории $(T_1|a_1)\ldots(T_h|a_h)\mathcal{T}$, и потому достаточно применить C2 и C4.

Когда с помощью этого метода мы выводим теорему теории $\mathcal{T}'$ из теоремы теории $\mathcal{T}$, мы говорим, что *результаты теории $\mathcal{T}$ применяются в* (или *прилагаются к*) $\mathcal{T}'$. Говоря интуитивно, аксиомы теории $\mathcal{T}$ выражают свойства предметов $a_1, a_2, \ldots, a_h$, соотношение же A выражает свойство, являющееся следствием этих аксиом. Если предметы $T_1, T_2, \ldots, T_h$ обладают в $\mathcal{T}'$ свойствами, выражаемыми аксиомами теории $\mathcal{T}$, то они обладают и свойством A.

°Например, в теории групп $\mathcal{T}$ явные аксиомы содержат две константы: G и μ (группа и закон композиции). В теории множеств $\mathcal{T}'$ определяются два терма: числовая прямая и сложение действительных чисел. Если подставить эти термы соответственно вместо G и μ в явные аксиомы теории $\mathcal{T}$, то мы получим теоремы теории $\mathcal{T}'$. С другой стороны, схемы и знаки теорий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ те же самые. Поэтому мы можем „применять к сложению действительных чисел результаты теории групп". Мы говорим, что построили для теории групп *модель* в теории множеств. (Заметим, что, поскольку теория групп сильнее теории множеств, можно также применять к теории групп результаты теории множеств.)$_\circ$

Замечание. При тех же предположениях, как в С5, если теория $\mathcal{T}$ была бы противоречива, то и теория $\mathcal{T}'$ была бы таковой. В самом деле, если A и „не A“ суть теоремы теории $\mathcal{T}$, то $(T_1|a_1)\ldots(T_h|a_h)A$ и „не $(T_1|a_1)\ldots(T_h|a_h)A$“ суть теоремы теории $\mathcal{T}'$. °Например, если теория групп была бы противоречива, то и теория множеств тоже была бы противоречивой.$_\circ$

Упражнение

Пусть $\mathcal{T}$ — теория, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — ее явные аксиомы, $a_1, a_2, \ldots, a_h$ — ее константы.

а) Пусть $\mathcal{T}'$ — теория, у которой знаки и схемы суть знаки и схемы теории $\mathcal{T}$, а явные аксиомы суть $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Мы скажем, что A_n *не зависит* от других аксиом теории $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T}'$ не эквивалентна $\mathcal{T}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы A_n не было теоремой теории $\mathcal{T}'$.

б) Пусть $\mathcal{T}''$ — теория, у которой знаки и схемы те же, как и у $\mathcal{T}$. Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_h$ — такие термы теории $\mathcal{T}$, что $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\ldots$ $\ldots(T_h|a_h)A_i$ для $i=1, 2, \ldots, n-1$ и „не $(T_1|a_1)(T_2|a_2)\ldots(T_h|a_h)A_n$“ суть теоремы теории $\mathcal{T}''$. Тогда либо A_n не зависит от других аксиом теории $\mathcal{T}$, либо теория $\mathcal{T}''$ противоречива.

§ 3. Логические теории

1. Аксиомы

Мы называем *логической теорией* всякую теорию $\mathcal{T}$, в которой нижеследующие схемы S1 — S4 задают неявные аксиомы [1]).

S1. *Если* A — *соотношение теории* $\mathcal{T}$, *то соотношение* (A или A) $\Rightarrow A$ *есть аксиома теории* $\mathcal{T}$ [2]).

S2. *Если* A *и* B — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *то соотношение* $A \Rightarrow$ (A или B) *есть аксиома теории* $\mathcal{T}$.

S3. *Если* A *и* B — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *то соотношение* (A или B) $\Rightarrow$ (B или A) *есть аксиома теории* $\mathcal{T}$.

S4. *Если* A, B *и* C — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *то соотношение*

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \text{ или } A) \Rightarrow (C \text{ или } B))$$

есть аксиома теории $\mathcal{T}$.

---

1) Эта фраза не означает, что схемы логической теории исчерпываются схемами *S*1—*S*4; в логической теории могут быть и другие схемы. Аналогичное замечание справедливо и для кванторных и эгалитарных теорий (см. ниже). — *Прим. ред.*

2) Выражение этой схемы без использования буквы A и сокращающего символа $\Rightarrow$ имеет следующий вид: *имея соотношение, мы получим теорему, если напишем слева направо* $\vee$, $\urcorner$, $\vee$, *а затем три раза подряд данное соотношение.* Читатель может поупражняться в приведении к такому же виду остальных схем.

Эти правила действительно являются схемами. Проверим это, например, для S2. Пусть R — соотношение, получаемое применением правила S2; тогда существуют такие соотношения A, B теории $\mathcal{T}$, что R есть соотношение $A \Rightarrow$ (A или B). Пусть T — терм теории $\mathcal{T}$, а x — буква; пусть A' и B' суть соотношения $(T|x)A$ и $(T|x)B$; тогда $(T|x)R$ тождественно с $A' \Rightarrow (A'$ или $B')$, а следовательно, его можно получить применением правила S2.

Интуитивно правила S1 — S4 лишь выражают смысл, приписываемый словам „или“ и „влечет“ в обычном математическом языке [1]).

Если логическая теория $\mathcal{T}$ противоречива, *то всякое соотношение теории* $\mathcal{T}$ *есть теорема теории* $\mathcal{T}$. В самом деле, пусть A — такое соотношение теории $\mathcal{T}$, что A и „не A“ суть теоремы теории $\mathcal{T}$, и пусть B — любое соотношение теории $\mathcal{T}$. Согласно S2 (не A) $\Rightarrow$ ((не A) или B) есть теорема теории $\mathcal{T}$; следовательно, согласно С1 (§ 2, п° 2), „(не A) или B“, т. е. $A \Rightarrow B$, есть теорема теории $\mathcal{T}$. Еще одно применение С1 показывает, что B — теорема теории $\mathcal{T}$.

В дальнейшем через $\mathcal{T}$ *всюду будет обозначаться логическая теория.*

2. Первые следствия

С6. *Пусть* A, B, C — *соотношения теории* $\mathcal{T}$. *Если* $A \Rightarrow B$ *и* $B \Rightarrow C$ *суть теоремы теории* $\mathcal{T}$, *то и* $A \Rightarrow C$ *есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

В самом деле, $(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ есть аксиома теории $\mathcal{T}$, согласно S4, где A заменяется через B, B — через C, C — через „не A“. Согласно С1 (§ 2, п° 2), $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. В заключение еще раз применим С1.

С7. *Если* A *и* B — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *то* $B \Rightarrow$ (A или B) *есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

В самом деле, $B \Rightarrow$ (B или A) и (B или A) $\Rightarrow$ (A или B) суть аксиомы теории $\mathcal{T}$, согласно S2 и S3. В заключение применяем С6.

С8. *Если* A — *соотношение теории* $\mathcal{T}$, *то* $A \Rightarrow A$ *есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

В самом деле, $A \Rightarrow$ (A или A) и (A или A) $\Rightarrow A$ суть аксиомы, согласно S2 и S1. В заключение применяем С6.

С9. *Если* A — *соотношение, а* B — *теорема теории* $\mathcal{T}$, *то* $A \Rightarrow B$ *есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

---

1) В обычном языке слово „или“ может иметь два разных смысла в зависимости от контекста: связывая два высказывания словом „или“, говорящий может хотеть выразить истинность либо хотя бы одного из двух (и, возможно, обоих сразу), либо только одного с исключением другого.

В самом деле, $B \Rightarrow$((не A) или B) есть теорема, согласно C7; следовательно, „(не A) или B", т. е. $A \Rightarrow B$, есть теорема, согласно C1.

C10. *Если A — соотношение теории $\mathcal{T}$, то „A или (не A)" есть теорема теории $\mathcal{T}$.*

В самом деле, „(не A) или A" есть теорема, согласно C8. В заключение применяем S3 и C1.

C11. *Если A — соотношение теории $\mathcal{T}$, то „$A \Rightarrow$(не не A)" есть теорема теории $\mathcal{T}$.*

В самом деле, это соотношение есть не что иное, как „(не A) или (не не A)", и наш критерий вытекает из C10.

C12. *Пусть A и B — два соотношения теории $\mathcal{T}$. Соотношение*

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\text{не } B) \Rightarrow (\text{не } A))$$

есть теорема теории $\mathcal{T}$.

В самом деле,

$$((\text{не } A) \text{ или } B) \Rightarrow ((\text{не } A) \text{ или } (\text{не не } B))$$

есть теорема, согласно C11, S4 и C1. С другой стороны,

$$((\text{не } A) \text{ или } (\text{не не } B)) \Rightarrow ((\text{не не } B) \text{ или } (\text{не } A))$$

есть аксиома, согласно S3. Следовательно,

$$((\text{не } A) \text{ или } B) \Rightarrow ((\text{не не } B) \text{ или } (\text{не } A))$$

есть теорема, согласно C6. Но это и есть соотношение, которое требовалось установить.

C13. *Пусть A, B, C — соотношения теории $\mathcal{T}$. Если $A \Rightarrow B$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, то $(B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ есть теорема теории $\mathcal{T}$.*

В самом деле, (не B)$\Rightarrow$(не A) есть теорема, согласно C12 и C1. Следовательно, (C или (не B))$\Rightarrow$(C или (не A)) есть теорема, согласно S4 и C1. Применяя дважды S3 и C6, мы приходим к выводу, что ((не B) или C)$\Rightarrow$((не A) или C) есть теорема. Но это и есть соотношение, которое требовалось доказать.

Отныне мы обычно будем применять правила C1 *и* C6, *не ссылаясь на них явно.*

3. Методы доказательства

I. *Метод вспомогательной гипотезы.* Он основан на следующем правиле:

C14 (*критерий дедукции*). *Пусть A — соотношение теории $\mathcal{T}$, а $\mathcal{T}'$ — теория, получаемая присоединением A к аксиомам теории $\mathcal{T}$. Если B — теорема теории $\mathcal{T}'$, то $A \Rightarrow B$ есть теорема теории $\mathcal{T}$.*

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ есть доказательство теории $\mathcal{T}'$, в котором встречается B. Мы покажем последовательно, что соотношения $A \Rightarrow B_k$ суть теоремы теории $\mathcal{T}$. Предположим, что это уже установлено для соотношений, предшествующих B_i, и покажем, что $A \Rightarrow B_i$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. Если B_i — аксиома теории $\mathcal{T}'$, то B_i есть либо аксиома теории $\mathcal{T}$, либо A. В обоих случаях $A \Rightarrow B_i$ есть теорема теории $\mathcal{T}$ ввиду C9 или C8. Если впереди B_i идут соотношения B_j и $B_j \Rightarrow B_i$, то мы уже знаем, что $A \Rightarrow B_j$ и $A \Rightarrow (B_j \Rightarrow B_i)$ суть теоремы теории $\mathcal{T}$. Тогда $(B_j \Rightarrow B_i) \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, согласно C13. Следовательно, согласно C6, $A \Rightarrow (A \Rightarrow B_i)$, т. е. „(не A) или $(A \Rightarrow B_i)$", есть теорема теории $\mathcal{T}$, а значит, также и „$(A \Rightarrow B_i)$ или (не A)", согласно S3. Но (не A)$\Rightarrow$((не A) или B_i), т. е. (не A)$\Rightarrow$$(A \Rightarrow B_i)$, есть теорема теории $\mathcal{T}$, согласно S2. Применяя S4, мы видим, что

$$((A \Rightarrow B_i) \text{ или } (\text{не } A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B_i) \text{ или } (A \Rightarrow B_i))$$

есть теорема теории $\mathcal{T}$, а следовательно, и „$(A \Rightarrow B_i)$ или $(A \Rightarrow B_i)$" есть теорема теории $\mathcal{T}$. С помощью S1 мы делаем вывод, что $A \Rightarrow B_i$ есть теорема теории $\mathcal{T}$.

На практике намерение применить этот критерий выражают фразой такого рода: „Предположим, что A справедливо". Эта фраза означает, что мы намереваемся некоторое время проводить рассуждения в теории $\mathcal{T}'$. Мы остаемся в $\mathcal{T}'$, пока не докажем в ней соотношение B. Сделав это, мы устанавливаем, что $A \Rightarrow B$ есть теорема в $\mathcal{T}$, и продолжаем (если нужно) рассуждать в $\mathcal{T}$, не оговаривая вовсе, что мы покидаем $\mathcal{T}'$. Соотношение A, вводимое как новая аксиома, называется *вспомогательной гипотезой.* °Например, говоря: „Пусть x — действительное число", мы строим теорию, в которой соотношение „x есть действительное число" является вспомогательной гипотезой.$_\circ$

II. *Метод приведения к абсурду.* Он основан на следующем правиле:

C15. *Пусть A — соотношение теории $\mathcal{T}$, а $\mathcal{T}'$ — теория, получаемая присоединением аксиомы „не A" к аксиомам теории $\mathcal{T}$. Если $\mathcal{T}'$ противоречива, то A есть теорема теории $\mathcal{T}$.*

В самом деле, A есть теорема теории $\mathcal{T}'$. Следовательно (метод вспомогательной гипотезы), (не A)$\Rightarrow A$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. Согласно S4, (A или (не A))$\Rightarrow$(A или A) есть теорема теории $\mathcal{T}$. Согласно C10, „A или (не A)" есть теорема теории $\mathcal{T}$. В заключение применяем S1.

На практике намерение применить этот критерий выражают фразой такого рода: „Предположим, что A ложно". Эта фраза означает, что мы намереваемся на время проводить рассуждения в теории $\mathcal{T}'$. Мы остаемся в $\mathcal{T}'$, пока не установим две теоремы вида B и „не B". Сделав это, мы устанавливаем, что A есть теорема теории $\mathcal{T}$; последнее выражается обычно фразой такого рода: „Но это (а именно в пре-

дыдущих обозначениях B и „не B") абсурдно; следовательно, A справедливо". Затем возвращаемся к теории $\mathcal{T}$, которой мы занимались до этого.

Как первые применения этих методов докажем следующие критерии:

C16. *Если* A — *соотношение теории* $\mathcal{T}$, *то* (не не A)$\Rightarrow A$ *есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

В самом деле, предположим, что „не не A" верно; надо доказать A. Предположим, что A ложно. В создаваемой таким образом теории оба соотношения „не не A" и „не A" суть теоремы. Это абсурдно; следовательно, A верно.

C17. *Если* A *и* B — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *то*

$$((\text{не } B)\Rightarrow(\text{не } A))\Rightarrow(A\Rightarrow B)$$

есть теорема теории $\mathcal{T}$.

В самом деле, предположим, что (не B)$\Rightarrow$(не A) верно. Надо доказать, что $A\Rightarrow B$ верно. Поэтому предположим, что A верно, и докажем, что B верно. Предположим, что „не B" верно. Тогда „не A" верно, что абсурдно.

III. *Метод разделения случаев.* Он основан на следующем правиле:

C18. *Пусть* A, B, C — *соотношения теории* $\mathcal{T}$. *Если* „A или B", $A\Rightarrow C$, $B\Rightarrow C$ *суть теоремы теории* $\mathcal{T}$, *то* C *есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

В самом деле, согласно S4, (A или B)$\Rightarrow$(A или C) и (C или A)$\Rightarrow$(C или C) суть теоремы теории $\mathcal{T}$. Если учесть S3 и S1, то (A или B)$\Rightarrow C$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, откуда и следует правило.

Для доказательства C достаточно, таким образом, в случае, когда располагают теоремой „A или B" доказать C с присоединением A к аксиомам теории $\mathcal{T}$, а затем доказать C с присоединением B к аксиомам теории $\mathcal{T}$. Этот метод интересен тем, что если „A или B" истинно, то, вообще говоря, ничто еще не позволяет утверждать, что одно из соотношенний A, B истинно.

В частности, согласно C10, если оба соотношения $A\Rightarrow C$ и (не A)$\Rightarrow C$ суть теоремы теории $\mathcal{T}$, то и C есть теорема теории $\mathcal{T}$.

IV. *Метод вспомогательной константы.* Он основан на следующем правиле:

C19. *Пусть* x — *буква,* A *и* B — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *такие, что:*

1° *Буква* x *не является константой теории* $\mathcal{T}$ *и не встречается в* B.

2° *Известен такой терм* T *теории* $\mathcal{T}$, *что* $(T/x)A$ *есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

Пусть $\mathcal{T}'$ — *теория, получаемая присоединением* A *к аксиомам теории* $\mathcal{T}$. *Если* B — *теорема в* $\mathcal{T}'$, *то* B *есть теорема в* $\mathcal{T}$.

В самом деле, $A\Rightarrow B$ есть теорема в $\mathcal{T}$ (критерий дедукции). Так как x не является константой теории $\mathcal{T}$, то $(T|x)(A\Rightarrow B)$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, согласно C3. Поскольку x не встречается в B, $(T|x)(A\Rightarrow B)$ тождественно, согласно CS5 (§ 1, n° 2) с $((T/x)A)\Rightarrow B$. Наконец, $(T/x)A$, а тем самым и B суть теоремы теории $\mathcal{T}$.

Интуитивно метод состоит в использовании для доказательства B произвольного предмета x (*вспомогательной константы*), который предполагается наделенным некоторыми свойствами, выражаемыми соотношением A. °Например, в доказательстве из геометрии, где идет речь, между прочим, о прямой D, можно „взять" точку x на этой прямой; тогда соотношение A есть $x\in$ D.° Чтобы в ходе доказательства можно было пользоваться предметом, наделенным известными свойствами, необходимо, конечно, чтобы такие предметы существовали. Теорема $(T|x)A$, называемая *теоремой узаконения*, гарантирует это существование.

На практике намерение применить этот метод выражают фразой такого рода: „Пусть x — такой предмет, что A". В противоположность тому, что происходит при методе вспомогательной гипотезы, здесь результат умозаключения не касается x.

4. Конъюнкция

Пусть A, B — знакосочетания. Знакосочетание

$$\text{не }((\text{не } A) \text{ или } (\text{не } B))$$

будет обозначаться через „A и B".

CS6. *Пусть* A, B, T — *знакосочетания,* x — *буква. Знакосочетание* $(T|x)(A$ и $B)$ *тождественно с* „$(T|x)A$ и $(T|x)B$".

Это вытекает сразу же из CS5 (§ 1, n° 2).

CF9. *Если* A, B — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *то* „A и B" — *тоже есть соотношение теории* $\mathcal{T}$ (называемое *конъюнкцией* соотношений A и B).

Это вытекает сразу же из CF1 и CF2 (§ 1, n° 4).

C20. *Если* A, B — *теоремы теории* $\mathcal{T}$, *то* „A и B" *тоже есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

Предположим, что „A и B" ложно, т. е. что

$$\text{не не }((\text{не } A) \text{ или } (\text{не } B))$$

истинно. Согласно C16, „(не A) или (не B)", т. е. $A\Rightarrow$(не B), истинно; следовательно, „не B" истинно. Но это абсурдно; следовательно, „A и B" истинно.

C21. *Если* A, B — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *то* (A и B)$\Rightarrow A$ *и* (A и B)$\Rightarrow B$ *суть теоремы теории* $\mathcal{T}$.

В самом деле, соотношения (не A)$\Rightarrow$((не A) или (не B)), (не B)$\Rightarrow$((не A) или (не B)) суть теоремы теории $\mathcal{T}$, согласно S2

и C7. Но ((не A) или (не B))$\Rightarrow$не (A и B) есть теорема в $\mathcal{T}$, согласно C11. Следовательно, (не A)$\Rightarrow$не (A и B), (не B)$\Rightarrow$не (A и B) суть теоремы теории $\mathcal{T}$. В заключение применяем C17.

Условимся обозначать через „A и B и C“ (соответственно „A или B или C“) соотношение „A и (B и C)“ (соответственно „A или (B или C)“). Более общо, если $A_1, A_2, \ldots, A_h$ — соотношения, обозначим через „A_1 и A_2 и ... и A_h“ соотношение, которое строится последовательно с помощью соглашения, что „A_1 и A_2 и ... и A_h“ обозначает то же самое, что и „A_1 и (A_2 и ... и A_h)“. Аналогично определяется „A_1 или A_2 или ... или A_h“. Соотношение „A_1 и A_2 и ... и A_h“ есть теорема теории $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда каждое из соотношений $A_1, A_2, \ldots, A_h$ есть теорема в $\mathcal{T}$.

Отсюда следует, что всякая логическая теория $\mathcal{T}$ эквивалентна некоторой логической теории $\mathcal{T}'$, обладающей самое большее лишь одной явной аксиомой. Это очевидно в случае, когда $\mathcal{T}$ вообще не имеет ни одной явной аксиомы. Если же $\mathcal{T}$ обладает явными аксиомами $A_1, A_2, \ldots, A_h$, то пусть $\mathcal{T}'$ — теория, имеющая те же знаки и те же схемы, что и $\mathcal{T}$, и явную аксиому „A_1 и A_2 и ... и A_h“. Нетрудно видеть, что всякая аксиома в $\mathcal{T}$ (соответственно в $\mathcal{T}'$) есть теорема в $\mathcal{T}'$ (соответственно в $\mathcal{T}$).

Пусть $\mathcal{T}_0$ — теория без явных аксиом, имеющая те же знаки, что и $\mathcal{T}$, и лишь одни схемы S1, S2, S3, S4. Изучение теории $\mathcal{T}$ в принципе сводится к изучению теории $\mathcal{T}_0$: для того чтобы соотношение A было теоремой в $\mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathcal{T}$ существовали аксиомы $A_1, A_2, \ldots, A_h$ такие, что (A_1 и A_2 и ... и A_h)$\Rightarrow A$ есть теорема в $\mathcal{T}_0$. В самом деле, это условие, очевидно, достаточно. Предположим, с другой стороны, что A — теорема в $\mathcal{T}$, и пусть $A_1, A_2, \ldots, A_h$ суть аксиомы в $\mathcal{T}$, встречающиеся в доказательстве теории $\mathcal{T}$, содержащем A. Пусть $\mathcal{T}'$ (соответственно $\mathcal{T}''$) есть теория, получаемая из $\mathcal{T}_0$ присоединением аксиом $A_1, A_2, \ldots, A_h$ (соответственно аксиомы „A_1 и A_2 и ... и A_h“). Доказательство соотношения A в $\mathcal{T}$ есть доказательство соотношения A в $\mathcal{T}'$; следовательно, A есть теорема теории $\mathcal{T}'$, а значит, и теории $\mathcal{T}''$, поскольку мы видели выше, что $\mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}''$ эквивалентны. Согласно критерию дедукции, (A_1 и A_2 и ... и A_h)$\Rightarrow A$ есть теорема теории $\mathcal{T}_0$.

Если $\mathcal{T}$ противоречива, то, согласно предыдущему, существует конъюнкция A аксиом теории $\mathcal{T}$ и соотношение R из $\mathcal{T}$, такие, что $A\Rightarrow$(R и (не R)) есть теорема теории $\mathcal{T}_0$. Следовательно,

(не R) или (не не R))$\Rightarrow$(не A)

есть теорема теории $\mathcal{T}_0$, а так как „(не R) или (не не R)“ есть теорема теории $\mathcal{T}_0$, то „не A“ тоже есть теорема теории $\mathcal{T}_0$. Обратно, если существует конъюнкция A аксиом теории $\mathcal{T}$, такая, что „не A“ есть теорема в $\mathcal{T}_0$, то A и „не A“ суть теоремы теории $\mathcal{T}$, так что $\mathcal{T}$ противоречива.

5. Эквивалентность

Пусть A и B — знакосочетания. Знакосочетание

($A\Rightarrow B$) и ($B\Rightarrow A$)

будет обозначаться через $A\Leftrightarrow B$.

CS7. *Пусть A, B, T — знакосочетания, x — буква. Знакосочетание $(T|x)(A\Leftrightarrow B)$ тождественно с $(T|x)A\Leftrightarrow(T|x)B$.*

Это вытекает сразу же из CS5 (§ 1, n° 2) и CS6 (n° 4).

CF10. *Если A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$, то $A\Leftrightarrow B$ — тоже соотношение теории $\mathcal{T}$.*

Это вытекает сразу же из CF5 (§ 1, n° 4) и CF9 (n° 4).

Если $A\Leftrightarrow B$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, мы будем говорить, что A и B *эквивалентны* в $\mathcal{T}$; если x — буква, не являющаяся константой в $\mathcal{T}$, и если A и B рассматриваются как соотношения по x, то всякий терм в $\mathcal{T}$, удовлетворяющий одному соотношению, удовлетворяет и другому.

Из критериев C20 и C21 следует, что для доказательства в $\mathcal{T}$ теоремы вида $A\Leftrightarrow B$ необходимо и достаточно доказать $A\Rightarrow B$ и $B\Rightarrow A$ в $\mathcal{T}$. Часто это делается так: сначала доказывается B в теории, получаемой из $\mathcal{T}$ присоединением аксиомы A, а затем доказывается A в теории, получаемой из $\mathcal{T}$ присоединением аксиомы B. Эти замечания позволяют сразу же установить следующие критерии, доказательство которых мы предоставляем читателю.

C22. *Пусть A, B, C — соотношения теории $\mathcal{T}$. Если $A\Leftrightarrow B$ — теорема в $\mathcal{T}$, то и $B\Leftrightarrow A$ — теорема в $\mathcal{T}$. Если $A\Leftrightarrow B$ и $B\Leftrightarrow C$ — теоремы в $\mathcal{T}$, то и $A\Leftrightarrow C$ — теорема в $\mathcal{T}$.*

C23. *Пусть A и B — соотношения, эквивалентные в $\mathcal{T}$, а C — еще какое-то соотношение в $\mathcal{T}$. Тогда в $\mathcal{T}$ имеются следующие теоремы:*

(не A)$\Leftrightarrow$(не B); ($A\Rightarrow C$)$\Leftrightarrow$($B\Rightarrow C$); ($C\Rightarrow A$)$\Leftrightarrow$($C\Rightarrow B$);

(A и C)$\Leftrightarrow$(B и C); (A или C)$\Leftrightarrow$(B или C).

C24. *Пусть A, B, C — соотношения теории $\mathcal{T}$; тогда в $\mathcal{T}$ имеются следующие теоремы:*

(не не A)$\Leftrightarrow A$; ($A\Rightarrow B$)$\Leftrightarrow$((не B)$\Rightarrow$(не A));

(A и A)$\Leftrightarrow A$; (A и B)$\Leftrightarrow$(B и A);

(A и (B и C))$\Leftrightarrow$((A и B) и C);

(A или B)$\Leftrightarrow$не ((не A) и (не B));

(A или A)$\Leftrightarrow A$; (A или B)$\Leftrightarrow$(B или A);

(A или (B или C))$\Leftrightarrow$((A или B) или C);

(A и (B или C))$\Leftrightarrow$((A и B) или (A и C));

(A или (B и C))$\Leftrightarrow$((A или B) и (A или C));

(A и (не B))$\Leftrightarrow$не ($A\Rightarrow B$); (A или B)$\Leftrightarrow$((не A)$\Rightarrow B$).

C25. *Если* A — *теорема в* $\mathcal{T}$, *а* B — *соотношение в* $\mathcal{T}$, *то* (A и B)$\Leftrightarrow B$ *есть теорема в* $\mathcal{T}$. *Если* „не A“ — *теорема в* $\mathcal{T}$, *то* (A или B)$\Leftrightarrow B$ *есть теорема в* $\mathcal{T}$.

Как правило, во всех дальнейших разделах Трактата критерии C1 — C25 *будут отныне использоваться без ссылок.*

Упражнения

1) Пусть A, B, C — соотношения логической теории $\mathcal{T}$. Показать, что следующие соотношения суть теоремы теории $\mathcal{T}$:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$;

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$;

$A \Rightarrow ((\text{не } A) \Rightarrow B)$;

$(A \text{ или } B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$;

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \text{ и } B) \text{ или } ((\text{не } A) \text{ и } (\text{не } B)))$;

$(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow \text{ не } ((\text{не } A) \Leftrightarrow B)$;

$(A \Rightarrow (B \text{ или } (\text{не } C))) \Leftrightarrow ((C \text{ и } A) \Rightarrow B)$;

$(A \Rightarrow (B \text{ или } C)) \Leftrightarrow (B \text{ или } (A \Rightarrow C))$;

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \text{ и } C)))$;

$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \text{ или } B) \Rightarrow C))$;

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \text{ и } C) \Rightarrow (B \text{ и } C))$;

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \text{ или } C) \Rightarrow (B \text{ или } C))$.

2) Пусть A — соотношение логической теории $\mathcal{T}$. Если $A \Leftrightarrow$ (не A) — теорема теории $\mathcal{T}$, то $\mathcal{T}$ противоречива.

3) Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — соотношения логической теории $\mathcal{T}$:

а) Для доказательства соотношения „A_1 или A_2 или ... или A_n“ в $\mathcal{T}$ достаточно доказать A_n в теории, получаемой присоединением к $\mathcal{T}$ аксиом не A_1, не A_2, ..., не A_{n-1}.

б) Если „A_1 или A_2 или ... или A_n“ есть теорема теории $\mathcal{T}$ и если мы хотим доказать в $\mathcal{T}$ теорему A, достаточно доказать теоремы $A_1 \Rightarrow A$, $A_2 \Rightarrow A$, ..., $A_n \Rightarrow A$.

4) Пусть A и B — соотношения логической теории $\mathcal{T}$. Обозначим через $A \mid B$ соотношение „(не A) или (не B)“. Доказать в $\mathcal{T}$ следующие теоремы:

$(\text{не } A) \Leftrightarrow (A \mid A)$;

$(A \text{ или } B) \Leftrightarrow ((A \mid A) \mid (B \mid B))$;

$(A \text{ и } B) \Leftrightarrow ((A \mid B) \mid (A \mid B))$;

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \mid (B \mid B))$.

5) Пусть $\mathcal{T}$ — логическая теория, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — ее явные аксиомы. Для того чтобы A_n не зависела от остальных аксиом теории $\mathcal{T}$ (§ 2, Упражнение), необходимо и достаточно, чтобы теория, у которой знаки и схемы те же, что и у $\mathcal{T}$, а явными аксиомами служат $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, „не A_n“, была непротиворечива.

§ 4. Кванторные теории

1. Определение кванторов

В § 3 единственными логическими знаками, игравшими у нас роль, были $\neg$ и $\vee$; правила, которые мы теперь собираемся изложить, касаются главным образом употребления логических знаков τ и $\square$.

Если R — знакосочетание и x — буква, то знакосочетание $(\tau_x(R) \mid x) R$ обозначается через „существует такое x, что R“, или через $(\exists x) R$. Знакосочетание „не $((\exists x)(\text{не } R))$“ обозначается через „для всякого x R“, или через „каково бы ни было[1] x, R“, или через $(\forall x) R$. Сокращающие символы $\exists$ и $\forall$ называются соответственно *квантором существования* и *квантором общности*. Буква x не встречается в знакосочетании, обозначаемом символом $\tau_x(R)$; *следовательно, она не встречается* и в знакосочетаниях, обозначаемых символами $(\exists x) R$ и $(\forall x) R$.

CS8. *Пусть* R — *знакосочетание,* x *и* x' — *буквы. Если* x' *не встречается в* R, *то* $(\exists x) R$ *и* $(\forall x) R$ *тождественны соответственно с* $(\exists x') R'$ *и* $(\forall x') R'$, *где* R' *есть* $(x' \mid x) R$.

В самом деле, $(\tau_x(R) \mid x) R$ тождественно с $(\tau_x(R) \mid x') R'$, согласно CS1 (§ 1, n° 2), а $\tau_x(R)$ тождественно с $\tau_{x'}(R')$, согласно CS3 (§ 1, n° 2). Следовательно, $(\exists x) R$ тождественно с $(\exists x') R'$. Отсюда вытекает, что $(\forall x) R$ тождественно с $(\forall x') R'$.

CS9. *Пусть* R *и* U — *знакосочетания,* x *и* y — *различные буквы. Если* x *не встречается в* U, *то* $(U \mid y)(\exists x) R$ *и* $(U \mid y)(\forall x) R$ *тождественны соответственно с* $(\exists x) R'$ *и* $(\forall x) R'$, *где* R' *есть* $(U \mid y) R$.

В самом деле, $(U \mid y)(\tau_x(R) \mid x) R$ тождественно, согласно CS2 (§ 1, n° 2), с $(T \mid x)(U \mid y) R$, где T есть $(U \mid y) \tau_x(R)$, т. е. $\tau_x(R')$, согласно CS4. Отсюда $(U \mid y)(\exists x) R$ тождественно с $(\exists x) R'$, а следовательно, $(U \mid y)(\forall x) R$ тождественно с $(\forall x') R'$.

CF11. *Если* R — *соотношение теории* $\mathcal{T}$, *а* x — *буква, то* $(\exists x) R$ *и* $(\forall x) R$ *суть соотношения теории* $\mathcal{T}$.

Это вытекает сразу же из CF3, CF8 и CF2 (§ 1, n° 4).

На интуитивном уровне мы будем считать, что R выражает какое-то свойство предмета, обозначенного буквой x. Ввиду интуитивного смысла терма $\tau_x(R)$ утверждение $(\exists x) R$ сводится к утверждению, что существует какой-то объект, обладающий свойством R. Сказать „не $(\exists x)$ (не R)“ — значит сказать, что не существует ни одного объекта, имеющего свойство „не R“; иными словами, это значит сказать, что всякий объект обладает свойством R.

[1]) Заметим, что в русском языке слова, служащие названиями букв латинского и греческого алфавитов и имеющие признак мужского или женского рода („икс“, „дельта“ и т. п.), фигурируют в двух формах: в форме *склоняемого* существительного *соответствующего* рода и в форме *несклоняемого* существительного *среднего* рода; в математической терминологии наблюдается тенденция к преимущественному употреблению второй формы. — *Прим. ред.*

Если мы располагаем в логической теории $\mathcal{T}$ теоремой вида $(\exists x)R$, где буква x не является константой теории $\mathcal{T}$, то эта теорема может служить теоремой узаконения в методе вспомогательной константы (§ 3, п° 3), потому что она тождественна с $(\tau_x)(R)|x)R$. Пусть тогда $\mathcal{T}'$ — теория, получаемая присоединением R к аксиомам теории $\mathcal{T}$. Если в $\mathcal{T}'$ можно доказать соотношение S, в котором x не встречается, то S есть теорема теории $\mathcal{T}$.

С26. *Пусть* $\mathcal{T}$ — *логическая теория,* R — *соотношение,* x — *буква. Соотношения* $(\forall x)R$ *и* $(\tau_x$ (не $R)|x)R$ *эквивалентны в* $\mathcal{T}$.

В самом деле, $(\forall x)R$ тождественно с „не $(\tau_x$ (не $R)|x)$(не R)", а следовательно, и с „не не $(\tau_x$ (не $R)|x)R$".

С27. *Если* R — *теорема логической теории* $\mathcal{T}$ *и буква* x *не является константой этой теории, то* $(\forall x)R$ *есть теорема в* $\mathcal{T}$.

В самом деле, $(\tau_x$ (не $R)|x)R$ есть теорема в $\mathcal{T}$, согласно С3 (§ 2, п° 3).

Напротив, если x — константа теории $\mathcal{T}$, то истинность соотношения R в $\mathcal{T}$ не влечет истинности $(\forall x)R$. Интуитивно из того обстоятельства, что R есть истинное свойство для x, являющегося в $\mathcal{T}$ определенным объектом, еще не следует, конечно, что R есть истинное свойство всякого объекта.

С28. *Пусть* $\mathcal{T}$ — *логическая теория,* R — *ее соотношение и* x — *буква. Соотношения* „не $(\forall x)R$" *и* $(\exists x)$(не R) *эквивалентны в* $\mathcal{T}$.

В самом деле, „не $(\forall x)R$" тождественно с „не не $(\exists x)$ (не R)".

2. Аксиомы кванторных теорий

Мы называем *кванторной теорией* всякую теорию $\mathcal{T}$, в которой схемы S1—S4 (§ 3, п° 1) и нижеследующая схема S5 дают неявные аксиомы.

S5. *Если* R — *соотношение теории* $\mathcal{T}$, T — *ее терм и* x — *буква, то соотношение* $(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$ *есть аксиома.*

Это правило, конечно, есть схема. В самом деле, пусть A есть аксиома теории $\mathcal{T}$, полученная применением правила S5. Это значит, что существуют такое соотношение R теории $\mathcal{T}$, такой терм T теории $\mathcal{T}$ и такая буква x, что A есть $(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$. Пусть U — терм теории $\mathcal{T}$, y — буква; покажем, что $(U|y)A$ также получается применением S5. Используя CS1 (§ 1, п° 2) и CS8 (п° 1), можно свести все к случаю, когда x отлично от y и не встречается в U. Пусть тогда R' — соотношение $(U|y)R$ и T' — терм $(U|y)T$. Критерии CS2 (§ 1, п° 2) и CS9 (п° 1) показывают, что $(U|y)A$ тождественно с $(T'|x)R' \Rightarrow (\exists x)R'$.

Схема S5 выражает тот факт, что если существует предмет T, для которого верно соотношение R, рассматриваемое как выражение неко-

торого свойства предмета x, то R верно и для предмета $\tau_x(R)$; это вполне отвечает интуитивному значению, которое мы приписали знаку $\tau_x(R)$ (§ 1, п° 3, замечание).

3. Свойства кванторов

Отныне мы будем рассматривать только кванторные теории. Во всей остальной части настоящего параграфа символом $\mathcal{T}$ будет обозначаться именно такая теория, а символом $\mathcal{T}_0$ — теория без явных аксиом, обладающая теми же знаками, что и $\mathcal{T}$, но лишь схемами S1—S5; $\mathcal{T}$ сильнее, чем $\mathcal{T}_0$.

С29. *Пусть* R — *соотношение теории* $\mathcal{T}$, *а* x — *буква. Соотношения* „не $(\exists x)R$" *и* $(\forall x)$(не R) *эквивалентны в* $\mathcal{T}$.

В самом деле, достаточно установить данный критерий в теории $\mathcal{T}_0$. В этой теории x не является константой. Теорема $R \Leftrightarrow$ (не не R) дает ввиду С3 (§ 2, п° 3) теоремы

$$(\exists x)R \Rightarrow (\tau_x(R)|x)(\text{не не } R)$$

и

$$(\exists x)(\text{не не } R) \Rightarrow (\tau_x(\text{не не } R)|x)R.$$

Применяя S5, мы выводим отсюда в $\mathcal{T}_0$ теоремы

$$(\exists x)R \Rightarrow (\exists x)(\text{не не } R)$$

и

$$(\exists x)(\text{не не } R) \Rightarrow (\exists x)R$$

и тем самым теорему $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists x)$(не не R). Но $(\exists x)$(не не R) эквивалентно в $\mathcal{T}_0$ с „не не $(\exists x)$(не не R)", т. е. с „не $(\forall x)$(не R)". Тем самым критерий доказан.

Критерии С28 и С29 позволяют выводить свойства одного квантора из свойств другого.

С30. *Пусть* R — *соотношение теории* $\mathcal{T}$, T — *ее терм и* x — *буква. Соотношение* $(\forall x)R \Rightarrow (T|x)R$ *есть теорема в* $\mathcal{T}$.

Согласно S5, $(T|x)$(не $R) \Rightarrow (\tau_x$(не $R)|x)$(не R) есть аксиома. Это соотношение тождественно с

$$(\text{не } (T|x)R) \Rightarrow (\text{не } (\tau_x(\text{не } R)|x)R).$$

Следовательно, $(\tau_x$(не $R)|x)R \Rightarrow (T|x)R$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. В заключение мы применяем С26 (п° 1).

Пусть R — соотношение теории $\mathcal{T}$. Согласно С26, С27 и С30, три следующих действия (при условии, что буква x не является константой теории $\mathcal{T}$) сводятся к одному и тому же: сформулировать в $\mathcal{T}$ теорему R, или сформулировать в $\mathcal{T}$ теорему $(\forall x)R$, или, наконец, сформулировать метаматематическое правило: „Если T — произвольный терм теории $\mathcal{T}$, то $(T|x)R$ есть теорема в $\mathcal{T}$".

C31. *Пусть* R *и* S — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *а* x — *буква, не являющаяся константой теории* $\mathcal{T}$. *Если* $R \Rightarrow S$ (соответственно $R \Leftrightarrow S$) *есть теорема в* $\mathcal{T}$, *то* $(\forall x) R \Rightarrow (\forall x) S$ *и* $(\exists x) R \Rightarrow (\exists x) S$ (соответственно $(\forall x) R \Leftrightarrow (\forall x) S$ *и* $(\exists x) R \Leftrightarrow (\exists x) S$) *тоже суть теоремы в* $\mathcal{T}$.

В самом деле, предположим, что $R \Rightarrow S$ — теорема теории $\mathcal{T}$. Присоединим гипотезу $(\forall x) R$ (где x не встречается) к аксиомам. Тогда R, а следовательно, и S, а следовательно, и $(\forall x) S$ верны. Это значит, что $(\forall x) R \Rightarrow (\forall x) S$ есть теорема в $\mathcal{T}$. Отсюда вытекает, что если $R \Leftrightarrow S$ есть теорема в $\mathcal{T}$, то и $(\forall x) R \Leftrightarrow (\forall x) S$ есть теорема в $\mathcal{T}$. Правила, относящиеся к $\exists$, выводятся из полученных применением критерия C29.

C32. *Пусть* R *и* S — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *а* x — *буква. Соотношения*

$$(\forall x)(R \text{ и } S) \Leftrightarrow ((\forall x) R \text{ и } (\forall x) S),$$

$$(\exists x)(R \text{ или } S) \Leftrightarrow ((\exists x) R \text{ или } (\exists x) S)$$

суть теоремы теории $\mathcal{T}$.

В самом деле, достаточно установить эти критерии в теории $\mathcal{T}_0$; в ней x не является константой. Если $(\forall x)(R$ и $S)$ верно, то „R и S“ тоже верно; следовательно, каждое из соотношений R, S верно; следовательно, каждое из соотношений $(\forall x) R$, $(\forall x) S$ верно; следовательно, „$(\forall x) R$ и $(\forall x) S$“ верно. Нетрудно видеть также, что если „$(\forall x) R$ и $(\forall x) S$“ верно, то $(\forall x)(R$ и $S)$ тоже верно. Отсюда вытекает первая теорема. Вторая выводится из нее с помощью критерия C29.

Надо отметить, что если $(\forall x)(R$ или $S)$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, то из этой теоремы нельзя заключить, что $((\forall x) R$ или $(\forall x) S)$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. Интуитивно сказать, что соотношение $(\forall x)(R$ или $S)$ верно, значит сказать, что для всякого предмета x верно хотя бы одно из соотношений R, S; но, вообще говоря, из них будет истинно лишь одно, и в зависимости от выбора x таковым может оказаться то или другое из соотношений R, S. Мы видим также: если $((\exists x) R$ и $(\exists x) S)$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, то из этой теоремы нельзя заключить, что $(\exists x)(R$ и $S)$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. Однако мы располагаем следующим критерием:

C33. *Пусть* R *и* S — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *а* x — *буква, не встречающаяся в* R. *Соотношения*

$$(\forall x)(R \text{ или } S) \Leftrightarrow (R \text{ или } (\forall x) S),$$

$$(\exists x)(R \text{ и } S) \Leftrightarrow (R \text{ и } (\exists x) S)$$

суть теоремы теории $\mathcal{T}$.

В самом деле, достаточно установить настоящий критерий в $\mathcal{T}_0$, где x не является константой. Пусть $\mathcal{T}'$ — теория, получаемая присоединением $(\forall x)(R$ или $S)$ к аксиомам теории $\mathcal{T}_0$. Тогда в $\mathcal{T}'$ соотношения „R или S“, а следовательно, и (не $R) \Rightarrow S$ суть теоремы.

Если „не R“ верно (гипотеза, в которой x не встречается), то S, а следовательно, и $(\forall x) S$ также верны. Вследствие этого (не $R) \Rightarrow (\forall x) S$ есть теорема теории $\mathcal{T}'$, а потому $(\forall x)(R$ или $S) \Rightarrow (R$ или $(\forall x) S)$ есть теорема теории $\mathcal{T}_0$. Аналогичным образом, если „R или $(\forall x) S$“ верно, то „R или S“, а следовательно, и $(\forall x)(R$ или $S)$ также верны. Ввиду этого $(R$ или $(\forall x) S) \Rightarrow (\forall x)(R$ или $S)$ есть теорема теории $\mathcal{T}_0$. Правило, относящееся к $\exists$, выводится из полученного применением критерия C29.

C34. *Пусть* R — *соотношение,* x *и* y — *буквы. Соотношения*

$$(\forall x)(\forall y) R \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x) R,$$

$$(\exists x)(\exists y) R \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x) R,$$

$$(\exists x)(\forall y) R \Rightarrow (\forall y)(\exists x) R$$

суть теоремы теории $\mathcal{T}$.

В самом деле, достаточно установить наш критерий в $\mathcal{T}_0$, где x и y не являются константами. Если $(\forall x)(\forall y) R$ верно, то $(\forall y) R$, а следовательно, и R, а следовательно, и $(\forall x) R$, а следовательно, и $(\forall y)(\forall x) R$ также верны. Аналогично, если $(\forall y)(\forall x) R$ верно, то $(\forall x)(\forall y) R$ также верно. Отсюда вытекает первая теорема. Вторая выводится из нее с помощью критерия C29. Наконец, коль скоро $(\forall y) R \Rightarrow R$ есть теорема теории $\mathcal{T}_0$, то ввиду C31 то же можно сказать и о $(\exists x)(\forall y) R \Rightarrow (\exists x) R$; если $(\exists x)(\forall y) R$ верно, то, стало быть, $(\exists x) R$ верно, а следовательно, верно и $(\forall y)(\exists x) R$. Отсюда вытекает третья теорема.

Напротив, если $(\forall y)(\exists x) R$ — теорема теории $\mathcal{T}$, то из этой теоремы нельзя заключить, что $(\exists x)(\forall y) R$ есть теорема в $\mathcal{T}$. Интуитивно высказывание о том, что соотношение $(\forall y)(\exists x) R$ истинно, означает, что если задан произвольный объект y, то существует такой объект x, что R есть истинное соотношение между объектами x и y. Но объект x, вообще говоря, будет зависеть от объекта y. Наоборот, высказывание о том, что $(\exists x)(\forall y) R$ истинно, означает, что существует *фиксированный* объект x, такой, что R есть истинное соотношение между этим объектом и каждым объектом y.

4. *Типовые кванторы*

Пусть A и R — знакосочетания, x — буква. Мы обозначаем знакосочетание $(\exists x)(A$ и $R)$ символом $(\exists_A x) R$, а знакосочетание „не $(\exists_A x)($не $R)$“ — символом $(\forall_A x) R$. Сокращающие символы $\exists_A$ и $\forall_A$ будут называться *типовыми кванторами*. Заметим, что буква x не встречается в знакосочетаниях, обозначаемых через

$$(\exists_A x) R, \quad (\forall_A x) R.$$

CS10. *Пусть* A *и* R — *знакосочетания,* x *и* x' — *буквы. Если* x' *не встречается ни в* R, *ни в* A, *то* $(\exists_A x) R$ *и* $(\forall_A x) R$ *тождественны соответственно с* $(\exists_{A'} x') R'$ *и* $(\forall_{A'} x') R'$, *где* R' *есть* $(x' | x) R$ *и* A' *есть* $(x' | x) A$.

CS11. *Пусть* A, R, U — *знакосочетания*, x *и* y — *различные буквы. Если* x *не встречается в* U, *то знакосочетания* $(U|y)(\exists_A x)R$ *и* $(U|y)(\forall_A x)R$ *тождественны соответственно с* $(\exists_{A'} x)R'$ *и* $(\forall_{A'} x)R'$, *где* R' *есть* $(U|y)R$ *и* A' *есть* $(U|y)A$.

Эти правила сразу же вытекают из критериев CS8, CS9 (п° 1), CS5 (§ 1, п° 2) и CS6 (§ 3, п° 4).

CF12. *Пусть* A *и* R — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *а* x — *буква. Тогда* $(\exists_A x)R$ *и* $(\forall_A x)R$ *суть соотношения теории* $\mathcal{T}$.

Это вытекает сразу же из CF11 (п° 1), CF9 (§ 3, п° 4) и CF2 (§ 1, п° 4).

Интуитивно мы будем рассматривать A и R как выражения свойств предмета x. Может случиться, что в какой-нибудь цепочке доказательств мы интересуемся лишь объектами, удовлетворяющими A. Сказать, что существует объект, удовлетворяющий A, такой, что R, это все равно, что сказать следующее: существует объект, такой, что „A и R"; отсюда и определение квантора $\exists_A$. Сказать, что все объекты, удовлетворяющие A, имеют свойство R, это все равно, что сказать: не существует объектов, удовлетворяющих A и таких, что „не R"; отсюда и определение квантора $\forall_A$. На практике эти знаки заменяются довольно разнообразными фразами в зависимости от природы соотношения A.

°Например, говорят; „каково бы ни было целое число x, R", „существует элемент x множества E, такой, что R" и т. д.°

C35. *Пусть* A *и* R — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, x — *буква. Соотношения* $(\forall_A x)R$ *и* $(\forall x)(A \Rightarrow R)$ *эквивалентны в* $\mathcal{T}$.

В самом деле, соотношение $(\forall_A x)R$ тождественно с

$$\text{„не } (\exists x)(A \text{ и } (\text{не } R))\text{"}.$$

Но „A и (не R)" эквивалентно в $\mathcal{T}_0$ с „не $(A \Rightarrow R)$"; следовательно, „не $(\exists x)(A$ и (не R))" эквивалентно в $\mathcal{T}_0$ с „не $(\exists x)$(не $(A \Rightarrow R)$)", согласно C31 (п° 3). Это последнее соотношение тождественно с $(\forall x)(A \Rightarrow R)$. Таким образом, критерий установлен в $\mathcal{T}_0$, а следовательно, и в $\mathcal{T}$.

Часто приходится доказывать соотношения вида $(\forall_A x)R$. Это делается обычно с помощью одного из двух следующих критериев:

C36. *Пусть* A *и* R — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, x — *буква. Пусть* $\mathcal{T}'$ — *теория, получаемая присоединением* A *к аксиомам теории* $\mathcal{T}$. *Если* x *не является константой теории* $\mathcal{T}$ *и* R *есть теорема теории* $\mathcal{T}'$, *то* $(\forall_A x)R$ *есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

В самом деле, $A \Rightarrow R$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, согласно критерию дедукции; следовательно, $(\forall_A x)R$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, согласно C27 (п° 1) и C35.

На практике, если хотят применить это правило, говорят фразу такого рода: „Пусть x — произвольный элемент, такой, что A". В построенной таким образом теории $\mathcal{T}'$ стараются доказать R. Конечно, нельзя утверждать, что само R есть теорема теории $\mathcal{T}$.

C37. *Пусть* A *и* R — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, x — *буква. Пусть* $\mathcal{T}'$ — *теория, получаемая присоединением соотношений* A *и* „не R" *к аксиомам теории* $\mathcal{T}$. *Если* x *не является константой теории* $\mathcal{T}$ *и теория* $\mathcal{T}'$ *противоречива, то* $(\forall_A x)R$ *есть теорема теории* $\mathcal{T}$.

В самом деле, теория $\mathcal{T}'$ эквивалентна теории, получаемой присоединением „не $(A \Rightarrow R)$" к аксиомам теории $\mathcal{T}$. Согласно методу приведения к абсурду, $A \Rightarrow R$ есть теорема теории $\mathcal{T}$; следовательно, $(\forall_A x)R$ также является теоремой этой теории ввиду C27 (п° 1) и C35.

На практике говорят: „Предположим, что существует предмет x, удовлетворяющий A, для которого R неверно", и стараются найти противоречие.

Свойства типовых кванторов аналогичны свойствам кванторов.

C38. *Пусть* A *и* R — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, x — *буква. Соотношения* „не $(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)$(не R)", „не $(\exists_A x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)$ (не R)" *суть теоремы в* $\mathcal{T}$.

C39. *Пусть* A, R *и* S — *соотношения теории* $\mathcal{T}$, *а* x — *буква, не являющаяся константой этой теории. Если соотношение* $A \Rightarrow (R \Rightarrow S)$ (соответственно $A \Rightarrow (R \Leftrightarrow S)$) *есть теорема в* $\mathcal{T}$, *то соотношения*

$$(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists_A x)S, \quad (\forall_A x)R \Rightarrow (\forall_A x)S$$

(соответственно $(\exists_A x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)S$, $(\forall_A x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)S$) *тоже суть теоремы в* $\mathcal{T}$.

C40. *Пусть* A, R *и* S — *соотношения в* $\mathcal{T}$, *а* x — *буква. Соотношения*

$$(\forall_A x)(R \text{ и } S) \Leftrightarrow ((\forall_A x)R \text{ и } (\forall_A x)S),$$

$$(\exists_A x)(R \text{ или } S) \Leftrightarrow ((\exists_A x)R \text{ или } (\exists_A x)S)$$

суть теоремы в $\mathcal{T}$.

C41. *Пусть* A, R *и* S — *соотношения в* $\mathcal{T}$, *а* x — *буква, не встречающаяся в* R. *Соотношения*

$$(\forall_A x)(R \text{ или } S) \Leftrightarrow (R \text{ или } (\forall_A x)S),$$

$$(\exists_A x)(R \text{ и } S) \Leftrightarrow (R \text{ и } (\exists_A x)S)$$

суть теоремы теории $\mathcal{T}$.

C42. *Пусть* A, B, R — *соотношения в* $\mathcal{T}$, x *и* y — *буквы. Если* x *не встречается в* B, *а* y *не встречается в* A, *то*

соотношения

$$(\forall_A x)(\forall_B y)R \Leftrightarrow (\forall_B y)(\forall_A x)R,$$
$$(\exists_A x)(\exists_B y)R \Leftrightarrow (\exists_B y)(\exists_A x)R,$$
$$(\exists_A x)(\forall_B y)R \Rightarrow (\forall_B y)(\exists_A x)R$$

суть теоремы в $\mathcal{T}$.

В качестве примера докажем часть критерия С42. Соотношение $(\exists_A x)(\exists_B y)R$ тождественно с $(\exists x)(A$ и $(\exists y)(B$ и $R))$; следовательно, оно эквивалентно в $\mathcal{T}_0$ (поскольку y не встречается в A) с $(\exists x)(\exists y)$ $(A$ и $(B$ и $R))$, согласно С33 и С31. Аналогично $(\exists_B y)(\exists_A x)R$ эквивалентно с $(\exists y)(\exists x)(B$ и $(A$ и $R))$. В заключение применяем С31 и С34 (n° 3).

°Для иллюстрации применения предыдущих критериев рассмотрим следующее соотношение: „последовательность числовых функций (f_n) равномерно сходится к 0 на $(0, 1)$". Это значит: „для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое целое число n, что для всякого $x \in (0, 1)$ и для всякого целого числа $m \geqslant n$ имеет место $|f_m(x)| \leqslant \varepsilon$". Предположим, что требуется взять отрицание этого соотношения (например, для умозаключения приведением к абсурду). Критерий С38 показывает, что это отрицание эквивалентно следующему соотношению: „существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого целого числа n существует такое $x \in (0, 1)$ и такое $m \geqslant n$, для которых $|f_m(x)| > \varepsilon$".°

Упражнения

Во всех этих упражнениях $\mathcal{T}$ обозначает кванторную теорию.

1) Пусть A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$, x — буква, не встречающаяся в A. Тогда $(\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (\forall x)B)$ есть теорема в $\mathcal{T}$.

2) Пусть A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$, x — буква, отличная от констант теории $\mathcal{T}$ и не встречающаяся в A. Если $B \Rightarrow A$ есть теорема в $\mathcal{T}$, то $((\exists x)B) \Rightarrow A$ тоже есть теорема в $\mathcal{T}$.

3) Пусть A — соотношение теории $\mathcal{T}$, x и y — буквы. Соотношения $(\forall x)(\forall y)A \Rightarrow (\forall x)((x|y)A)$, $(\exists x)((x|y)A) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)A$ суть теоремы в $\mathcal{T}$.

4) Пусть A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$, x — буква. Показать, что соотношения

$$(\forall x)(A \text{ или } B) \Rightarrow ((\forall x)A \text{ или } (\exists x)B),$$
$$((\exists x)A \text{ и } (\forall x)B) \Rightarrow (\exists x)(A \text{ и } B)$$

суть теоремы в $\mathcal{T}$.

5) Пусть A и B — соотношения теории $\mathcal{T}$, x и y — буквы. Если x не встречается в B, а y — в A, то

$$(\forall x)(\forall y)(A \text{ и } B) \Leftrightarrow ((\forall x)A \text{ и } (\forall y)B)$$

есть теорема в $\mathcal{T}$.

6) Пусть A и R — соотношения теории $\mathcal{T}$, x — буква. Соотношения $(\exists_A x)R \Rightarrow (\exists x)R$, $(\forall x)R \Rightarrow (\forall_A x)R$ суть теоремы в $\mathcal{T}$.

7) Пусть A и R — соотношения теории $\mathcal{T}$, а x — буква, отличная от констант этой теории. Если $R \Rightarrow A$ есть теорема в $\mathcal{T}$, то $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$ также есть теорема в $\mathcal{T}$. Если (не $R) \Rightarrow A$ есть теорема в $\mathcal{T}$, то $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$ также есть теорема в $\mathcal{T}$. В частности, если A — теорема в $\mathcal{T}$, то $(\exists x)R \Leftrightarrow (\exists_A x)R$ и $(\forall x)R \Leftrightarrow (\forall_A x)R$ также суть теоремы в $\mathcal{T}$.

8) Пусть A и R — соотношения теории $\mathcal{T}$, T — ее терм, x — буква. Если $(T|x)A$ — теорема в $\mathcal{T}$, то $(T|x)R \Rightarrow (\exists_A x)R$ и $(\forall_A x)R \Rightarrow (T|x)R$ также суть теоремы в $\mathcal{T}$.

§ 5. Эгалитарные теории

1. Аксиомы

Мы называем *эгалитарной теорией* такую теорию $\mathcal{T}$, в которой встречается реляционный знак веса 2, имеющий вид $=$ (читается: „равно", „равняется") и в которой схемы S1 — S5 (§§ 3 и 4), а также нижеследующие схемы S6 и S7 дают неявные аксиомы. Если T и U — термы теории $\mathcal{T}$, то знакосочетание $=TU$ есть соотношение теории $\mathcal{T}$ (называемое *соотношением равенства*), согласно CF4; это соотношение обозначают через $T = U$ или $(T) = (U)$.

S6. *Пусть x — буква, T и U — термы теории $\mathcal{T}$ и $R\{x\}$ — соотношение в $\mathcal{T}$. Тогда соотношение $(T = U) \Rightarrow (R\{T\} \Leftrightarrow R\{U\})$ есть аксиома.*

S7. *Если R и S — соотношения теории $\mathcal{T}$, а x — буква, то соотношение $((\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$ есть аксиома.*

Правило S6, конечно, есть схема. Пусть, в самом деле, A есть аксиома в $\mathcal{T}$, полученная применением этого правила. Тогда существует такое соотношение R в $\mathcal{T}$, такие термы T и U в $\mathcal{T}$ и такая буква x, что A есть $(T = U) \Rightarrow ((T|x)R \Leftrightarrow (U|x)R)$. Нетрудно видеть, что если y — буква и V — терм в $\mathcal{T}$, то соотношение $(V|y)A$ также получается применением правила S6. Используя CS1 (§ 1, n° 2), можно свести все дело к случаю, когда x отлично от y и не встречается в V. Обозначим через T', U', R' формулы $(V|y)T$, $(V|y)U$, $(V|y)R$. Согласно CS2 и CS5 (§ 1, n° 2), $(V|y)A$ тождественно с

$$(T' = U') \Rightarrow ((T'|x)R' \Leftrightarrow (U'|x)R'),$$

что доказывает наше утверждение. Аналогично доказывается, что S7 есть схема.

Интуитивно схема S6 означает, что если два предмета равны, то они обладают одинаковыми свойствами. Схема S7 больше отдаляется от обычной интуиции; она означает, что если два свойства R и S некоторого предмета x эквивалентны, то привилегированные предметы $\tau_x(R)$ и $\tau_x(S)$ (выбираемые соответственно среди удовлетворяющих соотношению R и среди удовлетворяющих соотношению S, если только существуют такие предметы) равны. Читатель заметит, что присутствие в S7 квантора $\forall x$ является существенным (ср. упр. 7).

Отрицание соотношения $=TU$ обозначается через $T \neq U$ или через $(T) \neq (U)$ (где знак $\neq$ читается: „не равно", „отлично от").

Из S6 выводится следующий критерий:

С43. *Пусть x — буква, T и U — термы теории $\mathcal{T}$ и $R\{x\}$ — соотношение в $\mathcal{T}$. Соотношения ($T=U$ и $R\{T\}$) и ($T=U$ и $R\{U\}$) эквивалентны.*

В самом деле, если присоединить гипотезы $T=U$ и $R\{T\}$, то $R\{U\}$ будет верно, согласно S6; следовательно, ($T=U$ и $R\{U\}$) тоже верно.

Допуская вольность речи, часто, когда доказано соотношение вида $T=U$ в теории $\mathcal{T}$, говорят, что термы T и U суть „те же самые", или „тождественные". Подобно этому, когда $T\neq U$ справедливо в $\mathcal{T}$, говорят, что T и U „различны", вместо того чтобы сказать, что T не равно U.

2. Свойства равенства

Отныне мы будем рассматривать только эгалитарные теории. Пусть $\mathcal{T}$ — такая теория. Пусть $\mathcal{T}_0$ — теория, у которой те же знаки, что и у $\mathcal{T}$, и у которой аксиомы даются лишь схемами S1 — S7. Теория $\mathcal{T}_0$ менее сильна, чем $\mathcal{T}$ (§ 2, n° 4), и не имеет констант. Три следующие теоремы являются теоремами теории $\mathcal{T}_0$.

Теорема 1. $x=x$.

Обозначим через S соотношение $x=x$ теории $\mathcal{T}_0$. Согласно С27 (§ 4, n° 1), при всяком соотношении R из $\mathcal{T}_0$ соотношение $(\forall x)(R\Leftrightarrow R)$ есть теорема в $\mathcal{T}_0$; следовательно, согласно S7, соотношение $\tau_x(R)=\tau_x(R)$, т. е. $(\tau_x(R)|x)S$, есть теорема в $\mathcal{T}_0$. Принимая за R соотношение „не S" и учитывая С26 (§ 4, n° 1), получим, что $(\forall x)S$ есть теорема в $\mathcal{T}_0$. Согласно С30 (§ 4, n° 3), S поэтому есть теорема теории $\mathcal{T}_0$.

Соотношение $(\forall x)(x=x)$ также является теоремой в $\mathcal{T}_0$; и если T — терм теории $\mathcal{T}_0$, то $T=T$ есть теорема в $\mathcal{T}_0$ (ср. § 4, n° 3). Аналогично можно преобразовать последующие теоремы в теоремы, в которых не встречается ни одной буквы, или в метаматематические критерии. Мы больше не будем делать таких преобразований, но часто будем пользоваться ими неявно.

Теорема 2. $(x=y)\Leftrightarrow(y=x)$.

Предположим, что соотношение $x=y$ верно. Согласно S6, соотношение $(x=y)\Rightarrow((x|y)(y=x)\Leftrightarrow(y|y)(y=x))$, т. е. $(x=y)\Rightarrow((x=x)\Leftrightarrow(y=x))$, верно. Следовательно, $(x=x)\Leftrightarrow(y=x)$ верно. В силу теоремы 1 тогда верно $y=x$, что доказывает теорему.

Теорема 3. $((x=y)$ и $(y=z))\Rightarrow(x=z)$.

Присоединим гипотезы $x=y$, $y=z$ к аксиомам теории $\mathcal{T}_0$. Согласно S6, соотношение $(x=y)\Rightarrow((x=z)\Leftrightarrow(y=z))$ верно. Следовательно, $(x=z)\Leftrightarrow(y=z)$ и тем самым $x=z$ верны, что доказывает теорему.

С44. *Пусть x — буква, T, U, $V\{x\}$ — термы теории $\mathcal{T}_0$. Соотношение $(T=U)\Rightarrow(V\{T\}=V\{U\})$ есть теорема теории $\mathcal{T}_0$.*

В самом деле, пусть y и z — две буквы, отличные друг от друга и отличные от x и от букв, встречающихся в T, U, V. Присоединим гипотезу $y=z$. Тогда, согласно S6,

$$((y|z)(V\{y\}=V\{z\}))\Leftrightarrow(V\{y\}=V\{z\}),$$

т. е. $(V\{y\}=V\{y\})\Leftrightarrow(V\{y\}=V\{z\})$, верно. Но $V\{y\}=V\{y\}$ верно, согласно теореме 1. Следовательно, верно $V\{y\}=V\{z\}$. Из всего этого вытекает, что $(y=z)\Rightarrow(V\{y\}=V\{z\})$ есть теорема теории $\mathcal{T}_0$; обозначим эту теорему через A. Но $(T|y)(U|z)A$ есть не что иное, как $(T=U)\Rightarrow(V\{T\}=V\{U\})$.

Мы говорим, что соотношение вида $T=U$, где T и U — термы теории $\mathcal{T}$, есть *уравнение*; отсюда *решением* (в $\mathcal{T}$) соотношения $T=U$, рассматриваемого как уравнение относительно некоторой буквы x, служит всякий такой терм V теории $\mathcal{T}$, что $T\{V\}=U\{V\}$ есть теорема в $\mathcal{T}$ (§ 2, n° 2).

Пусть T и U — два терма теории $\mathcal{T}$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — буквы, встречающиеся в T, но не в U. Если $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(T=U)$ есть теорема в $\mathcal{T}$, говорят, что U *представляется в виде* T (в $\mathcal{T}$). Пусть R — соотношение в $\mathcal{T}$, y — буква. Пусть V — решение (в $\mathcal{T}$) для R, рассматриваемого как соотношение по y. Если всякое решение (в $\mathcal{T}$) для R, рассматриваемого как соотношение по y, может быть представлено в виде V, говорят, что V есть *полное решение* (или *общее решение*) для R (в $\mathcal{T}$).

3. Функциональные соотношения

Пусть R — знакосочетание, x — буква. Пусть y, z — буквы, отличные друг от друга и от x и не встречающиеся в R. Пусть y', z' — две другие буквы, обладающие теми же свойствами. В силу CS8, CS9 (§ 4, n° 1), CS2, CS5 (§ 1, n° 2), CS6 (§ 3, n° 4) формулы

$$(\forall y)(\forall z)(((y|x)R \text{ и } (z|x)R)\Rightarrow(y=z))$$

и

$$(\forall y')(\forall z')(((y'|x)R \text{ и } (z'|x)R)\Rightarrow(y'=z'))$$

тождественны. Если R — соотношение теории $\mathcal{T}$, то знакосочетание, так определенное, есть соотношение в $\mathcal{T}$, обозначаемое через „существует самое большее одно x, такое, что R"; буква x в нем не встречается. Если это соотношение — теорема в $\mathcal{T}$, то говорят, что R *однозначно* по x в $\mathcal{T}$. Для проверки однозначности R в $\mathcal{T}$ достаточно проверить $y=z$ в теории, получаемой из $\mathcal{T}$ присоединением аксиом $(y|x)R$ и $(z|x)R$, где y и z — буквы, отличные друг от друга и от x и не встречающиеся ни в R, ни в явных аксиомах теории $\mathcal{T}$.

С45. *Пусть R — соотношение теории $\mathcal{T}$, а x — буква, не являющаяся константой теории $\mathcal{T}$. Если R однозначно по x в $\mathcal{T}$, то $R\Rightarrow(x=\tau_x(R))$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. Обратно, если*

для некоторого терма T теории $\mathcal{T}$, не содержащего x, $R \Rightarrow (x = T)$ есть теорема в $\mathcal{T}$, то R однозначно по x в $\mathcal{T}$.

Предположим, что R однозначно по x в $\mathcal{T}$, и докажем, что $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ есть теорема в $\mathcal{T}$. Присоединим гипотезу R. Тогда $(\tau_x(R)|x)R$ верно, согласно S5; следовательно, „R и $(\tau_x(R)|x)R$“ тоже верно. Но так как R однозначно по x,

$$(R \text{ и } (\tau_x(R)|x)R) \Rightarrow (x = \tau_x(R))$$

— теорема в $\mathcal{T}$, согласно C30 (§ 4, n° 3). Значит, $x = \tau_x(R)$ верно.

Обратно, предположим, что $R \Rightarrow (x = T)$ есть теорема в $\mathcal{T}$. Пусть y, z — буквы, отличные друг от друга и от x и не встречающиеся ни в R, ни в явных аксиомах теории $\mathcal{T}$. Так как x не есть константа в $\mathcal{T}$ и не встречается в T, то соотношения $(y|x)R \Rightarrow (y = T)$ и $(z|x)R \Rightarrow (z = T)$ суть теоремы в $\mathcal{T}$. Присоединим гипотезы $(y|x)R$ и $(z|x)R$. Тогда $y = T$ и $z = T$ верны и, следовательно, верно $y = z$.

Пусть R — соотношение в $\mathcal{T}$. Соотношение

„$(\exists x)R$ и существует самое большее одно x, такое, что R“

обозначается словами „существует единственное (или „существует и единственно“) x, такое, что R“. Если это соотношение является теоремой в $\mathcal{T}$, то мы говорим, что R есть *соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$*.

C46. *Пусть R — соотношение теории $\mathcal{T}$, а x — буква, не являющаяся константой этой теории. Если R есть соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$, то $R \Leftrightarrow (x = \tau_x(R))$ есть теорема в $\mathcal{T}$. Обратно, если для некоторого терма T из $\mathcal{T}$, не содержащего x, $R \Leftrightarrow (x = T)$ есть теорема в $\mathcal{T}$, то R есть соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$.*

Предположим, что R — соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$. Тогда $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ есть теорема в $\mathcal{T}$, согласно C45. С другой стороны, $(\exists x)R$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. Согласно S6, соотношение

$$(x = \tau_x(R)) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (\exists x)R)$$

есть теорема в $\mathcal{T}$. Если присоединить гипотезу $x = \tau_x(R)$, то R становится верным. Следовательно, $(x = \tau_x(R)) \Rightarrow R$ есть теорема в $\mathcal{T}$.

Обратно, если $R \Leftrightarrow (x = T)$ есть теорема в $\mathcal{T}$, то R однозначно по x в $\mathcal{T}$, согласно C45. Кроме того, $(T|x)R \Leftrightarrow (T = T)$ есть теорема в $\mathcal{T}$; следовательно, $(T|x)R$, а тем самым и $(\exists x)R$ суть теоремы в $\mathcal{T}$.

Если R — соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$, то, стало быть, R эквивалентно соотношению $x = \tau_x(R)$, которое часто бывает более удобным для действий с ним. Поэтому обычно вводят какой-нибудь сокращающий символ Σ для изображения терма $\tau_x(R)$. Такой символ называется *символом, функциональным* в теории $\mathcal{T}$.

Интуитивно, Σ изображает единственный объект, который обладает свойством, определяемым через R. Например, в теории, где верна теорема „y есть действительное число, большее или равное нулю“, соотношение „x есть действительное число, большее или равное нулю, и $y = x^2$“ есть соотношение, функциональное по x. В качестве соответствующего функционального символа берут $\sqrt{y}$ или $y^{1/2}$.

C47. *Пусть x — буква, не являющаяся константой теории $\mathcal{T}$, а $R\{x\}$ и $S\{x\}$ — два соотношения в $\mathcal{T}$. Если $R\{x\}$ есть соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$, то соотношение $S\{\tau_x(R)\}$ эквивалентно соотношению $(\exists x)(R\{x\}$ и $S\{x\})$.*

В самом деле, из C46 и C43 вытекает, что $(R\{x\}$ и $S\{x\})$ эквивалентно с $(R\{x\}$ и $S\{\tau_x(R)\})$; так как $S\{\tau_x(R)\}$ не содержит x, то $(\exists x)(R\{x\}$ и $S\{\tau_x(R)\})$ эквивалентно с

$$S\{\tau_x(R)\} \quad \text{и} \quad (\exists x)R,$$

согласно C33 (§ 4, n° 3); в заключение заметим, что $(\exists x)R$ верно, потому что R — соотношение, функциональное по x.

Упражнения

Во всех этих упражнениях $\mathcal{T}$ обозначает эгалитарную теорию.

1) $x = y$ есть соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$.

2) Пусть R — соотношение в $\mathcal{T}$, x и y — различные буквы. Тогда соотношения $(\exists x)(x = y$ и $R)$, $(y|x)R$ эквивалентны в $\mathcal{T}$.

3) Пусть R и S — соотношения в $\mathcal{T}$, T — терм в $\mathcal{T}$, x и y — различные буквы. Предполагается, что y не является константой теории $\mathcal{T}$ и x не встречается в T. Пусть $\mathcal{T}'$ — теория, получаемая присоединением S к аксиомам теории $\mathcal{T}$. Если R — соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}'$, и $(T|y)S$ — теорема в $\mathcal{T}$, то $(T|y)R$ есть соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$.

4) Пусть R и S — соотношения теории $\mathcal{T}$, x — буква, не являющаяся константой этой теории. Если R — соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$, и $R \Leftrightarrow S$ — теорема в $\mathcal{T}$, то S есть соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$.

5) Пусть R, S, T — соотношения в $\mathcal{T}$, x — буква. Если R — соотношение, функциональное по x в $\mathcal{T}$, показать, что следующие соотношения являются теоремами в $\mathcal{T}$:

$$(\text{не } (\exists x)(R \text{ и } S)) \Leftrightarrow (\exists x)(R \text{ и } (\text{не } S)),$$
$$(\exists x)(R \text{ и } (S \text{ и } T) \Leftrightarrow ((\exists x)(R \text{ и } S) \text{ и } (\exists x)(R \text{ и } T)),$$
$$(\exists x)(R \text{ и } (S \text{ или } T)) \Leftrightarrow ((\exists x)(R \text{ и } S) \text{ или } (\exists x)(R \text{ и } T)).$$

6) Показать, что если в $\mathcal{T}$ схема $(\exists x)R \Rightarrow R$ дает неявные аксиомы, то $x = y$ есть теорема теории $\mathcal{T}$ (ср. упр. 1).

7) Показать, что если в $\mathcal{T}$ схема $(R \Leftrightarrow S) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$ дает неявные аксиомы, то $x = y$ есть теорема теории $\mathcal{T}$ (принять за R соотношение $x = x$, за S — соотношение $x = y$, а затем в полученную аксиому подставить x вместо y)[1].

---

[1]) Мы увидим позже, что в теории множеств $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$ является теоремой (гл. II, § 1, упр. 2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕРМОВ И СООТНОШЕНИЙ

Когда метаматематика перерастает элементарный уровень настоящей главы, она широко использует результаты математики; мы уже отмечали это во введении. Цель нашего приложения — дать пример рассуждений такого рода[1]). Мы начнем с установления некоторых результатов, относящихся к математической теории *свободных моноидов* („Алгебра", гл. I, § 1, n° 3); затем мы рассмотрим метаматематическое „применение" их к характеристике термов и соотношений произвольной теории.

1. Знаки и слова

°Пусть S — непустое множество, элементы которого будут называться далее *знаками* (эта терминология приспособлена к метаматематическому применению, которое мы имеем в виду). Пусть $L_0(S)$ — свободный моноид, порожденный множеством S („Алгебра", гл. I, § 1, n° 3); его элементы (называемые *словами*) могут быть отождествлены с конечными последовательностями $A=(s_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ элементов из S; мы будем записывать закон композиции в $L_0(S)$ мультипликативно, так что AB есть последовательность, получаемая соединением последовательностей A и B. Пустое слово $\varnothing$ является нейтральным элементом в $L_0(S)$. Напомним, что *длина* $l(A)$ слова $A\in L_0(S)$ есть число элементов в последовательности A; $l(AB)=l(A)+l(B)$; слова́ длины 1 суть знаки. Обозначим через L(S) множество непустых слов моноида $L_0(S)$.

Предположим, кроме того, что задано отображение $s\to n(s)$ множества S в множество **N** целых чисел, больших или равных нулю; для всякого непустого слова $A=(s_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ из L(S) положим $n(A)=\sum_{i=0}^{k} n(s_i)$ и $n(\varnothing)=0$; мы говорим, что $n(A)$ есть *вес* слова A. Очевидно, что $n(AB)=n(A)+n(B)$.

Если $A=A'BA''$, то мы говорим, что слово B есть *сегмент* слова A (*истинный* сегмент, если, кроме того, $B\neq A$). Если A' (соответственно A'') пусто, то мы говорим, что B есть *начальный* (соответственно *концевой*) сегмент слова A. Если $l(A')=k$, то мы говорим, что B начинается на $(k+1)$-м месте.

[1]) Результаты, установленные в настоящем приложении, не будут использоваться в дальнейшей части Трактата.

Если $A=BCDEF$ (где слова B, C, D, E, F могут быть пустыми), мы говорим, что сегменты C и E слова A *не пересекаются.*

2. Знаменательные слова

Назовем *знаменательной последовательностью* всякую последовательность $(A_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ слов из $L_0(S)$, обладающую следующим свойством: для каждого слова A_i в этой последовательности выполняется одно из двух следующих условий:

1° A_i есть знак веса 0.

2° Существуют p слов $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}$ из рассматриваемой последовательности с индексами, меньшими i, и знак f веса p, такие, что $A_i=fA_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_p}$.

Знаменательными словами мы называем слова, встречающиеся в знаменательных последовательностях. Сразу же получается следующий результат:

Предложение 1. *Если $A_1, A_2, \ldots, A_p$ являются знаменательными словами, а f есть знак веса p, то слово $fA_1A_2\ldots A_p$ знаменательно.*

3. Характеристика знаменательных слов

Слово $A\in L_0(S)$ называется *равновесным*, если оно обладает двумя следующими свойствами:

1° $l(A)=n(A)+1$ (откуда следует, что A не пусто);

2° для всякого истинного начального сегмента B слова A выполняется неравенство $l(B)\leqslant n(B)$.

Предложение 2. *Для того чтобы слово было знаменательным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равновесным.*

В самом деле, пусть A — знаменательное слово, встречающееся в знаменательной последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n$; мы покажем индукцией по k, что каждое слово A_k равновесно. Предположим, что это уже установлено для всех A_j с индексом $j<k$, и докажем это для A_k. Если A_k — знак веса 0 (что является единственной возможной гипотезой при $k=1$), то A_k равновесно, потому что $l(A_k)=1$ и $n(A_k)=0$. В противном случае $A_k=fB_1B_2\ldots B_p$, где f — знак веса p и слова B_j имеют вид A_{i_j} с $i_j<k$, а следовательно, являются, по предположению, равновесными словами. Итак,

$$\begin{aligned} l(A_k) &= 1+l(B_1)+l(B_2)+\ \ldots\ +l(B_p)= \\ &= 1+(n(B_1)+1)+(n(B_2)+1)+\ \ldots\ +(n(B_p)+1)= \\ &= 1+p+n(B_1)+n(B_2)+\ \ldots\ +n(B_p)=1+n(A_k). \end{aligned}$$

Пусть, с другой стороны, C — истинный начальный сегмент слова A_k и пусть q — наибольшее из целых чисел $m<p$, таких, что B_m есть сегмент слова C; тогда $C=fB_1B_2\ldots B_qD$, где

D — истинный начальный сегмент слова B_{q+1}. Следовательно,

$$l(C) = 1 + l(B_1) + \ldots + l(B_q) + l(D) \leqslant$$
$$\leqslant 1 + (n(B_1) + 1) + \ldots + (n(B_q) + 1) + n(D) \leqslant$$
$$\leqslant p + n(B_1) + \ldots + n(B_q) + n(D) = n(C).$$

Следовательно, A_k равновесно.

Чтобы доказать, что, обратно, всякое равновесное слово знаменательно, нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. Пусть A — равновесное слово. Для каждого целого числа k, такого, что $0 \leqslant k < l(A)$, существует и единствен равновесный сегмент S слова A, начинающийся на $(k+1)$-м месте.

Единственность сегмента S вытекает сразу же из следующего замечания: если T — равновесное слово, то, по определению, ни один истинный начальный сегмент слова T не является равновесным. Докажем существование сегмента S. Положим $A = BC$, где $l(B) = k$. Для всякого такого i, что $0 \leqslant i \leqslant q = l(C)$, пусть C_i есть начальный сегмент слова C длины i. Так как B — истинный начальный сегмент слова A, то

$$l(C_q) = l(A) - l(B) \geqslant n(A) + 1 - n(B) = n(C_q) + 1.$$

С другой стороны, $0 = l(C_0) \leqslant n(C_0) = 0$. Пусть i — наибольшее из целых чисел $j < q$, таких, что $l(C_h) \leqslant n(C_h)$ для $0 \leqslant h \leqslant j$; тогда $l(C_i) \leqslant n(C_i)$ и $l(C_{i+1}) \geqslant n(C_{i+1}) + 1$. Покажем, что C_{i+1} равновесно. Условие, относящееся к истинным начальным сегментам, выполнено в силу определения числа i. С другой стороны,

$$n(C_{i+1}) + 1 \leqslant l(C_{i+1}) = l(C_i) + 1 \leqslant n(C_i) + 1 \leqslant n(C_{i+1}) + 1;$$

следовательно, $l(C_{i+1}) = n(C_{i+1}) + 1$, что завершает доказательство.

Лемма 2. Всякое равновесное слово A может быть представлено в виде $A = fA_1A_2 \ldots A_p$, где все A_i равновесны и $n(f) = p$.

В самом деле, пусть f — начальный знак слова A. Согласно лемме 1, A можно записать в виде $fA_1A_2 \ldots A_p$, где все A_i равновесны: достаточно определить A_i по индукции как равновесный сегмент слова A, начинающийся на $k(i)$-м месте, где $k(i) = 2 + \sum_{j<i} l(A_j)$. Кроме того,

$$1 + l(A_1) + \ldots + l(A_p) = l(A) = n(A) + 1 =$$
$$= n(f) + n(A_1) + \ldots + n(A_p) + 1 =$$
$$= n(f) + (l(A_1) - 1) + \ldots + (l(A_p) - 1) + 1,$$

откуда $n(f) = p$.

Коль скоро леммы доказаны, нетрудно показать индукцией по длине слова A, что всякое равновесное слово A знаменательно ввиду леммы 2 и предложения 1.

Следствие 1. *Пусть A — знаменательное слово. Для всякого целого числа k, такого, что $0 \leqslant k < l(A)$, существует и является единственным знаменательный сегмент слова A, начинающийся на $(k+1)$-м месте.*

Следствие 2. *Всякое знаменательное слово A может быть представлено, причем единственным образом, в виде $fA_1A_2 \ldots A_p$, где все A_i знаменательны и $n(f) = p$.*

4. *Применение к знакосочетаниям произвольной математической теории*

Предположим, что множество S есть множество знаков математической теории $\mathcal{T}$. Положим $n(\square) = 0$, $n(\tau) = n(\neg) = 1$, $n(\vee) = 2$, $n(\boldsymbol{x}) = 0$ для каждой буквы $\boldsymbol{x}$; наконец, для каждого специального знака $\boldsymbol{s}$ теории $\mathcal{T}$ пусть $n(\boldsymbol{s})$ есть вес этого $\boldsymbol{s}$, фиксируемый заданием этой теории $\mathcal{T}$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — знакосочетание теории $\mathcal{T}$. Обозначим символом $\boldsymbol{A}^*$ слово, получаемое стиранием всех связей в $\boldsymbol{A}$, и будем говорить, что знакосочетание $\boldsymbol{A}$ *равновесно*, если $\boldsymbol{A}^*$ равновесно (в $L_0(S)$). Мы будем называть *сегментом* знакосочетания $\boldsymbol{A}$ всякое знакосочетание, получаемое путем снабжения какого-либо сегмента $\boldsymbol{S}$ слова $\boldsymbol{A}^*$ теми связями, которые в $\boldsymbol{A}$ соединяли два знака сегмента $\boldsymbol{S}$.

Критерий 1. *Если $\boldsymbol{A}$ — терм или соотношение теории $\mathcal{T}$, то $\boldsymbol{A}$ — равновесное знакосочетание.*

В самом деле, пусть $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ есть формативная конструкция теории $\mathcal{T}$, в которой встречается $\boldsymbol{A}$. Рассуждая по индукции, предположим доказанным, что все $\boldsymbol{A}_j$ с индексом $j < i$ равновесны, и докажем, что знакосочетание $\boldsymbol{A}_i$ равновесно. Это устанавливается совершенно так же, как в первой части доказательства предложения 2, за исключением того случая, когда $\boldsymbol{A}_i$ имеет вид $\tau_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B})$ с $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_j$, $j < i$. В этом случае пусть $\boldsymbol{C}$ есть знакосочетание, получаемое замещением буквы $\boldsymbol{x}$ на каждом месте, где $\boldsymbol{x}$ встречается в $\boldsymbol{B}$, символом $\square$; слово $\boldsymbol{A}_i^*$ тождественно с $\tau\boldsymbol{C}^*$. Но $\boldsymbol{B}^*$ равновесно; следовательно, и $\boldsymbol{C}^*$ равновесно (ибо $n(\square) = n(\boldsymbol{x}) = 0$); следовательно, $\boldsymbol{A}_i^*$ тоже равновесно.

Итак, мы получили необходимое условие для того, чтобы знакосочетание теории $\mathcal{T}$ было термом или соотношением. Это условие, как мы увидим, не является достаточным.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — равновесное знакосочетание теории $\mathcal{T}$. Если $\boldsymbol{A}$ начинается с буквы или знака $\square$, то $\boldsymbol{A}$ неизбежно сводится к этому начальному знаку (следствие 2 предложения 2). Во всех остальных

случаях мы определим знакосочетание или знакосочетания, *антецедентные* к A.

1° Если A начинается с $\neg$, или с $\vee$, или со специального знака, то A^* представимо единственным образом в виде $fB_1B_2 \ldots B_p$, где f — знак веса $p \geqslant 1$ и все B_i равновесны (следствие 2 предложения 2). Назовем знакосочетаниями, антецедентными к A, сегменты A_1, $A_2, \ldots, A_p$ знакосочетания A, соответствующие сегментам $B_1, B_2, \ldots, B_p$ слова A^*. Кроме того, мы скажем, что A — *совершенно равновесное* знакосочетание, если A тождественно с $fA_1A_2 \ldots A_p$, или, иначе говоря, если в A ни одна связь не соединяет f с каким-нибудь из B_i или два разных B_i друг с другом.

2° Если A начинается с τ, то A^* имеет вид τB, где B — равновесно (следствие 2 предложения 2). Мы назовем знакосочетанием, антецедентным к A, любое из знакосочетаний A_1, определяемых следующим образом: все знаки $\square$ в B, связанные в A с начальным τ, заменяются буквой x, отличной от других букв, встречающихся в B, а связи, соединяющие в A два знака знакосочетания B, восстанавливаются. [Если вместо x подставить букву y, также не встречающуюся в B, то получится не что иное, как знакосочетание $(y|x)A_1$).] Кроме того, мы скажем, что A есть *совершенно равновесное знакосочетание*, если A тождественно с $\tau_x(A_1)$, или, иначе говоря, если ни одна связь не соединяет начальное τ со знаками из B, отличными от $\square$.

Тогда можно сформулировать следующий критерий:

Критерий 2. *Пусть A — равновесное знакосочетание теории $\mathcal{T}$. Для того чтобы A было термом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий*: 1) *A сводится к одной букве*; 2) *A начинается с τ, совершенно равновесно, и антецедентные знакосочетания суть соотношения* (согласно CF8, достаточно проверить, что какое-нибудь одно антецедентное знакосочетание есть соотношение); 3) *A начинается с субстантивного знака, совершенно равновесно, и антецедентные знакосочетания суть термы.*

Для того чтобы A было соотношением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий: 1) *A начинается с $\vee$ или $\neg$, совершенно равновесно, и антецедентные знакосочетания суть соотношения*; 2) *A начинается с реляционного знака, совершенно равновесно, и антецедентные знакосочетания суть термы.*

Эти условия достаточны, согласно критериям CF1 — CF4 (§ 1, n° 4). Докажем, что они необходимы. Если A — соотношение, то мы уже видели (§ 1, n° 3), что A начинается с $\vee$, с $\neg$ или с реляционного знака. Во всех трех случаях рассуждаем аналогично. Если, например, A начинается с $\vee$, то A имеет вид $\vee BC$, где B и C — соотношения, так что B, C суть знакосочетания, антецедентные для A; следовательно, знакосочетание A совершенно равновесно. Если

A — терм, то A либо сводится к одной букве, либо начинается с субстантивного знака, или с τ. Во втором случае мы рассуждаем, как ранее. Если A начинается с τ, то из определения формативной конструкции видно, что A имеет вид $\tau_x(B)$, где B — соотношение и x — буква. Поэтому можно принять B за антецедентное к A, и, следовательно, A — совершенно равновесное знакосочетание.

Если требуется узнать, является ли данное знакосочетание A (не сводящееся к одной букве) соотношением (соответственно термом) теории $\mathcal{T}$, то сначала надо проверить, равновесно ли A и начинается ли оно с $\vee$, или с $\neg$, или с реляционного знака (соответственно с τ или субстантивного знака). Затем надо образовать антецедентное или антецедентные знакосочетания и проверить, является ли A совершенно равновесным знакосочетанием. Сделав это, мы придем к аналогичной задаче, но касающейся более коротких знакосочетаний. Постепенно, шаг за шагом, мы придем к знакосочетаниям, состоящим каждое из одного знака и допускающим тем самым непосредственное решение вопроса.

Замечание. Исключая некоторые математические теории, особенно бедные аксиомами (ср. упр. 7), мы, вообще говоря, не располагаем методом, подобным предыдущему, который позволял бы узнать, является ли данное соотношение R теории $\mathcal{T}$ теоремой в $\mathcal{T}$.

Упражнения

1) Пусть S — множество знаков, A — слово из $L_0(S)$, B и C — знаменательные сегменты слова A. Тогда либо B — сегмент слова C, либо C — сегмент слова B, либо B и C не пересекаются.

2) Пусть S — множество знаков и пусть A — знаменательное слово из $L_0(S)$, представимое в виде $A'BA''$, где B знаменательно. Предположим, что C — знаменательное слово; тогда слово $A'CA''$ знаменательно (использовать упр. 1).

3) Пусть E — множество, f — отображение из $E \times E$ в E („закон внутренней композиции", см. „Алгебра", гл. 1, § 1). Пусть S — множество знаков, являющееся суммой множества E и множества, состоящего из единственного элемента f; мы полагаем $n(f) = 2$, $n(x) = 0$ для всякого $x \in E$.

а) Пусть M — множество знаменательных слов из $L_0(S)$; показать, что существует единственное отображение v из M в E, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $v(x) = x$ для всякого $x \in E$; 2) если A и B — два знаменательных слова, то $v(fAB) = f(v(A), v(B))$.

б) Для каждого слова $A = (s_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ из $L_0(S)$; пусть A^* есть слово (s_{i_k}), где i_k — индексы i, такие, что $s_i \neq f$, и расположенные в порядке возрастания. Два слова A, B из $L_0(S)$ называются подобными, если $A^* = B^*$. Показать, что если закон композиции f ассоциативен [т. е. если $f(f(x, y)z) = f(x, f(y, z))$], то $v(A) = v(B)$ для двух подобных знаменательных слов („общая теорема ассоциативности"). (Знаменательное слово $A = (s_i)_{0 \leqslant i \leqslant 2n}$ называется нормальным, если $s_i = f$ для $i = 0, 2, 4, \ldots, 2n-2$ и $s_i \neq f$ — для других индексов. Показать, что каждое знаменательное слово A подобно единственному нормальному слову A', и доказать, что $v(A) = v(A')$, с помощью индукции по длине слова A.)

¶ 4) Пусть A — терм или соотношение теории $\mathcal{T}$. Рассмотрим последовательность знакосочетаний, определенную следующим образом.

Запишем сначала A; если A сводится к одной букве, то построение считается законченным. В противном случае запишем знакосочетание или знакосочетания, антецедентные к A (если A начинается с τ, то выбирается произвольно какое-нибудь одно из антецедентных знакосочетаний). Затем запишем, если возможно, знакосочетание или знакосочетания, антецедентные к предыдущим знакосочетаниям, не сводящимся к буквам. И т. д.

а) Если изменить порядок этой последовательности знакосочетаний, то получится формативная конструкция.

б) Пусть B — сегмент знакосочетания A, равновесный и такой, что ни один знак из B не связан в A со знаком, не входящим в B. Показать, что B — терм или соотношение [использовать п. а) и упр. 1].

в) Заменим B в A термом (соответственно соотношением), если B есть терм (соответственно соотношение). Показать, что полученное знакосочетание есть терм, если A — терм, и есть соотношение, если A — соотношение.

5) Пусть A — знакосочетание теории $\mathcal{T}$, T — терм теории $\mathcal{T}$, x — буква. Если $(T|x)A$ — терм (соответственно соотношение), то и A — терм (соответственно соотношение). (Использовать упр. 4.)

6) Соотношение теории $\mathcal{T}$ называется *логически неприводимым*, если оно начинается с реляционного знака. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — различные логически неприводимые соотношения теории $\mathcal{T}$. *Логической конструкцией* над базисом $R_1, R_2, \ldots, R_n$ называют всякую последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_p$ таких формул теории $\mathcal{T}$, что для каждого A_i выполняется одно из следующих условий: 1° A_i есть одно из соотношений $R_1, R_2, \ldots, R_n$; 2° существует знакосочетание A_j, предшествующее A_i и такое, что A_i есть $\neg A_j$; 3° существуют два знакосочетания A_j и A_k, предшествующие A_i и такие, что A_i есть $\vee A_jA_k$.

а) Показать, что знакосочетание логической конструкции над базисом $R_1, R_2, \ldots, R_n$ суть соотношения теории $\mathcal{T}$. Соотношение, встречающееся в логической конструкции над базисом $R_1, R_2, \ldots, R_n$, называется *логически построенным* над $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

б) Если R и S логически построены над $R_1, R_2, \ldots, R_n$, то же можно утверждать и о $\neg R$, $\vee RS$, $\Rightarrow RS$, „R и S", $R \Leftrightarrow S$.

в) Пусть R — соотношение теории $\mathcal{T}$. Рассмотрим последовательность соотношений, определенную следующим образом. Запишем сначала R; если R логически неприводимо, то построение считается законченным. В противном случае запишем знакосочетание или знакосочетания, антецедентные к R (они суть вполне определенные *соотношения*). Затем запишем, если возможно, знакосочетание или знакосочетания, антецедентные к тем из предшествующих знакосочетаний, которые не являются логически неприводимыми, и т. д. Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — различные логически неприводимые соотношения, даваемые этим построением; назовем их *логическими составляющими* соотношения R. Показать, что R логически построено над своими логическими составляющими, но что если из последовательности $R_1, R_2, \ldots, R_n$ удалить хотя бы одно соотношение, то R уже не будет логически построено над оставшимися соотношениями.

г) Пусть R — произвольное соотношение, а $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — различные логически неприводимые соотношения, такие, что: 1° R логически построено над $R_1, R_2, \ldots, R_n$; 2° если удалить хотя бы одно соотношение из последовательности $R_1, R_2, \ldots, R_n$, то R уже не будет логически построено над оставшимися соотношениями. Показать, что $R_1, R_2, \ldots, R_n$ суть логические составляющие соотношения R.

¶ 7) Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — различные логически неприводимые соотношения (упр. 6) теории $\mathcal{T}$. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ есть логическая

конструкция над базисом $R_1, R_2, \ldots, R_n$. Предположим, что каждому R_j присвоен один из знаков 0, 1. Присвоим тогда каждому A_i тоже один из знаков 0, 1 по следующему правилу: 1° если A_i тождественно с R_j, то A_i получает тот же знак, что и R_j; 2° если A_i тождественно с $\neg A_j$, где A_j предшествует A_i, то A_i получает знак 1 (соответственно 0), если A_j получило знак 0 (соответственно 1); 3° если A_i тождественно с $\vee A_jA_k$, то A_i получает знак 1, если A_j и A_k получили оба знак 1, и получает знак 0 в остальных случаях. (Мы говорим, что применяется следующее „символическое правило": $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$, $\vee 11 = 1$, $\vee 10 = \vee 01 = \vee 00 = 0$.)

а) Показать, что существует только один способ приписать знак каждому A_i, согласно предыдущему правилу.

б) Если R логически построено над $R_1, R_2, \ldots, R_n$, то знак, присвоенный соотношению R, не зависит от логической конструкции над базисом $R_1, R_2, \ldots, R_n$, в которой это R встречается.

в) Если R и S логически построены над $R_1, R_2, \ldots, R_n$ и если R и $\Rightarrow RS$ присвоены знаки 0, то знак, присвоенный соотношению S, есть 0.

г) Предположим отныне, что аксиомы теории $\mathcal{T}$ даются *только* схемами S1 — S4. Пусть R — теорема в $\mathcal{T}$, а $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — ее логические составляющие. Показать, что, каким бы способом ни приписывать один из знаков 0 и 1 этим $R_1, R_2, \ldots, R_n$, соответствующий знак, полученный теоремой R, есть 0 [установить это сначала в случае, когда R есть аксиома в $\mathcal{T}$, затем в общем случае рассмотреть доказательство теоремы R и применить в)].

д) Пусть R — логически неприводимое соотношение теории $\mathcal{T}$. Показать, что ни R, ни „не R" не суть теоремы теории $\mathcal{T}$. В частности, $\mathcal{T}$ непротиворечива [использовать г)].

е) Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — различные логически неприводимые соотношения из $\mathcal{T}$. Рассмотрим все соотношения вида „R'_1 или R'_2 или ... или R'_n", где для каждого i R'_i есть одно из двух соотношений: R_i или „не R_i". Пусть эти соотношения суть $S_1, S_2, \ldots, S_p$. Пусть, далее, $T_1, T_2, \ldots, T_q$ — соотношения вида „S_{i_1} и S_{i_2} и ... и S_{i_r}", где $i_1, i_2, \ldots, i_r$ — любая строго возрастающая последовательность индексов. Пусть, наконец, T_0 есть соотношение „R_1 или (не R_1)", являющееся теоремой в $\mathcal{T}$. Показать, что всякое соотношение, логически построенное над $R_1, R_2, \ldots, R_n$, эквивалентно в $\mathcal{T}$ одному и только одному из соотношений $T_0, T_1, \ldots, T_q$. [Доказать сначала, что каждое соотношение R_i эквивалентно в $\mathcal{T}$ одному из соотношений $T_0, T_1, \ldots, T_q$; если R логически построено над $R_1, R_2, \ldots, R_n$, рассуждать последовательно о логической конструкции над базисом $R_1, R_2, \ldots, R_n$, содержащей R; для доказательства единственности использовать г).]

ж) Пусть R — соотношение теории $\mathcal{T}$, а $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — его логические составляющие. Для того чтобы R было теоремой в $\mathcal{T}$, необходимо и достаточно, чтобы при любом способе присваивать один из знаков 0 или 1 соотношениям $R_1, R_2, \ldots, R_n$ соответствующий знак, получаемый соотношением R, был 0.

¶ 8) Пусть $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — логически неприводимые соотношения теории $\mathcal{T}$ (упр. 6). Присвоим каждому из R_i один из знаков 0, 1, 2. Всякому соотношению из любой логической конструкции над базисом $R_1, R_2, \ldots, R_n$ мы присваиваем тогда один из знаков 0, 1, 2, согласно

символическому правилу (упр. 7):

$$\neg 0 = 1, \quad \neg 1 = 0, \quad \neg 2 = 2;$$
$$\vee\, 00 = \vee\, 01 = \vee\, 02 = \vee\, 10 = \vee\, 20 = \vee\, 22 = 0;$$
$$\vee\, 11 = 1, \quad \vee\, 12 = \vee\, 21 = 2.$$

а) Если R логически построено над $R_1, R_2, \ldots, R_n$, то знак, присвоенный таким образом соотношению R, не зависит от логической конструкции над базисом $R_1, R_2, \ldots, R_n$, в которой R не встречается.

б) Предположим, что аксиомы теории $\mathcal{T}$ даются только схемами S2, S3, S4. Пусть R — теорема теории $\mathcal{T}$. Показать, что, каким бы способом ни приписывать один из знаков 0, 1, 2 логическим составляющим теоремы R, соответствующий знак, получаемый теоремой R, есть 0. Напротив, если S логически неприводимо и получило знак 2, то знак, полученный соотношением (S или S) $\Rightarrow S$, есть 2. Вывести отсюда, что теория $\mathcal{T}$ не эквивалентна теории, имеющей те же знаки, что и $\mathcal{T}$, и аксиомы, основанные на схемах S1, S2, S3, S4.

в) Доказать аналогичный результат для теорий, базирующихся только на схемах S1, S3, S4 или только на схемах S1, S2, S4. (Надо соответственно использовать следующие правила:

$$\neg 0 = 1, \ \neg 1 = 0, \ \neg 2 = 2, \ \vee\, 00 = \vee\, 01 = \vee\, 10 = \vee\, 02 = \vee\, 20 = 0;$$
$$\vee\, 11 = 1, \ \vee\, 12 = \vee\, 21 = 1, \ \vee\, 22 = 1;$$
$$\neg 0 = 1, \ \neg 1 = 2, \ \neg 2 = 0;$$
$$\vee\, 00 = \vee\, 01 = \vee\, 10 = \vee\, 02 = \vee\, 20 = \vee\, 21 = 0;$$
$$\vee\, 11 = \vee\, 12 = 1, \ \vee\, 22 = 2.)$$

г) Доказать аналогичный результат для теории, базирующейся только на схемах S1, S2, S3. (Надо использовать четыре знака 0, 1, 2, 3 и следующее правило:

$$\neg 0 = 1, \ \neg 1 = 0, \ \neg 2 = 3, \ \neg 3 = 0;$$
$$\vee\, 00 = \vee\, 01 = \vee\, 10 = \vee\, 02 = \vee\, 20 = \vee\, 03 = \vee\, 30 = \vee\, 23 = \vee 32 = 0;$$
$$\vee\, 11 = 1, \ \vee\, 12 = \vee\, 21 = \vee\, 22 = 2, \ \vee\, 13 = \vee\, 31 = \vee\, 33 = 3.)$$

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

§ 1. Коллективизирующие соотношения

1. Теория множеств

Теория множеств представляет собой теорию, в которой имеются реляционные знаки $=$, $\in$ и субстантивный знак $\supset$ (все они имеют вес 2); кроме схем S1 — S7, приведенных в гл. I, она содержит также схему S8, которая вводится в п° 6, и явные аксиомы A1 (п° 3), A2 (п° 5), A3 (§ 2, п° 1), A4 (§ 5, п° 1) и A5 (гл. III, § 6, п° 1). Эти явные аксиомы не содержат букв; иначе говоря, теория множеств является теорией *без констант*.

Так как теория множеств принадлежит к числу эгалитарных теорий, то к ней применимы результаты гл. I.

Отныне, если только явно не оговаривается противное, мы будем всегда рассуждать в более сильной (гл. I, § 2, п° 4) теории, чем теория множеств; само же слово „теория“, если явно не оговорено противное, будет означать теорию множеств. В дальнейшем во многих случаях будет ясно, что это предположение отнюдь не необходимо, и читатель определит без труда, в какой теории, более слабой, чем теория множеств, остаются верными наши результаты.

Если T и U — термы, то знакосочетание $\in TU$ есть соотношение (называемое *соотношением принадлежности*), обозначаемое на практике одним из следующих способов: $T \in U$, $(T) \in (U)$, „T принадлежит к U“, „T есть элемент из U“. Соотношение „не $(T \in U)$“ записывается как $T \notin U$.

С „наивной“ точки зрения многие математические объекты могут рассматриваться как собрания, или „множества“, предметов. Мы не будем пытаться формализовать это понятие, и при формалистской интерпретации дальнейшего материала слово „множество“ следует рассматривать как точный синоним слова „терм“; в частности, такие фразы, как: „пусть X есть множество“, являются в принципе совершенно излишними, поскольку каждая буква есть терм; такие фразы вводятся лишь для облегчения интуитивной интерпретации текста.

2. Включение

Определение 1. *Соотношение* $(\forall z)((z \in x) \Rightarrow (z \in y))$, *в котором встречаются только буквы* x *и* y, *записывается одним из следующих способов:* $x \subset y$, $y \supset x$, *„x содержится в y“, „y содержит x“, „x есть часть (от) y“, „x есть подмножество (в) y“. Соотношение* „не $(x \subset y)$“ *записывается как* $x \not\subset y$ *или* $y \not\supset x$.

В соответствии с соглашениями, изложенными в гл. I, § 1, п° 1, это определение влечет за собой следующее метаматематическое правило: пусть T и U — знакосочетания; если в знакосочетании $x \subset y$ заменить одновременно x на T и y на U, то получится знакосочетание, обозначаемое через $T \subset U$; если обозначить через x, y произвольные буквы, отличные друг от друга и от x и y и не встречающиеся ни в T, ни в U, то нетрудно видеть, что знакосочетание $T \subset U$ тождественно с $(T|x)(U|y)(x|x)(y|y)(x \subset y)$, а следовательно, согласно CS8, CS9 (гл. I, § 4, п° 1) и CS5 (гл. I, § 1, п° 2), с $(\forall z)((z \in T) \Rightarrow (z \in U))$, при условии, что z — буква, не встречающаяся ни в T, ни в U.

Отныне, формулируя математическое определение, мы больше не будем отмечать метаматематического соглашения, которое из него вытекает.

CS12. *Пусть T, U, V — знакосочетания, а x — буква. Знакосочетание $(V|x)(T \subset U)$ тождественно с $(V|x)T \subset (V|x)U$.*

Это вытекает из CS9 (гл. I, § 4, п° 1) и CS5 (гл. I, § 1, п° 2).

CF13. *Если T и U — термы, то $T \subset U$ — соотношение.*

Это сразу же вытекает из CF8 (гл. I, § 1, п° 4).

Всякое соотношение вида $T \subset U$ (где T и U — термы) называется *соотношением включения*.

Отныне мы больше не будем излагать явно критерии подстановки и формативные критерии, которые должны следовать за определениями. Однако читатель заметит, что эти критерии часто будут использоваться неявно в доказательствах.

Для того чтобы доказать в теории $\mathcal{T}$ соотношение $x \subset y$, достаточно, согласно C27 (гл. I, § 4, п° 1), доказать $z \in y$ в теории, получаемой присоединением $z \in x$ к аксиомам теории $\mathcal{T}$, где z — буква, отличная от x и y и от констант теории. На практике говорят: „пусть z — элемент из x“ — и стараются доказать $z \in y$.

Предложение 1. $x \subset x$.

Это предложение очевидно.

Говорят, что x есть *полная часть (от) x или полное подмножество (в) x*.

Предложение 2. $(x \subset y$ и $y \subset z) \Rightarrow (x \subset z)$.

Присоединим гипотезы $x \subset y$, $y \subset z$ и $u \in x$. Тогда соотношения $(u \in x) \Rightarrow (u \in y)$, $(u \in y) \Rightarrow (u \in z)$ верны; следовательно, соотношение $u \in z$ также верно.

3. Аксиома экстенсиональности

Аксиомой экстенсиональности называется следующая аксиома:

A1. $$(\forall x)(\forall y)((x \subset y \text{ и } y \subset x) \Rightarrow (x = y)).$$

Интуитивно, эта аксиома означает, что два множества, имеющие одни и те же элементы, равны.

Для того чтобы доказать $x = y$, достаточно, стало быть, доказать $z \in y$ в теории, получаемой присоединением гипотезы $z \in x$, и $z \in x$ в теории, получаемой присоединением гипотезы $z \in y$, где z — буква, отличная от x и y и от констант.

C48. *Пусть R — соотношение, x — буква, y — буква, отличная от x и не встречающаяся в R. Соотношение $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ однозначно по y.*

В самом деле, пусть z — буква, отличная от x и не встречающаяся в R. Присоединим гипотезы $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ и $(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow R)$. Тогда последовательно получаются теоремы

$$(\forall x)(((x \in y) \Leftrightarrow R) \text{ и } ((x \in z) \Leftrightarrow R)),$$
$$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \in z)),\ y \subset z,\ z \subset y.$$

Согласно A1, $y = z$. Это доказывает C48.

4. Коллективизирующие соотношения

Пусть R — соотношение, x — буква. Если y и y' обозначают буквы, отличные от x *и не встречающиеся в* R, то соотношения $(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ и $(\exists y')(\forall x)((x \in y') \Leftrightarrow R)$ тождественны, согласно CS8 (гл. I, § 4, п° 1). Так определенное соотношение (которое не содержит x) обозначается символом $\mathrm{Coll}_x R$.

Если $\mathrm{Coll}_x R$ — теорема теории $\mathcal{T}$, то мы будем говорить, что соотношение R является *коллективизирующим по* x в $\mathcal{T}$. В этом случае можно ввести вспомогательную константу a, отличную от x и от констант теории $\mathcal{T}$ и не встречающуюся в R, с помощью вводящей аксиомы $(\forall x)((x \in a) \Leftrightarrow R)$, или — что то же самое, когда x не является константой в $\mathcal{T}$, — с помощью аксиомы $(x \in a) \Leftrightarrow R$.

С интуитивной точки зрения сказать, что R — коллективизирующее по x соотношение, значит сказать, что существует такое множество a, что объекты, обладающие свойством R, суть в точности элементы из a.

Примеры. 1) Соотношение $x \in y$ очевидным образом является коллективизирующим по x.

2) Соотношение $x \notin x$ *не является коллективизирующим* по x; иначе говоря, (не $\mathrm{Coll}_x (x \notin x)$) есть теорема. Будем рассуждать приведением к абсурду, предположив, что $x \notin x$ есть коллективизирующее соотношение. Пусть a — вспомогательная константа, отличная от x и от констант теории, вводимая с помощью аксиомы $(\forall x)((x \notin x) \Leftrightarrow (x \in a))$. Тогда верно соотношение $(a \notin a) \Leftrightarrow (a \in a)$, согласно C30 (гл. I, § 4, п° 3). Метод разделения случаев (гл. I, § 3, п° 3) показывает сначала, что соотношение $a \notin a$ верно, а затем, что соотношение $a \in a$ верно, но это абсурдно.

C49. *Пусть R — соотношение, а x — буква. Если R является коллективизирующим по x, то соотношение $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$, где y есть буква, отличная от x и не встречающаяся в R, является функциональным по y.*

Это сразу же вытекает из C48.

Очень часто в дальнейшем мы будем располагать теоремой вида $\text{Coll}_x R$. Тогда для изображения терма $\tau_y((\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R))$, не зависящего от выбора буквы y (отличной от x и не встречающейся в R), будет вводиться функциональный символ; мы будем использовать для этой цели символ $\mathcal{E}_x(R)$; соответствующий терм не содержит x. Именно об этом терме будет идти речь, когда мы будем говорить о „*множестве (всех) x, таких, что R*". По определению (гл. I, § 4, п° 1) соотношение $(\forall x)((x \in \mathcal{E}_x(R)) \Leftrightarrow R)$ *тождественно* с $\text{Coll}_x R$; таким образом, соотношение R *эквивалентно* в этом случае соотношению $x \in \mathcal{E}_x(R)$.

C50. *Пусть R, S — два соотношения, а x — буква. Если R и S являются коллективизирующими по x, то соотношение $(\forall x)(R \Rightarrow S)$ эквивалентно с $\mathcal{E}_x(R) \subset \mathcal{E}_x(S)$, а соотношение $(\forall x)(R \Leftrightarrow S)$ эквивалентно с $\mathcal{E}_x(R) = \mathcal{E}_x(S)$.*

Это сразу же вытекает из предыдущего замечания, из определения 1 и аксиомы A1.

5. Аксиома двухэлементного множества

$$\text{A2. } (\forall x)(\forall y)\,\text{Coll}_z(z = x \text{ или } z = y).$$

Эта аксиома означает, что если x и y суть какие-то объекты, то существует множество, единственными элементами которого являются x и y.

Определение 2. *Множество $\mathcal{E}_z(z = x$ или $z = y)$, единственными элементами которого являются x и y, обозначается символом $\{x, y\}$.*

Таким образом, соотношение $z \in \{x, y\}$ эквивалентно с „$z = x$ или $z = y$"; из C50 вытекает, что $\{y, x\} = \{x, y\}$.

Пусть $R\{z\}$ — соотношение, x и y — буквы, отличные от z. Из критериев C32, C33 (гл. I, § 4, п° 3) и C43 (гл. I, § 5, п° 1) легко выводится, что соотношение „$(\exists z)((z \in \{x, y\})$ и $R\{z\})$" эквивалентно с „$R\{x\}$ или $R\{y\}$"; отсюда вытекает, что соотношение

$$(\forall z)((z \in \{x, y\}) \Rightarrow R\{z\})$$

эквивалентно с „$R\{x\}$ и $R\{y\}$".

Множество $\{x, x\}$, обозначаемое просто символом $\{x\}$, называется *множеством, единственный элемент которого есть x* (или *множеством, состоящим из единственного элемента x*, или *множеством, сводящимся к единственному элементу x*), соотношение $z \in \{x\}$ эквивалентно $z = x$; соотношение $x \in X$ эквивалентно $\{x\} \subset X$.

6. Схема отбора и объединения

Схемой отбора и объединения называется следующая схема:

S8. *Пусть R — соотношение, x и y — различные буквы, X и Y — буквы, отличные от x и y и не встречающиеся в R. Соотношение*

$$(1)\quad (\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)\,\text{Coll}_x((\exists y)((y \in Y) \text{ и } R))$$

есть аксиома.

Покажем сначала, что это правило действительно является схемой. В самом деле, обозначим через S соотношение (1) и подставим в S терм T вместо какой-нибудь буквы z; согласно CS8 (гл. I, § 4, п° 1), можно предположить, что x, y, X, Y отличны от z и не встречаются в T. Тогда $(T|z)S$ тождественно с

$$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R' \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y)\,\text{Coll}_x((\exists y)((y \in Y) \text{ и } R')),$$

где R' есть $(T|z)R$.

С интуитивной точки зрения соотношение $(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X))$ означает, что для всякого объекта y существует такое множество X (которое может зависеть от y), что объекты x, находящиеся в соотношении R с данным объектом y, суть элементы множества X (не составляя обязательно все множество X). Схема отбора и объединения утверждает, что если дело обстоит так и если Y есть любое множество, то существует множество, элементами которого являются в точности все объекты x, находящиеся в соотношении R, хотя бы с одним объектом y из множества Y.

C51. *Пусть P — соотношение, A — множество и x — буква, не встречающаяся в A. Соотношение „P и $x \in A$" является коллективизирующим по x.*

Обозначим через R соотношение „P и $x = y$", где y — буква, отличная от x и не встречающаяся ни в P, ни в A. Соотношение $(\forall x)(R \Rightarrow (x \in \{y\}))$ верно, согласно C27 (гл. I, § 4, п° 1). Пусть X — буква, отличная от x и y и не встречающаяся в P. Предыдущее соотношение тождественно с $(\{y\}|X)((\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)))$ (именно потому, что x отлично от y); следовательно, соотношение $(\forall y)(\exists X) \times$ $\times (\forall x)(R \Rightarrow (x \in X))$ верно в силу S5 и C27 (гл. I, § 4, пп° 1 и 2). Из S8 и C30 (гл. I, § 4, п° 3) вытекает, что соотношение

$$(A|Y)\,\text{Coll}_x((\exists y)(y \in Y \text{ и } R))$$

(где Y — буква, не встречающаяся в R) верно, но это соотношение тождественно с $\text{Coll}_x((\exists y)(y \in A \text{ и } R))$ именно потому, что ни x, ни y не встречаются в A). Наконец, соотношение „$y \in A$ и R" эквивалентно „$x = y$ и $x \in A$ и P", согласно C43 (гл. I, § 5, п° 1); так как y не встречается ни в P, ни в A, то соотношение $(\exists y)(x =$ $= y$ и $x \in A$ и $P)$ эквивалентно соотношению „$((\exists y)(x = y))$ и $x \in A$ и P", согласно C33 (гл. I, § 4, п° 3), а следовательно, и соотношению „P и $x \in A$", ибо $(\exists y)(x = y)$ верно.

Множество $\mathscr{E}_x(P$ и $x \in A)$ называется *множеством (всех) таких $x \in A$, что P* (например, в этом смысле говорят о множестве действительных чисел, таких, что P).

C52. Пусть *R — соотношение, A — множество, x — буква, не встречающаяся в A. Если соотношение $R \Rightarrow (x \in A)$ есть теорема, то R есть соотношение, коллективизирующее по x.*

В самом деле, R тогда эквивалентно „R и $x \in A$".

Замечание. Пусть R — соотношение, коллективизирующее по x, а S — такое соотношение, что $(\forall x)(S \Rightarrow R)$ есть теорема. Тогда S является коллективизирующим по x, ибо R эквивалентно $x \in \mathscr{E}_x(R)$; следовательно, $S \Rightarrow (x \in \mathscr{E}_x(R))$ есть теорема, и достаточно применить C52. Заметим, кроме того, что в этом случае $\mathscr{E}_x(S) \subset \mathscr{E}_x(R)$, согласно C50.

C53. *Пусть T — терм, A — множество, x и y — различные буквы. Предполагается, что x не встречается в A и что y не встречается ни в T, ни в A. Соотношение $(\exists x)(y = T$ и $x \in A)$ является коллективизирующим по y.*

Пусть R — соотношение $y = T$. Соотношение $(\forall y)(R \Rightarrow (y \in \{T\}))$ верно; следовательно, верно и $(\forall x)(\exists X)(\forall y)(R \Rightarrow (y \in X))$, где X — буква, отличная от y и не встречающаяся в R. В силу S8 соотношение $(\exists x)(x \in A$ и $R)$ является коллективизирующим по y, что и доказывает C53.

Соотношение $(\exists x)(y = T$ и $x \in A)$ часто читается так: „y может быть представлено в виде T для некоторого x, принадлежащего к A". Множество $\mathscr{E}_y((\exists x)(y = T$ и $x \in A))$ обычно называется *множеством (всех) объектов вида T для $x \in A$.* Знакосочетание, так обозначаемое, не содержит ни x, ни y и не зависит от выбора буквы y, удовлетворяющей условиям из C53.

7. Дополнение множества. Пустое множество

Соотношение $(x \notin A$ и $x \in X)$ является коллективизирующим по x в силу C51.

Определение 3. *Пусть* A *— часть множества* X. *Дополнением множества* A *относительно* X *называется множество элементов из* X, *не принадлежащих к* A, *т. е. множество* $\mathscr{E}_x(x \notin A$ и $x \in X)$, *оно обозначается через* $\complement_X A$ *или* X-A (или $\complement A$, когда не приходится бояться путаницы).

Пусть A — часть множества X; соотношения „$x \in X$ и $x \notin A$" и $x \in \complement_X A$ являются, таким образом, эквивалентными. Следовательно, соотношение „$x \in X$ и $x \notin \complement_X A$" эквивалентно „$x \in X$ и $(x \notin X$ или $x \in A)$", а следовательно, и $x \in A$. Иначе говоря, $A = \complement_X(\complement_X A)$

есть верное соотношение. Нетрудно видеть также, что если B — часть от X, то соотношения $A \subset B$ и $\complement_X B \subset \complement_X A$ эквивалентны.

Теорема 1. *Соотношение $(\forall x)(x \notin X)$ является функциональным по* X.

В самом деле, соотношение $(\forall x)(x \notin X)$ влечет $(\forall Y)(X \subset Y)$; стало быть, в силу аксиомы экстенсиональности соотношение $(\forall x)(x \notin X)$ является однозначным по X. С другой стороны, соотношение $(\forall x)(x \notin \complement_Y Y)$ верно, а это доказывает, что соотношение $(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$ верно.

Терм $\tau_X((\forall x)(x \notin X))$, соответствующий этому функциональному соотношению, изображается функциональным символом $\varnothing$, который называется *пустым множеством* [1]; соотношение $(\forall x)(x \notin X)$, эквивалентное $X = \varnothing$, читается так: „*множество* X *пусто*". Справедливы теоремы: $x \notin \varnothing$, $\varnothing \subset X$, $\complement_X X = \varnothing$, $\complement_X \varnothing = X$; соотношение $X \subset \varnothing$ эквивалентно $X = \varnothing$. Если $R\{x\}$ — соотношение, то соотношение $(\forall x)((x \in \varnothing) \Rightarrow R\{x\})$ верно.

Замечание. Не существует множества, элементами которого являются все объекты; иначе говоря, „не $(\exists X)(\forall x)(x \in X)$" есть теорема. В самом деле, если бы существовало такое множество, то всякое соотношение было бы коллективизирующим в силу C52. Но мы видели (п° 4); что соотношение $x \notin x$ не является коллективизирующим.

Упражнения

1) Показать, что соотношение

$$(x = y) \Leftrightarrow (\forall X)((x \in X) \Rightarrow (y \in X))$$

есть теорема.

2) Показать, что $\varnothing \neq \{x\}$ есть теорема; вывести отсюда, что $(\exists x)(\exists y)(x \neq y)$ также есть теорема.

3) Пусть A и B — две части множества X. Показать, что соотношение $B \subset \complement A$ эквивалентно соотношению $A \subset \complement B$ и что соотношение $\complement B \subset A$ эквивалентно соотношению $\complement A \subset B$.

4) Доказать, что соотношение $X \subset \{x\}$ эквивалентно соотношению „$X = \{x\}$ или $X = \varnothing$".

5) Доказать, что $\varnothing = \tau_X(\tau_x(x \in X) \notin X)$.

6) Пусть $\mathcal{T}$ — эгалитарная теория, в которой встречается знак $\in$ и которая содержит следующую аксиому:

A1'. $$(\forall y)(y = \tau_x((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)))$$

---

[1]) Таким образом, терм, обозначаемый символом $\varnothing$, есть

$$\tau \urcorner \urcorner \urcorner \in \tau \urcorner \urcorner \in \square \square \square .$$

(иначе говоря: „всякий терм равен множеству своих элементов"). Показать, что аксиома экстенсиональности A1 есть теорема в $\mathcal{T}$ (использовать схему S7).

§ 2. Пары

1. Аксиома пары

Как мы сказали в § 1, n° 1, знак $\supset$ является в теории множеств субстантивным знаком веса 2. Если $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{U}$ — термы, то, стало быть, знакосочетание $\supset\boldsymbol{TU}$ есть терм; этот терм обозначается обычно через $(\boldsymbol{TU})$. При таких обозначениях *аксиомой пары* называется следующая аксиома:

A3. $(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')(((x,\ y)=(x',\ y'))\Rightarrow(x=x'$ и $y=y'))$.

Так как соотношение „$x=x'$ и $y=y'$" влечет $(x,\ y)=(x',\ y')$, согласно C44 (гл. I, § 5, n° 2), то мы видим, что соотношение $(x,\ y)=(x',\ y')$ эквивалентно „$x=x'$ и $y=y'$".

Соотношение $(\exists x)(\exists y)(z=(x,\ y))$ обозначают словами „*z есть пара*". Если z — пара, то соотношения $(\exists y)(z=(x,\ y))$ и $(\exists x)(z=(x,\ y))$ являются функциональными по x и y соответственно, как это сразу же следует из A3.

Термы $\tau_x((\exists y)(z=(x,\ y)))$ и $\tau_y((\exists x)(z=(x,\ y)))$ обозначаются соответственно символами $\mathrm{pr}_1 z$ и $\mathrm{pr}_2 z$ и называются соответственно *первой координатой* (*первой проекцией*) и *второй координатой* (*второй проекцией*) (от) z. Если z — пара, то соотношение $(\exists y)(z=(x,\ y))$, стало быть, эквивалентно $x=\mathrm{pr}_1 z$, а соотношение $(\exists x)(z=(x,\ y))$ — $y=\mathrm{pr}_2 z$ (гл. I, § 5, n° 3).

Соотношение $z=(x,\ y)$ эквивалентно соотношению „z есть пара и $x=\mathrm{pr}_1 z$ и $y=\mathrm{pr}_2 z$"; в самом деле, это последнее соотношение эквивалентно

$$(\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(z=(x',\ y') \text{ и } z=(x,\ y'') \text{ и } z=(x'',\ y));$$

согласно A3, „$z=(x',\ y')$ и $z=(x,\ y'')$ и $z=(x'',\ y)$" эквивалентно „$z=(x,\ y)$ и $x=x'$ и $x=x''$ и $y=y'$ и $y=y''$"; следовательно, „z есть пара и $x=\mathrm{pr}_1 z$ и $y=\mathrm{pr}_2 z$" эквивалентно, согласно C33 (гл. I, § 4, n° 3),

$$z=(x,\ y) \text{ и } (\exists x')(\exists y')(\exists x'')(\exists y'')(x=x' \text{ и } x=x'' \text{ и } y=y' \text{ и } y=y''),$$

что доказывает наше утверждение. Очевидно, что $\mathrm{pr}_1(x,\ y)=x$, $\mathrm{pr}_2(x,\ y)=y$ и что соотношение $z=(\mathrm{pr}_1 z,\ \mathrm{pr}_2 z)$ эквивалентно „z есть пара".

Пусть $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\}$ — соотношение, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — две различные буквы, встречающиеся в $\boldsymbol{R}$. Пусть $\boldsymbol{z}$ — буква, отличная от $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и не встречающаяся в $\boldsymbol{R}$. Обозначим через $\boldsymbol{S}\{\boldsymbol{z}\}$ соотношение $(\exists\boldsymbol{x})(\exists\boldsymbol{y})(\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\})$; это соотношение содержит одной буквой меньше, чем $\boldsymbol{R}$, и эквивалентно соотношению „$\boldsymbol{z}$ есть пара и $\boldsymbol{R}\{\mathrm{pr}_1\boldsymbol{z},\ \mathrm{pr}_2\boldsymbol{z}\}$". Дело обстоит так в силу того, что $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ эквивалентно „$\boldsymbol{z}$ есть пара и $\boldsymbol{x}=\mathrm{pr}_1\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{y}=\mathrm{pr}_2\boldsymbol{z}$" и критериев C33 (гл. I, § 4, n° 3) и C47 (гл. I, § 5, n° 3). Отсюда сразу же вытекает, что $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\}$ эквивалентно $\boldsymbol{S}\{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})\}$, а следовательно, и $(\exists\boldsymbol{z})(\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$ и $\boldsymbol{S}\{\boldsymbol{z}\})$, согласно критерию C47.

Это означает, что соотношение между предметами $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ можно интерпретировать как свойство пары, образуемой этими объектами.

2. Произведение двух множеств

Теорема 1. *Соотношение*

$$(\forall \mathrm{X})(\forall \mathrm{Y})(\exists \mathrm{Z})(\forall z)((z\in \mathrm{Z})\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(z=(x,\ y) \text{ и } x\in \mathrm{X} \text{ и } y\in \mathrm{Y}))$$

верно. Иначе говоря, каковы бы ни были X *и* Y, *соотношение „z есть пара* и $\mathrm{pr}_1 z\in \mathrm{X}$ и $\mathrm{pr}_2 z\in \mathrm{Y}$" *является коллективизирующим по z.*

В самом деле, обозначим через A_y множество предметов вида $(x,\ y)$ для $x\in \mathrm{X}$ (ср. § 1, n° 6, критерий C53). Пусть R есть соотношение $z\in \mathrm{A}_y$, эквивалентное $(\exists x)(z=(x,\ y)$ и $x\in \mathrm{X})$. Ясно, что соотношение $(\forall y)(\exists \mathrm{A})(\forall z)(\mathrm{R}\Rightarrow(z\in \mathrm{A}))$ верно в силу S5 (гл. I, § 4, n° 2). Тогда из S8 вытекает, что соотношение $(\exists y)(y\in \mathrm{Y}$ и $\mathrm{R})$ является коллективизирующим по z. Но это соотношение эквивалентно с $(\exists x)(\exists y)(y\in \mathrm{Y}$ и $x\in \mathrm{X}$ и $z=(x,\ y))$, а отсюда следует теорема.

Определение 1. *Пусть даны два множества* X *и* Y. *Тогда множество* $\mathcal{E}_z((\exists x)(\exists y)(z=(x,\ y)$ и $x\in \mathrm{X}$ и $y\in \mathrm{Y}))$ *называется произведением множеств* X *и* Y *и обозначается символом* $\mathrm{X}\times \mathrm{Y}$.

Соотношение $z\in \mathrm{X}\times \mathrm{Y}$ эквивалентно, таким образом, соотношению „z есть пара и $\mathrm{pr}_1 z\in \mathrm{X}$ и $\mathrm{pr}_2 z\in \mathrm{Y}$". Множества X и Y называются *первым* и *вторым множителем* (или *сомножителем*) произведения $\mathrm{X}\times \mathrm{Y}$.

Предложение 1. *Если* A', B' — *непустые множества, то соотношение* $\mathrm{A}'\times \mathrm{B}'\subset \mathrm{A}\times \mathrm{B}$ *эквивалентно* „$\mathrm{A}'\subset \mathrm{A}$ и $\mathrm{B}'\subset \mathrm{B}$".

Прежде всего соотношение $z\in \mathrm{A}'\times \mathrm{B}'$ эквивалентно „z есть пара и $\mathrm{pr}_1 z\in \mathrm{A}'$ и $\mathrm{pr}_2 z\in \mathrm{B}'$"; стало быть, без каких-либо предположений об A' и B' соотношение „$\mathrm{A}'\subset \mathrm{A}$ и $\mathrm{B}'\subset \mathrm{B}$" влечет $\mathrm{A}'\times \mathrm{B}'\subset \mathrm{A}\times \mathrm{B}$. С другой стороны, покажем сначала, что если $\mathrm{B}'\neq\varnothing$ (без предположений об A'), то соотношение $\mathrm{A}'\times \mathrm{B}'\subset \mathrm{A}\times \mathrm{B}$ влечет $\mathrm{A}'\subset \mathrm{A}$. Пусть x — элемент множества A'; так как $\mathrm{B}'\neq\varnothing$, то существует предмет y, являющийся элементом множества B'; поэтому $(x,\ y)\in \mathrm{A}'+\mathrm{B}'$, откуда $(x,\ y)\in \mathrm{A}\times \mathrm{B}$ и, следовательно, $x\in \mathrm{A}$; это показывает, что $\mathrm{A}'\subset \mathrm{A}$. Аналогично можно увидеть, что

если $A' \neq \varnothing$, то соотношение $A' \times B' \subset A \times B$ влечет $B' \subset B$, откуда вытекает наше предложение.

Предложение 2. *Пусть* A *и* B — *два множества. Соотношение* $A \times B = \varnothing$ *эквивалентно* „$A = \varnothing$ или $B = \varnothing$“.

В самом деле, соотношение $z \in A \times B$ влечет $\mathrm{pr}_1 z \in A$ и $\mathrm{pr}_2 z \in B$; следовательно, $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$. Обратно, соотношение „$x \in A$ и $y \in B$“ влечет $(x, y) \in A \times B$, а следовательно, и $A \times B \neq \varnothing$. Иначе говоря, соотношение $A \times B \neq \varnothing$ эквивалентно „$A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$“, откуда и вытекает наше предложение.

Если A, B, C — множества, мы полагаем

$$(A \times B) \times C = A \times B \times C\ ^{1)};$$

элемент $((x, y), z)$ из $A \times B \times C$ записывается также в виде (x, y, z) и называется *тройкой*. Аналогично, если A, B, C, D — множества, мы полагаем $(A \times B \times C) \times D = A \times B \times C \times D$ и т. д.[2])

Упражнения

1) Пусть $R\{x, y\}$ — соотношение, x и y — различные буквы; пусть z — буква, отличная от x и y и не встречающаяся в $R\{x, y\}$. Показать, что соотношение $(\exists x)(\exists y)\, R\{x, y\}$ эквивалентно

$$(\exists z)\ (z \text{ есть пара и } R\{\mathrm{pr}_1 z, \mathrm{pr}_2 z\})$$

и что соотношение $(\forall x)(\forall y)\, R\{x, y\}$ эквивалентно

$$(\forall z)\ ((z \text{ есть пара}) \Rightarrow R\{\mathrm{pr}_1 z, \mathrm{pr}_2 z\}).$$

2) а) Показать, что соотношение $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$ эквивалентно „$x = x'$ и $y = y'$“.

б) Пусть $\mathcal{T}_0$ — теория множеств, а $\mathcal{T}_1$ — теория, имеющая те же схемы и явные аксиомы, что и $\mathcal{T}_0$, за исключением аксиомы A3. Показать, что если $\mathcal{T}_1$ непротиворечива, то и $\mathcal{T}_0$ непротиворечива [использовать а)].

§ 3. Соответствия

1. Графики и соответствия

Определение 1. *Говорят, что* G *есть график, если каждый элемент в* G *есть пара, или, иначе говоря, если справедливо соотношение*

$$(\forall z)\ (z \in G \Rightarrow (z \text{ есть пара})).$$

---

[1]) Употребление здесь автором знака „=“ может привести к путанице, поскольку в данном контексте этот знак вовсе *не есть* тот реляционный специальный знак рассматриваемой эгалитарной теории, о котором сообщалось в § 1, n° 1 и ранее в гл. I, § 1, n° 1. Знак „=“ в данном его употреблении относится к математике (см. „Введение“) и означает, что запись $A \times B \times C$ мы *уславливаемся* использовать вместо $(A \times B) \times C$ [т. е. для изображения того же знакосочетания, которое, согласно определению 1, изображается посредством $(A \times B) \times C$]. — *Прим. ред.*

[2]) Элемент $(u_1, \ldots, u_n)$ произведения $E_1 \times \ldots \times E_n$ называется — при произвольном n — кортежем. — *Прим. ред.*

Если G — график, то соотношение $(x, y) \in G$ выражается еще с помощью слов: „(объект) y соответствует (объекту) x по (или „посредством“ или „относительно“) G“.

Пусть $R\{x, y\}$ — соотношение, x и y — различные буквы. Пусть G — буква, отличная от x и y и не встречающаяся в R. Если соотношение

$$(\exists G)\ (G \text{ есть график и } (\forall x)(\forall y)\ (R \Leftrightarrow ((x, y) \in G)))$$

верно, то мы говорим, что R *обладает графиком* по буквам [или (относительно букв) x и y]. Тогда график G единствен в силу аксиомы экстенсиональности и называется *графиком* соотношения R (или *представляющим множеством* соотношения R) по (относительно) x и y.

Пусть Z буква, отличная от x и y и не встречающаяся в R. Если соотношение

$$(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow ((x, y) \in Z))$$

верно, то R обладает графиком; в самом деле, достаточно принять за этот график множество таких пар z, что $z \in Z$ и $R\{\mathrm{pr}_1 z, \mathrm{pr}_2 z\}$ (где z — буква, отличная от x, y, Z и не встречающаяся в R). Это условие выполнено, если мы знаем какой-либо терм T, в котором не встречаются ни x, ни y, и притом такой, что верно $R \Rightarrow ((x, y) \in T)$.

Предложение 1. *Пусть* G — *график. Существуют единственное множество* A *и единственное множество* B, *удовлетворяющие следующим условиям:* 1) *соотношение* $(\exists y)((x, y) \in G)$ *эквивалентно соотношению* $x \in A$; 2) *соотношение* $(\exists x)((x, y) \in G)$ *эквивалентно соотношению* $y \in B$ [1]).

В самом деле, достаточно принять за множество A (соответственно за B) множество объектов вида $\mathrm{pr}_1 z$ (соответственно вида $\mathrm{pr}_2 z$) для $z \in G$ (§ 1, n° 6); говоря точнее,

$$A = \mathcal{E}_x((\exists y)((x, y) \in G)) \quad \text{и} \quad B = \mathcal{E}_y((\exists x)((x, y) \in G))\ ^{2)};$$

---

[1]) Эта формулировка доставляет наглядный пример того „двусмысленного стиля“ Бурбаки, о котором говорилось на стр. 8—9. Ее можно истолковывать двояко: как содержательное утверждение „наивной теории множеств“ о существовании и единственности двух множеств с определенными свойствами и как образованную в соответствии со сделанными ранее соглашениями словесную запись некоторого знакосочетания (причем — поскольку эта запись идет вслед за словом „предложение“ — утверждается, что соответствующее знакосочетание есть теорема рассматриваемой теории). — *Прим. ред.*

[2]) Знак равенства может пониматься здесь в одном из следующих двух смыслов: 1) как знак исследуемой эгалитарной теории; в таком случае A и B следует рассматривать как вспомогательные константы (см. § 1, n° 4 и гл. I, § 3, n° 3), вводимые соотношениями (*); 2) как метаматематический знак (см.

эти множества называются соответственно *первой и второй проекцией* графика G или *областью определения и областью значений* графика G; они обозначаются через $\mathrm{pr}_1\langle G\rangle$ и $\mathrm{pr}_2\langle G\rangle$ (или через $\mathrm{pr}_1 G$ и $\mathrm{pr}_2 G$, когда это не приводит к путанице). Нетрудно видеть, что $G \subset (\mathrm{pr}_1 G) \times (\mathrm{pr}_2 G)$: всякое множество пар есть, таким образом, часть некоторого произведения, и обратно. Поэтому, если одно из двух множеств $\mathrm{pr}_1 G$, $\mathrm{pr}_2 G$ пусто, то $G = \varnothing$ (§ 2, предложение 2).

Замечание. Соотношение $x = y$ не обладает графиком, ибо первая проекция этого графика, если бы он существовал, была бы множеством всех объектов (ср. § 1, n° 7, „Замечание").

Определение 2. *Соответствием между множеством* A *и множеством* B *называется тройка* $\Gamma = (G, A, B)$ [1]*, где* G — *график, такой, что* $\mathrm{pr}_1 G \subset A$ *и* $\mathrm{pr}_2 G \subset B$. *Мы говорим, что* G *есть график соответствия* Γ, A — *область отправления и* B — *область прибытия соответствия.*

Если $(x, y) \in G$, мы говорим, что „(объект) y соответствует (объекту) x при соответствии (по, согласно соответствию, посредством, в силу соответствия) Γ". Для всякого $x \in \mathrm{pr}_1 G$ мы говорим, что соответствие Γ *определено для предмета* x, а $\mathrm{pr}_1 G$ называем *областью определения соответствия* Γ; для всякого $y \in \mathrm{pr}_2 G$ мы говорим, что y есть *значение, принимаемое соответствием* Γ, а $\mathrm{pr}_2 G$ называем *областью значений соответствия* Γ.

Если $\boldsymbol{R}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ — соотношение, обладающее графиком $\boldsymbol{G}$ (по буквам $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$), и если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — два множества, такие, что $\mathrm{pr}_1 \boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{A}$ и $\mathrm{pr}_2 \boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{B}$, то мы говорим, что $\boldsymbol{R}$ есть *соотношение между элементом множества* $\boldsymbol{A}$ *и элементом множества* $\boldsymbol{B}$ (относительно букв $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$). Мы говорим, что соответствие $\Gamma = (\boldsymbol{G}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ есть соответствие между $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, *определяемое соотношением* $\boldsymbol{R}$ (по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$).

Пусть G — график и X — множество. Соотношение „$x \in X$ и $(x, y) \in G$" влечет $(x, y) \in G$ и, следовательно, обладает графиком G′. Вторая проекция этого G′, очевидно, состоит из всех объектов, которые соответствуют относительно графика G объектам из X.

Определение 3. *Пусть* G — *график и* X — *множество. Множество объектов, которые соответствуют элементам множества* X *относительно графика* G, *называется образом*

примечание на стр. 84), при помощи которого знакосочетания $\mathcal{E}_x((\exists y)((x, y) \in G))$ и $\mathcal{E}_y((\exists x)((x, y) \in G))$ уславливаются (быть может, временно) изображать посредством A и B (предвосхищая тем самым соглашение о прекращении использования полужирных курсивных букв, которое будет сделано в первом абзаце § 6). — *Прим. ред.*

[1]) Знак равенства употреблен здесь в математическом смысле (см. примечание на стр. 84), означающем, что тройка (G, A, B) обозначается здесь через Γ. Аналогичные случаи математического употребления знака равенства, а также случаи двусмысленного его употребления (см. предыдущее примечание) будут встречаться и впредь, и мы не будем больше их оговаривать. — *Прим. ред.*

множества X *по графику* G (или *относительно графика* G или *при графике* G) *и обозначается через* $G\langle X\rangle$ *или* $G(X)$.

Пусть $\Gamma = (G, A, B)$ — *соответствие, а* X — *часть множества* A. *Множество* $G\langle X\rangle$ *обозначается еще через* $\Gamma\langle X\rangle$ *или* $\Gamma(X)$ *и называется образом части* X *по соответствию* (или *относительно соответствия* или *при соответствии*) Γ.

Замечания. 1) Точнее, $G\langle X\rangle$ обозначает множество $\mathcal{E}_y((\exists x)(x \in X$ и $(x, y) \in G))$. Мы теперь будем лишь изредка делать перевод определений на формальный язык.

2) Обозначения $G(X)$ и $\Gamma(X)$ могут иногда привести к смешениям с обозначениями, которые будут введены позднее (ср. n° 4, „Замечание" вслед за определением 9).

Пусть G — график. Так как соотношение $(x, y) \in G$ влечет $y \in \mathrm{pr}_2 G$, то $G\langle X\rangle \subset \mathrm{pr}_2 G$ для любого множества X; так как $(x, y) \in G$ влечет $x \in \mathrm{pr}_1 G$, то $G\langle \mathrm{pr}_1 G\rangle = \mathrm{pr}_2 G$. Так как $x \notin \varnothing$ есть теорема, то $G\langle\varnothing\rangle = \varnothing$. Если $X \subset \mathrm{pr}_1 G$ и $X \neq \varnothing$, то $G\langle X\rangle \neq \varnothing$.

Предложение 2. *Пусть* G — *график,* X *и* Y — *два множества; тогда соотношение* $X \subset Y$ *влечет* $G\langle X\rangle \subset G\langle Y\rangle$.

Предложение очевидно ввиду определений и критерия C50 (§ 1, n° 4).

Следствие. *Если* $A \supset \mathrm{pr}_1 G$, *то* $G\langle A\rangle = \mathrm{pr}_2 G$.

Определение 4. *Пусть* G — *график,* x — *предмет. Срезом графика* G *по* x *называется множество* $G\langle\{x\}\rangle$ (иногда, допуская вольность речи, мы обозначаем его также символом $G(x)$).

Из C43 (гл. I, § 5, n° 1) сразу же вытекает, что соотношение $y \in G\langle\{x\}\rangle$ эквивалентно $(x, y) \in G$. Если G и G′ — два графика, то соотношение $G \subset G'$ эквивалентно, таким образом, $(\forall x)(G\langle\{x\}\rangle \subset G'\langle\{x\}\rangle)$.

Если $\Gamma = (G, A, B)$ — соответствие между A и B, то для каждого $x \in A$ срез графика G по x называется еще *срезом соответствия* Γ по x и тоже обозначается через $\Gamma\langle\{x\}\rangle$ (или $\Gamma(x)$).

2. Соответствие, обратное к данному соответствию

Пусть G — график, а $A = \mathrm{pr}_1 G$ и $B = \mathrm{pr}_2 G$ — его проекции. Соотношение $(y, x) \in G$ влечет $(x, y) \in B \times A$; это соотношение, стало быть, обладает графиком, состоящим из пар (x, y), таких, что $(y, x) \in G$.

Определение 5. *Пусть* G — *график. График, элементами которого являются пары* (x, y), *такие, что* $(y, x) \in G$, *называется графиком, обратным к* G, *и обозначается через* G.

Для всякого множества X множество $\overset{-1}{G}\langle X\rangle$ называется *полным прообразом* множества X по (относительно, при) G.

Очевидно, что график, обратный к $\overset{-1}{G}$, есть G и что $pr_1 \overset{-1}{G} = pr_2 G$, $pr_2 \overset{-1}{G} = pr_1 G$. В частности, если X и Y — два множества, то $\overset{-1}{\widehat{X \times Y}} = Y \times X$. Мы говорим, что график G *симметричен*, если $\overset{-1}{G} = G$.

Пусть $\Gamma = (G, A, B)$ — соответствие между A и B. Так как $pr_1 \overset{-1}{G} \subset B$ и $pr_2 \overset{-1}{G} \subset A$, то тройка $(\overset{-1}{G}, B, A)$ есть *соответствие между* B *и* A, называемое *соответствием, обратным к* Γ, и обозначаемое символом $\overset{-1}{\Gamma}$. Для всякой части Y от B образ $\overset{-1}{\Gamma}\langle Y\rangle$ множества Y при соответствии $\overset{-1}{\Gamma}$ называется еще *полным прообразом множества* Y при соответствии (относительно соответствия, по соответствию) Γ. Ясно, что соответствие, обратное к $\overset{-1}{\Gamma}$, есть Γ.

3. Композиция двух соответствий

Пусть G и G′ — два графика. Обозначим через A множество $pr_1 G$, а через C — множество $pr_2 G'$. Соотношение „$(\exists y)((x, y) \in G$ и $(y, z) \in G')$“ влечет за собой $(x, z) \in A \times C$; следовательно, оно обладает графиком по x и z.

Определение 6. *Пусть* G *и* G′ — *графики. Назовем композицией графиков* G′ *и* G [1]) *и обозначим через* $G' \circ G$ (или иногда через G′G) *график по* x *и* z *соотношения*

„$(\exists y)((x, y) \in G$ и $(y, z) \in G')$“.

Предложение 3. *Пусть* G *и* G′ — *два графика. График, обратный к* $G' \circ G$, *есть* $\overset{-1}{G} \circ \overset{-1}{G'}$.

В самом деле, соотношение „$(x, y) \in G$ и $(y, z) \in G'$“ эквивалентно „$(z, y) \in \overset{-1}{G'}$ и $(y, x) \in \overset{-1}{G}$“.

Предложение 4. *Пусть* G_1, G_2, G_3 — *графики. Тогда*

$$(G_3 \circ G_2) \circ G_1 = G_3 \circ (G_2 \circ G_1).$$

В самом деле, соотношение $(x, t) \in (G_3 \circ G_2) \circ G_1$ эквивалентно соотношению

$$(\exists y)((x, y) \in G_1 \text{ и } (\exists z)((y, z) \in G_2 \text{ и } (z, t) \in G_3)),$$

[1]) Относительно порядка, в котором *упоминаются* компонируемые объекты (здесь и ниже, в определении 7), см. подстрочное примечание на стр. 363. — *Прим. ред.*

а следовательно [именно, согласно С33 (гл. I, § 4, n° 3)], и соотношению

$$(\exists y)(\exists z)((x, y) \in G_1 \text{ и } (y, z) \in G_2 \text{ и } (z, t) \in G_3). \quad (1)$$

Подобно этому, нетрудно увидеть, что соотношение $(x, t) \in G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$ эквивалентно соотношению

$$(\exists z)(\exists y)((x, y) \in G_1 \text{ и } (y, z) \in G_2 \text{ и } (z, t) \in G_3). \quad (2)$$

Но мы знаем, что соотношения (1) и (2) эквивалентны, а это и доказывает предложение 4.

График $G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$ обозначается через $G_3 \circ G_2 \circ G_1$. Аналогично, если G_1, G_2, G_3, G_4 — графики, то мы полагаем

$$G_4 \circ (G_3 \circ G_2 \circ G_1) = G_4 \circ G_3 \circ G_2 \circ G_1 \text{ и т. д.}$$

Предложение 5. *Пусть* G *и* G′ — *графики и* A — *множество; тогда*

$$(G' \circ G)\langle A\rangle = G'\langle G\langle A\rangle\rangle.$$

В самом деле, в силу С33 (гл. I, § 4, n° 3) соотношение $z \in (G' \circ G)\langle A\rangle$ эквивалентно соотношению

$$(\exists y)((\exists x)(x \in A \text{ и } (x, y) \in G) \text{ и } (y, z) \in G'),$$

а следовательно, и соотношению $(\exists y)(y \in G\langle A\rangle$ и $(y, z) \in G')$, что и доказывает предложение.

Если G и G′ — два графика, то $pr_1(G' \circ G) = \overset{-1}{G}\langle pr_1 G'\rangle$ и $pr_2(G' \circ G) = G'\langle pr_2 G\rangle$. Для доказательства, например, второго из этих соотношений достаточно заметить, что соотношение $z \in pr_2(G' \circ G)$ равносильно $(\exists x)((x, z) \in G' \circ G)$, а следовательно, и

$$(\exists y)((\exists x)((x, y) \in G) \text{ и } (y, z) \in G');$$

но это последнее соотношение эквивалентно $z \in G'\langle pr_2 G\rangle$.

Если G — график, а X — такое множество, что $X \subset pr_1 G$, то $X \subset \overset{-1}{G}\langle G\langle X\rangle\rangle$. В самом деле, соотношение $x \in X$ влечет, по предположению, $(\exists y)((x, y) \in G)$; но $(x, y) \in G$ эквивалентно $(y, x) \in \overset{-1}{G}$, тогда как, с другой стороны, $(x, y) \in G$ влечет $(\exists z)(z \in X$ и $(z, y) \in G)$; следовательно, $x \in X$ влечет $(\exists y)((\exists z)(z \in X$ и $(z, y) \in G)$ и $(y, x) \in \overset{-1}{G})$, т. е. $x \in \overset{-1}{G}\langle G\langle X\rangle\rangle$.

Ясно, что если G_1, G_2, G_1', G_2' — графики, то соотношения $G_1 \subset G_2$ и $G_1' \subset G_2'$ влекут $G_1' \circ G_1 \subset G_2' \circ G_2$.

Пусть теперь $\Gamma = (G, A, B)$ и $\Gamma' = (G', B, C)$ суть такие два соответствия, что область прибытия для Γ тождественна с областью

отправления для Γ'. Согласно сказанному выше, $\mathrm{pr}_1(G'\circ G)\subset \mathrm{pr}_1 G\subset A$ и $\mathrm{pr}_2(G'\circ G)\subset \mathrm{pr}_2 G'\subset C$; следовательно, можно дать следующее определение:

Определение 7. *Пусть* $\Gamma=(G, A, B)$ *и* $\Gamma'=(G', B, C)$ *суть два соответствия, такие, что область прибытия для* Γ *тождественна с областью отправления для* Γ'. *Назовем композицией соответствий* Γ' *и* Γ *и обозначим символом* $\Gamma'\circ\Gamma$ (а иногда $\Gamma'\Gamma$) *соответствие* $(G'\circ G, A, C)$.

Из предложения 5 сразу же вытекает, что если X — часть множества A, то $(\Gamma'\circ\Gamma)\langle X\rangle=\Gamma'\langle\Gamma\langle X\rangle\rangle$. Кроме того, так как область прибытия для $\overset{-1}{\Gamma'}$ тождественна с областью отправления для $\overset{-1}{\Gamma}$, то соответствие, обратное к $\Gamma'\circ\Gamma$, есть $\overset{-1}{\Gamma}\circ\overset{-1}{\Gamma'}$ вследствие предложения 3.

Определение 8. *Если* A — *множество, то множество* Δ_A *объектов вида* (x, x) *для* $x\in A$ *называется диагональю произведения* (или *в произведении*) $A\times A$.

Ясно, что $\mathrm{pr}_1\Delta_A=\mathrm{pr}_2\Delta_A=A$. Соответствие $I_A=(\Delta_A, A, A)$ называется *тождественным соответствием для* A; оно является обратным к самому себе.

Если Γ — соответствие между A и B, I_A — тождественное соответствие для A, I_B — тождественное соответствие для B, то $\Gamma\circ I_A= I_B\circ\Gamma=\Gamma$.

4. Функции

Определение 9. *Мы говорим, что график* F *есть функциональный график, если для каждого* x *существует не более чем один объект, соответствующий этому* x *относительно* F (гл. I, § 5, n° 3). *Мы говорим, что соответствие* $f=(F, A, B)$ *есть функция, если его график* F *есть функциональный график, а его область отправления* A *равна его области определения* $\mathrm{pr}_1 F$. *Иначе говоря, соответствие* $f=(F, A, B)$ *есть функция, если для каждого* x, *принадлежащего к области отправления* A *соответствия* f, *соотношение* $(x, y)\in F$ *является функциональным по* y (гл. I, § 5, n° 3); *единственный предмет, соответствующий предмету* x *при соответствии* f, *называется значением функции* f *для элемента* x *из* A *и обозначается через* $f(x)$ *или* f_x (или $F(x)$, или F_x).

Если f — функция, F — ее график и x — элемент области определения функции f, то соотношение $y=f(x)$, стало быть, эквивалентно $(x, y)\in F$ (гл. I, § 5, n° 3, критерий C 46).

Замечание. Необходимо остерегаться путаницы, которая может возникнуть при одновременном употреблении обозначения $f(x)$ и обозначения $f(X)$ (синонима к обозначению $f\langle X\rangle$), введенного в определении 3 (ср. упр. 11).

Пусть A и B — два множества; назовем *отображением множества* A *в множество* B функцию f, у которой область отправления (равная области определения) равна A, а область прибытия равна B; говорят также, что такая функция *определена на* A *и принимает свои значения в* B.

Вместо того чтобы сказать: „пусть f есть отображение A в B", часто говорят: „пусть дано отображение f: $A\to B$" или даже просто: „пусть f: $A\to B$". Чтобы облегчить чтение рассуждений, где встречается несколько отображений, мы будем пользоваться *диаграммами*, такими, как

$$\begin{array}{ccccc} & & & C & \\ & & \overset{g}{\nearrow} & & \overset{i}{\searrow} \\ A & \xrightarrow{f} & B & & & E, \\ & & \underset{h}{\searrow} & & \underset{j}{\nearrow} \\ & & & D & \end{array}$$

где, например, группа знаков $A\xrightarrow{f}B$ означает, что f есть отображение A в B.

Говорят еще, что функция f, определенная в A, *преобразует* x *в* $f(x)$ (для каждого $x\in A$), или что $f(x)$ есть *трансформат* объекта x *по* (или *относительно*, или *при*) f, или (вольность речи), что $f(x)$ есть *образ объекта* x *по* (или *относительно*, или *при*) f.

В некоторых случаях функциональный график называется также *семейством*; область определения называется тогда *множеством индексов*, а область значений называется — как вольность речи — *множеством элементов* семейства. В этом-то случае и используют особенно часто индексную запись f_x, чтобы обозначить значение функции f для элемента x. Когда множество индексов есть произведение двух множеств, часто говорят, что мы имеем дело с *двойным семейством*.

Аналогично функция, областью прибытия которой является множество E, называется иногда *семейством элементов множества* E. Когда каждый элемент из E есть часть множества F, то говорят также, что имеется *семейство частей множества* F.

В дальнейшей части трактата мы часто будем употреблять слово „функция" вместо слов „функциональный график".

Примеры функций. 1) Пустое множество есть функциональный график; всякая функция, у которой график пустой, имеет в качестве области определения и в качестве области значений пустое множество; та из этих функций, у которой область прибытия есть пустое множество [т. е., иначе говоря, функция $(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$], называется *пустой функцией*.

2) Пусть A — множество; тождественное соответствие для A (n° 3) есть функция, называемая *тождественным отображением множества* A.

С каждым множеством А сопоставляется, таким образом, семейство, образованное тождественным отображением множества А; у этого семейства множество А служит множеством индексов и множеством элементов. Допуская вольность речи, иногда обозначают какое-нибудь множество словом „семейство"; при этом речь идет именно о том семействе, которое ставится в соответствие рассматриваемому множеству указанным способом.

Мы говорим, что функция f *постоянна*, если, каковы бы ни были x и x' в области определения функции f, всегда $f(x) = f(x')$.

Пусть f — отображение множества E в множество E. Мы говорим, что элемент x из E *инвариантен* (или *неподвижен*) *при* (или *относительно*, или *для*) f, если $f(x) = x$.

5. Сужения и продолжения функций

Мы говорим, что две функции f и g *совпадают на множестве* E, если E содержится в областях определения функций f и g и если $f(x) = g(x)$ для каждого $x \in$ E. Две функции, имеющие один и тот же график, совпадают на их области определения. Сказать, что $f = g$ все равно, что сказать, что f и g обладают одной и той же областью определения А, одной и той же областью прибытия В и совпадают на А.

Пусть $f = $ (F, A, B) и $g = $ (G, C, D) суть две функции. Сказать, что F$\subset$G все равно, что сказать, что область определения А функции f содержится в области определения С функции g и что g совпадает с f на А. Если, кроме того, B$\subset$D, мы говорим, что g есть *продолжение* функции f (или, точнее, продолжение функции f на множество С) или что g продолжает f (на С). Когда g называется семейством элементов из D, говорят также, что f есть *подсемейство семейства* g.

Пусть f — функция, А — часть области определения функции f. Непосредственно очевидно, что соотношение „$x \in$ A и $y = f(x)$" обладает графиком G по x и y, что этот график функциональный и что А есть его область определения; функцию с графиком G, имеющую ту же область прибытия, что и f, называют *сужением функции* f *на часть* А; иногда ее обозначают через f/A. Любая функция является продолжением любого своего сужения. Если две функции f и g имеют одну и ту же область прибытия и совпадают на множестве E, то их сужения на множество E равны.

6. Определение функции через терм

C54. *Пусть* T *и* A — *два терма*, x *и* y — *различные буквы. Предполагается, что* x *не встречается в* A *и что* y *не встречается ни в* T, *ни в* A. *Пусть* R *есть соотношение* „$x \in A$ *и* $y = T$". *Соотношение* R *обладает графиком* F *по буквам* x *и* y. *Этот график функциональный; его первая проекция есть* A, *а его вторая проекция есть множество объектов вида* T *для* $x \in A$ (§ 1, n° 6). *Каково бы ни было* $x \in A$, *всегда* $F(x) = T$.

В самом деле, пусть B — множество объектов вида T для $x \in A$. Тогда $R \Rightarrow ((x, y) \in A \times B)$; так как знакосочетание, обозначаемое через $A \times B$, не содержит ни x, ни y, то R допускает график F по буквам x и y (n° 1). Ясно, что соотношение „$(x, y) \in F$ и $(x, y') \in F$" влечет $y = y'$; следовательно, F есть функциональный график. Остальная часть критерия очевидна.

Если C — множество, содержащее множество B предметов вида T для $x \in A$ (причем y не встречается в C), то функция (F, A, C) записывается также в виде $x \to T (x \in A, T \in C)$; соответствующее знакосочетание формальной математики не содержит ни x, ни y и не зависит от выбора буквы y, удовлетворяющей предыдущим условиям. Когда контекст достаточно прозрачен, можно довольствоваться записью $x \to T (x \in A)$, $(T)_{x \in A}$ или $x \to T$, а иногда просто T или (T). °Например, можно говорить о „функции x^3", если контекст указывает ясно, что речь идет об отображении $x \to x^3$ множества комплексных чисел в себя.$_0$

Примеры. 1) Если f — отображение множества А в В, то функция f равна функции $x \to f(x) (x \in$ A, $f(x) \in$ B), которую можно записать просто как $x \to f(x)$ или же $(f_x)_{x \in \mathrm{A}}$ (именно при использовании этого последнего обозначения и говорят особенно часто „семейство элементов" вместо „функция").

2) Пусть G — множество пар. Функции

$$z \to \mathrm{pr}_1 z \, (z \in \mathrm{G}, \ \mathrm{pr}_1 z \in \mathrm{pr}_1 \mathrm{G}) \quad \text{и} \quad z \to \mathrm{pr}_2 z \, (z \in \mathrm{G}, \ \mathrm{pr}_2 z \in \mathrm{pr}_2 \mathrm{G})$$

называются соответственно *первой* и *второй координатными функциями* на G; их обозначают через pr_1 и pr_2, когда это не вызывает путаницы.

7. Композиция двух функций. Обратная функция

Предложение 6. *Если* f — *отображение множества* А *в* В, *а* g — *отображение* В *в* С, *то* $g \circ f$ *есть отображение* А *в* С.

Пусть F и G — графики f и g; покажем, что G$\circ$F есть функциональный график. Пусть x, z, z' — такие объекты, что $(x, z) \in$ G$\circ$F, $(x, z') \in$ G$\circ$F. Существуют объекты y, y', такие, что $(x, y) \in$ F, $(x, y') \in$ F, $(y, z) \in$ G, $(y', z') \in$ G. Так как F — функциональный график, то $y = y'$ и, следовательно, $(y, z') \in$ G. Так как G — функциональный график, то из сказанного вытекает, что $z = z'$, но это доказывает наше утверждение. С другой стороны, область определения $g \circ f$, конечно, есть А, что завершает доказательство.

Функцию $g \circ f$ можно записать также в виде $x \to g(f(x))$ (n° 6), иногда же в виде gf, когда это не может привести к путанице.

Определение 10. *Пусть* f — *отображение* А *в* В. *Мы скажем, что* f *есть инъекция*, ⟨*une injection*⟩, *или инъективное ото-*

бражение, если любые два различных элемента из A *имеют различные образы относительно* f. *Мы скажем, что* f *есть* **сюръекция**, *или* **сюръективное отображение**, *если* $f(A) = B$. *Мы скажем, что* f *есть* **биекция**, *или* **биективное отображение**, *если* f *одновременно инъективно и сюръективно.*

Вместо „f инъективно“ говорят также, что «f ***взаимно однозначно***“. Вместо „f сюръективно“ говорят также, что f есть отображение множества A ***на*** B или что f есть ***параметрическое представление множества*** B ***посредством множества*** (или ***через множество***) A (в последнем случае A называется ***множеством параметров*** этого представления, а элементы из A носят название ***параметров***). Если f биективно, говорят также, что f ***устанавливает взаимно однозначное соответствие между*** A ***и*** B или ***приводит*** A ***и*** B ***во взаимно однозначное соответствие***. Биекция множества A на A называется также ***перестановкой*** множества A.

Примеры. 1) Если $A \subset B$, то отображение множества A в B, графиком которого является диагональ в $A \times A$, инъективно и называется ***каноническим отображением*** или ***канонической инъекцией*** (или просто ***инъекцией***) множества A и B.

2) Пусть A — множество. Отображение $x \to (x, x)$ множества A в диагональ Δ_A множества $A \times A$ есть биективное отображение, называемое ***диагональным отображением*** множества A.

3) Пусть G — множество пар. Отображение pr_1 (соответственно pr_2) множества G в $\mathrm{pr}_1 G$ (соответственно $\mathrm{pr}_2 G$) сюръективно; для инъективности отображения pr_1 необходимо и достаточно, чтобы G было функциональным графиком.

4) Пусть G — множество пар. Отображение $z \to (\mathrm{pr}_2 z, \mathrm{pr}_1 z)$ множества G в $\overset{-1}{G}$ есть биекция (называемая ***канонической***).

5) Пусть A — множество, b — объект. Отображение $x \to (x, b)$ множества A в $A \times \{b\}$ есть биекция.

Предложение 7. *Пусть* f — *отображение множества* A *в множество* B. *Для того чтобы* $\overset{-1}{f}$ *было функцией, необходимо и достаточно, чтобы отображение* f *было биективным.*

В самом деле, если $\overset{-1}{f}$ есть функция, то ее область отправления B равна ее области определения, т. е. $f(A)$. С другой стороны, пусть x и y суть два элемента из A, такие, что $f(x) = f(y)$. Если F — график для f, то $(f(x), x) \in \overset{-1}{F}$ и $(f(y), y) \in \overset{-1}{F}$; следовательно, $(f(x), y) \in \overset{-1}{F}$; значит $x = y$. Таким образом, отображение f инъективно, а потому и биективно. Обратно, если f биективно, то сразу же ясно, что $\overset{-1}{F}$ есть функциональный график и что область определения для $\overset{-1}{f}$ равна B.

Когда f биективно, $\overset{-1}{f}$ называется ***отображением, обратным*** к f; $\overset{-1}{f}$ биективно, $\overset{-1}{f} \circ f$ есть тождественное отображение множества A и $f \circ \overset{-1}{f}$ есть тождественное отображение множества B.

Если перестановка тождественна с обратной перестановкой, то она называетсл ***инволютивной***.

Замечание. Пусть f — отображение множества A в B; для всякой части X множества A мы видели (п° 3), что $X \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$. Кроме того, для всякой части Y множества B справедливо $f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle \subset Y$: в самом деле, соотношение $y \in f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle$ эквивалентно соотношению

$$(\exists x)((\exists z)(z \in Y \text{ и } z = f(x)) \text{ и } y = f(x)),$$

а потому влечет соотношение $(\exists z)(z \in Y \text{ и } y = z)$ и, следовательно, соотношение $y \in Y$.

Если f — *сюръекция*, то $f\langle \overset{-1}{f}\langle Y\rangle\rangle = Y$ для всякой части Y множества B, ибо соотношение $y \in Y \subset B$ влечет, по предположению, соотношение $(\exists x)(y = f(x))$, а следовательно, и $(\exists x)(y \in Y \text{ и } y = f(x))$; но „$y \in Y$ и $y = f(x)$“ влечет $(\exists z)(z \in Y \text{ и } z = f(x))$, откуда и следует наше утверждение.

Если f — *инъекция*, то для всякой части X множества A справедливо $\overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle = X$. Действительно, соотношение $x \in \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$ эквивалентно соотношению $f(x) \in f\langle X\rangle$, а следовательно, и соотношению $(\exists z)(z \in X \text{ и } f(z) = f(x))$; но наше предположение означает, что $f(z) = f(x)$ влечет $z = x$; следовательно, $x \in \overset{-1}{f}\langle f\langle X\rangle\rangle$ влечет $x \in X$.

8. Ретракции и иссечения

Предложение 8. *Пусть* f — *отображение множества* A *в* B. *Если существует такое отображение* r (соответственно s) *множества* B *в* A, *что* $r \circ f$ (соответственно $f \circ s$) *есть тождественное отображение множества* A (соответственно B), *то* f *инъективно* (соответственно *сюръективно*). *Обратно, если* f *сюръективно, то существует такое отображение* s *множества* B *в* A, *что* $f \circ s$ *есть тождественное отображение множества* B. *Если* f *инъективно и* $A \neq \varnothing$, *то существует такое отображение* r *множества* B *в* A, *что* $r \circ f$ *есть тождественное отображение множества* A.

В самом деле, если существует отображение r множества B в A, такое, что $r \circ f$ есть тождественное отображение множества A, то равенство $f(x) = f(y)$, где $x \in A$ и $y \in A$, влечет $x = r(f(x)) = r(f(y)) = y$; следовательно, f инъективно. Если существует отображение s множества B в множество A, такое, что $f \circ s$ есть тождественное отображение множества B, то $B = f(s(B)) \subset f(A) \subset B$; следовательно, f сюръективно. Если f сюръективно, обозначим через T терм $\tau_y (y \in A \text{ и } f(y) = x)$; тогда $f(T) = x$ для $x \in B$; если обозначить через s отображение $x \to T (x \in B, T \in A)$, то $f \circ s$ есть

тождественное отображение множества B. Наконец, предположим, что отображение f инъективно и $A \neq \varnothing$. Пусть a — элемент из A; соотношение

$$„(y \in A \text{ и } x = f(y)) \quad \text{или} \quad (y = a \text{ и } x \in B - f(A))“$$

влечет $(x, y) \in B \times A$, а следовательно, допускает график R относительно букв x и y. Этот график является функциональным ввиду предположения о f, и его область определения есть B. Наконец, $R(x) = a$, если $x \in B - f(A)$, и $f(R(x)) = x$, если $x \in f(A)$. Следовательно, функция $r = (R, B, A)$ обладает тем свойством, что $r \circ f$ есть тождественное отображение множества A.

Следствие. *Пусть* A *и* B — *множества,* f — *отображение множества* A *в* B, g — *отображение множества* B *в* A. *Если* $g \circ f$ — *тождественное отображение множества* A *и* $f \circ g$ — *тождественное отображение множества* B, *то* f *и* g *биективны и* $g = \overset{-1}{f}$.

Определение 11. *Пусть* f — *инъективное* (соответственно *сюръективное*) *отображение множества* A *в множество* B. *Всякое отображение* r (соответственно s) B *в* A, *такое, что* $r \circ f$ (соответственно $f \circ s$) *есть тождественное отображение множества* A (соответственно B), ***называется ретракцией*** (соответственно ***иссечением***), ***ассоциированной*** (***ассоциированным***) *с* f.

Вместо „ретракция“ (соответственно „иссечение“) иногда говорят „***левая*** (соответственно ***правая***) ***инверсия***“.

Если f инъективно (соответственно сюръективно) и r (соответственно s) есть ретракция (соответственно иссечение), ассоциированная (соответственно ассоциированное) с f, то f есть иссечение (соответственно ассоциированное (соответственно ассоциированная) с r (соответственно с s). Следовательно, ретракция сюръективна, иссечение инъективно.

Если f сюръективно и s, s' — два иссечения, ассоциированные с f, такие, что $s(B) = s'(B)$, то $s = s'$; в самом деле, если $x \in B$, то существует такое $y \in B$, что $s(x) = s'(y)$; тогда $x = f(s(x)) = f(s'(y)) = y$, а следовательно, $s(x) = s'(x)$, так что $s = s'$. Таким образом, иссечение s однозначно определяется множеством $s(B)$, а потому, допуская вольность речи, иногда само множество $s(B)$ можно назвать ***иссечением***, ассоциированным с f.

Теорема 1. *Пусть* f — *отображение множества* A *в множество* B, *а* f' — *отображение множества* B *в множество* C, *и пусть* $f'' = f' \circ f$. *Тогда*:

а) *если* f *и* f' — *инъекции, то и* f'' — *инъекция; если* r, r' — *ретракции, ассоциированные с* f *и* f', *то* $r \circ r'$ — *ретракция, ассоциированная с* f'';

б) *если* f *и* f' — *сюръекции, то и* f'' — *сюръекция; если* s, s' — *иссечения, ассоциированные с* f *и* f', *то* $s \circ s'$ — *иссечение, ассоциированное с* f'';

в) *если* f'' — *инъекция, то и* f — *инъекция; если* r'' — *ретракция, ассоциированная с* f'', *то* $r'' \circ f'$ — *ретракция, ассоциированная с* f;

г) *если* f'' — *сюръекция, то и* f' — *сюръекция; если* s'' — *иссечение, ассоциированное с* f'', *то* $f \circ s''$ — *иссечение, ассоциированное с* f';

д) *если* f'' — *сюръекция и* f' — *инъекция, то* f — *сюръекция; если* s'' — *иссечение, ассоциированное с* f'', *то* $s'' \circ f'$ *есть иссечение, ассоциированное с* f;

е) *если* f'' — *инъекция и* f — *сюръекция, то* f' *есть инъекция; если* r'' — *ретракция, ассоциированная с* f'', *то* $f \circ r''$ *есть ретракция, ассоциированная с* f'.

Для всякого множества E обозначим символом I_E тождественное отображение этого множества E.

а) Так как $r \circ f = I_A$ и $r' \circ f' = I_B$, то

$$(r \circ r') \circ (f' \circ f) = r \circ I_B \circ f = r \circ f = I_A.$$

Если f и f' — инъекции, то, стало быть, и f'' — инъекция, согласно предложению 8, если только $A \neq \varnothing$; но случай $A = \varnothing$ очевиден.

б) Так как $f \circ s = I_B$ и $f' \circ s' = I_C$, то

$$(f' \circ f) \circ (s \circ s') = f' \circ I_B \circ s' = f' \circ s' = I_C.$$

Если f и f' — сюръекции, то, стало быть, и f'' — сюръекция, согласно предложению 8.

в) Так как $r'' \circ f'' = I_A$, то $(r'' \circ f') \circ f = r'' \circ f'' = I_A$. Если f'' — инъекция, то, стало быть, и f — инъекция, согласно предложению 8, если только $A \neq \varnothing$; но случай $A = \varnothing$ очевиден.

г) Так как $f'' \circ s'' = I_C$, то $f' \circ (f \circ s'') = f'' \circ s'' = I_C$. Если f'' — сюръекция, то, стало быть, и f' — сюръекция, согласно предложению 8.

д) $f'' \circ s'' = I_C$ и f' есть биекция, согласно г). Следовательно,

$$f \circ (s'' \circ f') = (\overset{-1}{f'} \circ f') \circ f \circ (s'' \circ f') = \overset{-1}{f'} \circ (f'' \circ s'') \circ f' = \overset{-1}{f'} \circ I_C \circ f' = \overset{-1}{f'} \circ f' = I_B.$$

Если f'' — сюръекция и f' — инъекция, то, стало быть, f — сюръекция, согласно предложению 8.

е) $r'' \circ f'' = I_A$ и f есть биекция, согласно в). Следовательно,

$$(f \circ r'') \circ f' = (f \circ r'') \circ f' \circ (f \circ \overset{-1}{f}) = f \circ (r'' \circ f'') \circ \overset{-1}{f} = f \circ I_A \circ \overset{-1}{f} = f \circ \overset{-1}{f} = I_B.$$

Если f'' — инъекция и f — сюръекция, то, стало быть, f' — инъекция, согласно предложению 8, при $A \neq \varnothing$; но случай $A = \varnothing$ очевиден (тогда $B = f\langle A \rangle = \varnothing$).

Предложение 9. а) *Пусть* E, F, G — *множества,* g — *отображение множества* E *на* F, f — *отображение множества* E *в* G. *Для существования отображения* h *множества* F *в* G, *такого, что* $f = h \circ g$ (рис. 1), *необходимо и достаточно, чтобы соотношение*

E, F, G; f, g, s, h — Рис. 1 G, E, F; f, r, g, h — Рис. 2

$g(x) = g(y)$ *(где* $x \in E$, $y \in E$*) влекло соотношение* $f(x) = f(y)$. *Отображение* h *однозначно определяется отображением* f; *если* s — *иссечение, ассоциированное с* g, *то* $h = f \circ s$.

б) *Пусть* E, F, G — *множества,* g — *взаимно однозначное отображение множества* F *в* E, f — *отображение множества* G *в* E. *Для существования отображения* h *множества* G *в* F, *такого, что* $f = g \circ h$ (рис. 2), *необходимо и достаточно, чтобы* $f(G) \subset g(F)$. *Отображение* h *однозначно определяется отображением* f; *если* r — *ретракция, ассоциированная с* g, *то* $h = r \circ f$.

а) Если $f = h \circ g$, то соотношение $g(x) = g(y)$ (где $x \in E$, $y \in E$) влечет, очевидно, $f(x) = f(y)$. Для каждого иссечения s, ассоциированного с g, справедливо $h = h \circ (g \circ s) = f \circ s$. Это показывает, что h однозначно определяется отображением f. Обратно, предположим, что соотношение $g(x) = g(y)$ влечет $f(x) = f(y)$; пусть s — иссечение, ассоциированное с g; положим $h = f \circ s$. Для всякого $x \in E$, тогда $g(s(g(x))) = g(x)$ и, следовательно, $f(s(g(x))) = f(x)$, или $h(g(x)) = f(x)$, следовательно, $f = h \circ g$.

б) Если $f = g \circ h$, то, очевидно, $f(G) \subset g(F)$ и для всякой ретракции r, ассоциированной с g, справедливо $h = (r \circ g) \circ h = r \circ f$, а это доказывает, что h однозначно определяется отображением f. Обратно, предположим, что $f(G) \subset g(F)$; пусть r — ретракция, ассоциированная с g, и пусть $h = r \circ f$; для каждого $x \in G$ существует такой $y \in F$, что $f(x) = g(y)$; следовательно, $g(h(x)) = g(r(f(x))) = g(r(g(y))) = g(y) = f(x)$; но тем самым $f = g \circ h$.

9. Функции двух аргументов.

Функцией двух аргументов называется функция, областью определения которой является множество пар (или, что то же, часть некоторого произведения). Пусть f — такая функция; если (x, y) — элемент из области определения функции f, то значение $f((x, y))$ функции f в точке (x, y) обозначается обычно символом $f(x, y)$.

Пусть f — функция двух аргументов, D — ее область определения, C — ее область прибытия. Для всякого y пусть A_y есть множество таких x, что $(x, y) \in D$ [т. е. срез множества $\overset{-1}{D}$ по y (n°1)]. Отображение $x \to f(x, y)$ $(x \in A_y,\ f(x, y) \in C)$ называется ***частным*** (или ***парциальным***) ***отображением, задаваемым функцией*** f ***при значении*** y ***второго аргумента***, и обозначается символом $f(\cdot, y)$ или $f(, y)$ (или иногда f_y); таким образом, $f(\cdot, y)(x) = f(x, y)$ для $(x, y) \in D$. Подобно этому, для всякого x пусть B_x есть множество таких y, что $(x, y) \in D$. Отображение $y \to f(x, y)$ $(y \in B_x,\ f(x, y) \in C)$ называется ***частным*** (или ***парциальным***) ***отображением, задаваемым функцией*** f ***при значении*** x ***первого аргумента***, и обозначается символом $f(x, \cdot)$ или $f(x,)$ (или иногда f_x); таким образом, $f(x, \cdot)(y) = f(x, y)$ для $(x, y) \in D$.

Если для всякого y (соответственно x) частное отображение $f(\cdot, y)$ (соответственно $f(x, \cdot)$) является постоянным отображением, то говорят, что f ***не зависит*** от своего первого (соответственно второго) аргумента; это, стало быть, означает, что $f(x, y) = f(x', y)$, если (x, y) и (x', y) находятся в D [соответственно $f(x, y) = f(x, y')$, если (x, y) и (x, y') находятся в D]. Для всякого y, принадлежащего второй проекции области D, мы будем обозначать через $g(y)$ общее значение всех $f(x, y)$ для $x \in A_y$[1]; отображение $y \to g(y)$ есть отображение проекции $pr_2 D$ в C, такое, что $g(y) = f(x, y)$ для $(x, y) \in D$.

Обратно, пусть g — отображение множества B в множество C и пусть A — произвольное множество. Отображение $(x, y) \to g(y)$ множества $A \times B$ в C не зависит от первого из своих аргументов.

Пусть u — отображение множества A в C, v — отображение множества B в D. Отображение $z \to (u(pr_1 z), v(pr_2 z))$ множества $A \times B$ в $C \times D$ называется ***каноническим распространением*** (или ***распространением***) ***отображений*** u и v ***на произведения множеств*** или еще ***произведением отображений*** u и v (если можно не бояться путаницы) и обозначается иногда символом $u \times v$ или (u, v); область его значений есть $u\langle A \rangle \times v\langle B \rangle$. Если u и v — инъективные (соответственно сюръективные) отображения, то $u \times v$ — тоже инъективное (соответственно сюръективное) отображение. Если u и v биективны, то $u \times v$ тоже биективно и отображение, обратное к $u \times v$, есть $\overset{-1}{u} \times \overset{-1}{v}$. Если u' — отображение множества C

[1]) Эта фраза не совсем точна [остается неясным, что же именно обозначается через $g(y)$] и должна быть, по-видимому, уточнена следующим образом: „через $g(y)$ будем обозначать $\tau_z((\exists x)(x \in A_y$ и $f(x, y) = z))$“. — *Прим. ред.*

в множество E, а v' — отображение множества D в множество F, то

$$(u' \times v') \circ (u \times v) = (u' \circ u) \times (v' \circ v).$$

Если U и V — графики соответственно для u и v, то график W для $u \times v$ есть множество таких пар $((x, y), (z, t))$ из $(A \times B) \times (C \times D)$, что $(x, z) \in U$ и $(y, t) \in V$; это множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие с произведением $U \times V$ [частью произведения $(A \times C) \times (B \times D)$] посредством отображения $((x, y), (z, t)) \to ((x, z), (y, t))$ (ср. § 5, n° 5).

Упражнения

1) Показать, что соотношения $x \in y$, $x \subset y$, $x = \{y\}$ не обладают графиками по x и y.

2) Пусть G — график. Показать, что соотношение $X \subset \mathrm{pr}_1 G$ эквивалентно соотношению $X \subset \overset{-1}{G}\langle G \langle X \rangle \rangle$.

3) Пусть G и H — два графика. Показать, что соотношение $\mathrm{pr}_1 H \subset \mathrm{pr}_1 G$ эквивалентно соотношению $H \subset H \circ \overset{-1}{G} \circ G$; вывести отсюда, что $G \subset G \circ \overset{-1}{G} \circ G$.

4) Если G — график, показать, что $\varnothing \circ G = G \circ \varnothing = \varnothing$. Для того чтобы $\overset{-1}{G} \circ G = \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы $G = \varnothing$.

5) Пусть A и B — два множества, G — график. Показать, что

$$(A \times B) \circ G = \overset{-1}{G}\langle A \rangle \times B \text{ и } G \circ (A \times B) = A \times G\langle B \rangle.$$

6) Для всякого графика G пусть G′ есть график $((\mathrm{pr}_1 G) \times (\mathrm{pr}_2 G)) - G$. Показать, что $(\overset{-1}{G})' = \overset{-1}{\widehat{G'}}$ и

$$G \circ (\overset{-1}{G})' \subset \Delta'_B, \quad (\overset{-1}{G}) \circ G \subset \Delta'_A,$$

если $A \supset \mathrm{pr}_1 G$ и $B \supset \mathrm{pr}_2 G$. Для того чтобы $G = (\mathrm{pr}_1 G) \times (\mathrm{pr}_2 G)$, необходимо и достаточно, чтобы $G \circ \overset{-1}{G'} \circ G = \varnothing$.

7) Для того чтобы график G был функциональным, необходимо и достаточно, чтобы $G\langle \overset{-1}{G} \langle X \rangle \rangle \subset X$ для всякого множества X.

8) Пусть A и B — два множества, Γ — соответствие между A и B, Γ′ — соответствие между B и A. Показать, что если $\Gamma'(\Gamma(x)) = \{x\}$ для всякого $x \in A$ и $\Gamma(\Gamma'(y)) = \{y\}$ для всякого $y \in B$, то Γ есть биекция множества A на множество B, а Γ′ — обратное отображение.

9) Пусть A, B, C, D — множества, f — отображение множества A в B, g — отображение множества B в C, h — отображение множества C в D. Показать, что если $g \circ f$ и $h \circ g$ — биекции, то f, g, h — тоже биекции.

10) Пусть A, B, C — множества, f — отображение множества A в B, g — отображение множества B в C, h — отображение множества C в A. Показать, что если среди отображений $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$ два являются сюръекциями, а третье — инъекцией или два являются инъекциями, а третье — сюръекцией, то f, g, h суть биекции.

°11) Найти ошибку в следующем рассуждении: пусть **N** — множество натуральных чисел, A — множество целых чисел $n > 2$, для которых существуют три таких строго положительных целых числа x, y, z, что $x^n + y^n = z^n$. Множество A непусто (иначе говоря, „великая теорема Ферма" неверна). В самом деле, пусть $B = \{A\}$ и $C = \{\mathbf{N}\}$: так как B и C — множества, состоящие из единственного элемента, то существует биекция f множества B на множество C. Таким образом, $f(A) = \mathbf{N}$; если A было бы пусто, то мы получили бы $\mathbf{N} = f(\varnothing) = \varnothing$, что абсурдно.$_\circ$

§ 4. Объединение и пересечение семейства множеств

1. Определение объединения и пересечения семейства множеств.

Пусть X — семейство (§ 3, n° 4), I — его множество индексов; для облегчения интуитивного истолкования дальнейшего мы будем говорить, что X — *семейство множеств*.

Если $(X, I, \mathfrak{G})$ — *семейство частей некоторого множества* E (т. е. семейство элементов, у которого область прибытия $\mathfrak{G}$ такова, что соотношение $Y \in \mathfrak{G}$ влечет $Y \subset E$), то мы будем обозначать его символом $(X_\iota)_{\iota \in I}$ $(X_\iota \in \mathfrak{G})$ или просто символом $(X_\iota)_{\iota \in I}$ (§ 3, n° 6); допуская вольность в обозначениях, мы будем обозначать символом $(X_\iota)_{\iota \in I}$ также произвольное семейство множеств с множеством индексов I.

Так как верно соотношение

$$(\forall x)((\iota \in I \quad \text{и} \quad x \in X_\iota) \Rightarrow (x \in X_\iota)),$$

то из S5 (гл. I, § 4, n° 2) вытекает, что верно соотношение

$$(\forall_\iota)(\exists Z)(\forall x)((\iota \in I \quad \text{и} \quad x \in X_\iota) \Rightarrow (x \in Z)).$$

Следовательно, в силу схемы S8 (§ 1, n° 6) соотношение $(\exists \iota)(\iota \in I$ и $x \in X_\iota)$ является *коллективизирующим* по x.

Определение 1. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств* (соответственно *семейство частей множества* E). *Множество* $\mathcal{E}_x((\exists_\iota)(\iota \in I$ и $x \in X_\iota))$, *т. е. множество тех* x, *которые принадлежат хотя бы одному множеству из семейства* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ [1], *называется объединением этого семейства и обозначается символом* $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$.

Если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство частей множества E, то его объединение есть часть множества E; нетрудно видеть, что оно не зависит ни от E, ни от области прибытия $\mathfrak{G}$ отображения $\iota \to X_\iota$.

Сразу же видно, что если $I = \varnothing$, то $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = \varnothing$, ибо тогда $(\exists \iota)(\iota \in I$ и $x \in X_\iota)$ неверно.

[1]) Схема S8 позволяет, таким образом, определить объединение семейства множеств, не предполагая априори, что эти множества суть части одного и того же множества (гипотеза, введенная при определении объединения в сводке результатов, § 4, n° 2).

Предположим теперь, что $I \neq \varnothing$. Если α — элемент множества I, то соотношение $(\forall\iota)((\iota \in I) \Rightarrow (x \in X_\iota))$ влечет $x \in X_\alpha$; следовательно, ввиду C52 (§ 1, n° 6) это соотношение является *коллективизирующим по* x.

Определение 2. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств, у которого множество индексов* I *непусто. Множество*

$$\mathcal{E}_x((\forall\iota)((\iota \in I) \Rightarrow (x \in X_\iota))),$$

т. е. множество тех x, *которые принадлежат всем множествам из семейства* $(X_\iota)_{\iota \in I}$, *называется пересечением этого семейства и обозначается* через $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

Если $I = \varnothing$, то соотношение $(\forall\iota)((\iota \in I) \Rightarrow (x \in X_\iota))$ не является коллективизирующим по x. В самом деле, это соотношение истинно и не существует такого множества Y, что $x \in Y$ есть истинное соотношение, ибо тогда Y было бы множеством всех объектов (ср. § 1, n° 7, „Замечание“).

Если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство частей множества E и если $I \neq \varnothing$, то соотношение „$x \in E$ и $(\forall\iota)((\iota \in I) \Rightarrow (x \in X_\iota))$“ эквивалентно соотношению $(\forall\iota)((\iota \in I) \Rightarrow (x \in X_\iota))$; таким образом, оно является коллективизирующим по x, и множество тех x, которые удовлетворяют этому соотношению, равно $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

Когда $I = \varnothing$, соотношение „$x \in E$ и $(\forall\iota)((\iota \in I) \Rightarrow (x \in X_\iota))$“ эквивалентно соотношению $x \in E$; кроме того, оно является коллективизирующим по x, и множество x, удовлетворяющих этому соотношению, есть E.

Ввиду этого мы предлагаем следующее определение.

Определение 3. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство частей множества* E. *Множество* $\mathcal{E}_x(x \in E$ и $(\forall\iota)((\iota \in I) \Rightarrow (x \in X_\iota)))$, *т. е. множество тех* x, *которые принадлежат* E *и всем множествам из семейства* $(X_\iota)_{\iota \in I}$, *называется пересечением этого семейства и обозначается через* $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

Таким образом, для семейства $(X_\iota)_{\iota \in \varnothing}$ частей множества E получаем $\bigcap_{\iota \in \varnothing} X_\iota = E$. Но для семейства $(X_\iota)_{\iota \in I}$ частей E, где множество индексов I непусто, пересечение $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$ не зависит ни от E, ни от области прибытия отображения $\iota \to X_\iota$, что и оправдывает употребление одинаковых обозначений в определениях 2 и 3.

Предложение 1. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств и пусть* f — *отображение множества* K *на* I. *Тогда*

$$\bigcup_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)} = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota,$$

а если $I \neq \varnothing$, *то* $\bigcap_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)} = \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

Пусть x — элемент из $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$. Существует такой индекс $\iota \in I$, что $x \in X_\iota$. Так как $f\langle K \rangle = I$, то существует такой индекс $\varkappa \in K$, что $\iota = f(\varkappa)$, откуда $x \in X_{f(\varkappa)}$ и, следовательно, $x \in \bigcup_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)}$. Обратно, если $x \in \bigcup_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)}$, то существует такой $\varkappa \in K$, что $x \in X_{f(\varkappa)}$, откуда $f(\varkappa) \in I$ ввиду $x \in \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$. Следовательно, $\bigcup_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)} = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$.

Предположим теперь, что $I \neq \varnothing$, и пусть x — элемент из $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$. Для всякого элемента $\varkappa$ из K справедливо $f(\varkappa) \in I$, откуда $x \in X_{f(\varkappa)}$ и $x \in \bigcap_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)}$. Пусть, обратно, x — элемент из $\bigcap_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)}$. Если ι — произвольный элемент из I, то существует такой элемент $\varkappa$ из K, что $\iota = f(\varkappa)$, откуда $x \in X_\iota$ и, следовательно, $x \in \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$. Следовательно, $\bigcap_{\varkappa \in K} X_{f(\varkappa)} = \bigcap_{\iota \in I} X_\iota$.

Для семейств частей данного множества ясно, что вторая часть предложения 1 остается справедливой и без ограничения $I \neq \varnothing$.

Следствие. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств, такое, что* $X_\iota = X_\varkappa$ *для каждой пары индексов* $(\iota, \varkappa)$. *Тогда для всякого* $\alpha \in I$ *справедливо* $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = X_\alpha$ *и (при* $I \neq \varnothing$) $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota = X_\alpha$.

Достаточно применить предложение 1 к постоянному отображению $\iota \to \alpha$ множества I на множество $\{\alpha\}$.

Определение 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *множество множеств и пусть* Φ — *семейство множеств, образованное тождественным отображением множества* $\mathfrak{F}$. *Объединение множеств из* Φ *и (если* $\mathfrak{F}$ *непусто) пересечение множеств из* Φ *называются соответственно объединением и пересечением множеств из* $\mathfrak{F}$ *и обозначаются символами* $\bigcup_{X \in \mathfrak{F}} X$ *и* $\bigcap_{X \in \mathfrak{F}} X$.

Из предложения 1 сразу же вытекает, что если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств, то объединение и (при $I \neq \varnothing$) пересечение этого

семейства равны соответственно объединению и пересечению множеств из множества элементов этого семейства.

2. *Свойства объединения и пересечения*

Если $(X_\iota)_{\iota\in I}$ и $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — семейства множеств, имеющие одно и то же множество индексов I, и если $Y_\iota\subset X_\iota$ для каждого $\iota\in I$, то легко видеть, что $\bigcup_{\iota\in I} Y_\iota\subset\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$ и (при $I\neq\varnothing$) $\bigcap_{\iota\in I} Y_\iota\subset\bigcap_{\iota\in I} X_\iota$.

Пусть $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство множеств. Если $J\subset I$, то $\bigcup_{\iota\in J} X_\iota\subset\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$ и (при $J\neq\varnothing$) $\bigcap_{\iota\in J} X_\iota\supset\bigcap_{\iota\in I} X_\iota$.

Предложение 2. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство множеств, у которого множество индексов* I *есть объединение семейства* $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ *множеств. Тогда*

$$\bigcup_{\iota\in I} X_\iota=\bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\Big)$$

и (если $L\neq\varnothing$ *и* $J_\lambda\neq\varnothing$ *для каждого* $\lambda\in L$)

$$\bigcap_{\iota\in I} X_\iota=\bigcap_{\lambda\in L}\Big(\bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\Big)$$

(„ассоциативность“ объединения и пересечения).

Пусть x — элемент из $\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$. Существует такой индекс $\iota\in I$, что $x\in X_\iota$. Так как I — объединение семейства $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$, то существует такой индекс $\lambda\in L$, что $\iota\in J_\lambda$, откуда $x\in\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_\iota$ и, следовательно, $x\in\bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\Big)$. Обратно, пусть x — элемент множества $\bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\Big)$. Существует такой индекс $\lambda\in L$, что $x\in\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_\iota$, откуда вытекает существование такого индекса $\iota\in J_\lambda$ (следовательно, $\iota\in I$), что $x\in X_\iota$; отсюда можно заключить, что $x\in\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$.

Предположим теперь, что $L\neq\varnothing$ и $J_\lambda\neq\varnothing$ для каждого $\lambda\in L$; тогда $I\neq\varnothing$. Пусть x — элемент из $\bigcap_{\iota\in I} X_\iota$. Если $\lambda\in L$, то $x\in X_\iota$ для каждого $\iota\in J_\lambda$ (ибо $J_\lambda\subset I$), откуда $x\in\bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_\iota$. Так как это верно для каждого $\lambda\in L$, то отсюда можно вывести, что x принадлежит к $\bigcap_{\lambda\in L}\Big(\bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\Big)$. Обратно, пусть x — элемент этого последнего мно-

жества и пусть ι — произвольный элемент из I. Существует такое $\lambda\in L$, что $\iota\in J_\lambda$; так как $x\in\bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_\iota$, то $x\in X_\iota$. Поскольку это верно для каждого $\iota\in I$, то $x\in\bigcap_{\iota\in I} X_\iota$. Следовательно, предложение 2 доказано.

Для семейств частей множества вторая часть предложения 2 остается справедливой и без ограничений на L и J_λ.

3. *Образы объединения и пересечения*

Предложение 3. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство частей множества* A, *а* Γ — *соответствие между* A *и* B. *Тогда*

$$\Gamma\Big\langle\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\Big\rangle=\bigcup_{\iota\in I}\Gamma\langle X_\iota\rangle \quad \text{и} \quad \Gamma\Big\langle\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\Big\rangle\subset\bigcap_{\iota\in I}\Gamma\langle X_\iota\rangle.$$

Соотношение $(\exists x)\Big(x\in\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$ и $y\in\Gamma(x)\Big)$ эквивалентно соотношению $(\exists x)(\exists_\iota)(\iota\in I$ и $x\in X_\iota$ и $y\in\Gamma(x))$, а следовательно, и соотношению $(\exists_\iota)(\iota\in I$ и $y\in\Gamma\langle X_\iota\rangle)$, т. е. $y\in\bigcup_{\iota\in I}\Gamma\langle X_\iota\rangle$, что доказывает первую формулу. С другой стороны, для каждого $\iota\in I$ справедливо $\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\subset X_\iota$, откуда (§ 3, предложение 2) $\Gamma\Big\langle\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\Big\rangle\subset\Gamma\langle X_\iota\rangle$ и, следовательно, $\Gamma\Big\langle\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\Big\rangle\subset\bigcap_{\iota\in I}\Gamma\langle X_\iota\rangle$.

Если Γ — произвольное соответствие (или, в частности, произвольная функция), то формула $\Gamma\Big\langle\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\Big\rangle=\bigcap_{\iota\in I}\Gamma\langle X_\iota\rangle$, вообще говоря, неверна.

° Например, в плоскости $\mathbf{R}^2$ первые проекции прямых $y=x$ и $y=x+1$ тождественны с $\mathbf{R}$, но пересечение этих прямых пусто, а следовательно, пуста и первая проекция этого пересечения[1]. °

Однако можно сформулировать следующий важный результат:

Предложение 4. *Пусть* f — *отображение множества* A *в множество* B, *а* $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство частей множества* B. *Тогда*

$$\overset{-1}{f}\Big\langle\bigcap_{\iota\in I} Y_\iota\Big\rangle=\bigcap_{\iota\in I}\overset{-1}{f}\langle Y_\iota\rangle.$$

[1]) Знаменитая ошибка, связанная с применением предыдущей формулы, была совершена А. Лебегом при попытке доказать, что проекция на ось плоского борелева множества также есть борелево множество (результат, впоследствии признанный неверным; обсуждение его послужило началом теории „суслинских“ множеств); Лебег писал, что проекция пересечения убывающей последовательности множества равна пересечению их проекций (*Journal de Mathématiques*, (6), I (1905), 191—192).

Действительно, пусть x — элемент из $\bigcap_{\iota\in I} \overset{-1}{f}\langle Y_\iota\rangle$. Для каждого $\iota\in I$ имеет место $f(x)\in Y_\iota$, откуда $f(x)\in\bigcap_{\iota\in I} Y_\iota$ и, следовательно, $x\in \overset{-1}{f}\left\langle\bigcap_{\iota\in I} Y_\iota\right\rangle$. Следовательно, $\bigcap_{\iota\in I}\overset{-1}{f}\langle Y_\iota\rangle\subset \overset{-1}{f}\left\langle\bigcap_{\iota\in I} Y_\iota\right\rangle$, что вместе с предложением 3 завершает доказательство.

Следствие. *Если f — инъекция множества* A *в множество* B, *а* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство частей множества* A, *множество индексов которого непусто, то* $f\left\langle\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\right\rangle=\bigcap_{\iota\in I} f\langle X_\iota\rangle$.

В самом деле, можно записать $f=i\circ g$, где i — каноническая инъекция множества $f\langle A\rangle$ в B и g — биекция множества A на $f\langle A\rangle$. Тогда для каждой части X множества A $f\langle X\rangle=\overset{-1}{h}\langle X\rangle$, где символом h обозначено отображение, обратное к g; таким образом, мы пришли к предложению 4.

4. Дополнение объединения или пересечения

Предложение 5. *Для каждого семейства* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *частей множества* E

$$\complement_E\left(\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\right)=\bigcap_{\iota\in I}(\complement_E X_\iota) \quad \text{и} \quad \complement_E\left(\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\right)=\bigcup_{\iota\in I}(\complement_E X_\iota).$$

Пусть $x\in\complement_E\left(\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\right)$. Так как $x\in E$ и для каждого $\iota\in I$ имеет место $x\notin X_\iota$, то $x\in\complement_E X_\iota$; следовательно, $x\in\bigcap_{\iota\in I}(\complement_E X_\iota)$. Обратно, пусть $x\in\bigcap_{\iota\in I}(\complement_E X_\iota)$; по определению пересечения (определение 3) $x\in E$. Кроме того, если бы $x\in\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$, то существовало бы такое $\varkappa\in I$, что $x\in X_\varkappa$, а это противоречит предположению $x\in\bigcap_{\iota\in I}(\complement_E X_\iota)$; следовательно, $x\in\complement_E\left(\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\right)$. Это заканчивает доказательство первой формулы. Вторая сразу же вытекает отсюда, если учесть, что $\complement_E(\complement_E X)=X$ для всякой части X множества E.

5. Объединение и пересечение двух множеств

Если A и B — множества, положим

$$A\cup B=\bigcup_{X\in\{A,B\}} X,\quad A\cap B=\bigcap_{X\in\{A,B\}} X.$$

Ясно, что $A\cup B$ есть множество объектов, принадлежащих либо к A, либо к B (и, быть может, к ним обоим), в то время как $A\cap B$ есть множество объектов, принадлежащих сразу к A и к B. В частности, $\{x, y\}=\{x\}\cup\{y\}$.

Положим $\{x, y, z\}=\{x, y\}\cup\{z\}$. Множество $\{x, y, z\}$ есть множество, единственными элементами которого являются x, y и z. Аналогично положим $\{x, y, z, t\}=\{x, y, z\}\cup\{t\}$ и т. д.

Если теперь A, B, C, D — множества, положим:

$$A\cup B\cup C=\bigcup_{X\in\{A,B,C\}} X,\quad A\cap B\cap C=\bigcap_{X\in\{A,B,C\}} X,$$

$$A\cup B\cup C\cup D=\bigcup_{X\in\{A,B,C,D\}} X,\quad A\cap B\cap C\cap D=\bigcap_{X\in\{A,B,C,D\}} X \text{ и т. д.}$$

Пусть A, B, C — множества. Предложения 1 и 2 влекут формулы

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A,$$
$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C.$$

Эти формулы, впрочем, суть непосредственные следствия теорем, изложенных в критерии C 24 (гл. I, § 3, п° 5); аналогично доказываются формулы

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\qquad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(„дистрибутивность" объединения относительно пересечения и пересечения относительно объединения; ср. § 5, п° 6).

Соотношение $A\subset B$ эквивалентно $A\cup B=B$ и $A\cap B=A$. Если A и B — части множества E, то из предложения 5 (или из критерия C 24) легко выводятся формулы

$$\complement_E(A\cup B)=(\complement_E A)\cap(\complement_E B),\quad \complement_E(A\cap B)=\complement_E A\cup\complement_E B;$$

кроме того,

$$A\cup(\complement_E A)=E,\quad A\cap(\complement_E A)=\varnothing.$$

Если Γ — соответствие между E и F, а A и B — части от E, то из предложения 3 легко вывести, что

$$\Gamma\langle A\cup B\rangle=\Gamma\langle A\rangle\cup\Gamma\langle B\rangle,\quad \Gamma\langle A\cap B\rangle\subset\Gamma\langle A\rangle\cap\Gamma\langle B\rangle,$$

а если f — отображение из F в E, то

$$\overset{-1}{f}\langle A\cap B\rangle=\overset{-1}{f}\langle A\rangle\cap\overset{-1}{f}\langle B\rangle$$

в силу предложения 4.

Отметим также следующее предложение о дополнениях.

Предложение 6. *Пусть f — отображение из* A *в* B; *для всякой части* Y *множества* B *справедливо* $\overset{-1}{f}\langle B - Y\rangle = \overset{-1}{f}\langle B\rangle - \overset{-1}{f}\langle Y\rangle$.

В самом деле, для того чтобы x принадлежало к $\overset{-1}{f}\langle B - Y\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ принадлежало к B, но не к Y, т. е. чтобы x принадлежало к $\overset{-1}{f}\langle B\rangle$, но не к $\overset{-1}{f}\langle Y\rangle$.

Следствие. *Пусть f — инъекция* A *в* B; *для всякой части* X *множества* A *справедливо*

$$f\langle A - X\rangle = f\langle A\rangle - f\langle X\rangle.$$

В самом деле, записывая $f = i \circ g$, где i — каноническая инъекция из $f\langle A\rangle$ в B, мы приходим к предложению 6, примененному к $\overset{-1}{g}$.

Пересечение $X \cap A$ называется иногда *следом* (от) множества X на A. Если $\mathfrak{F}$ — семейство множеств, то называют также *следом* (от) семейства $\mathfrak{F}$ на A множество следов на A от множеств, принадлежащих к $\mathfrak{F}$.

6. Покрытия

Определение 5. *Мы скажем, что семейство множеств $(X_\iota)_{\iota\in I}$ есть покрытие множества* E, *если* $E \subset \bigcup_{\iota\in I} X_\iota$. *Если* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *и* $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ — *покрытия множества* E, *то мы скажем про второе из этих покрытий, что оно более мелкое* (*тонкое*), *чем первое, или мельче* (*тоньше*) *первого, а про первое из этих покрытий, — что оно более крупное* (*грубое*), *чем второе, или крупнее* (*грубее*) *второго, если для всякого $\varkappa\in K$ существует такое $\iota\in I$, что $Y_\varkappa \subset X_\iota$.*

Множество множеств $\mathfrak{R}$ есть покрытие множества E, если семейство множеств, образуемое тождественным отображением множества $\mathfrak{R}$, есть покрытие для E, т. е., иными словами, если $E \subset \bigcup_{X\in\mathfrak{R}} X$.

Если $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$ — три покрытия множества E, такие, что $\mathfrak{R}'$ мельче $\mathfrak{R}$, а $\mathfrak{R}''$ мельче $\mathfrak{R}'$, то ясно, что $\mathfrak{R}''$ мельче $\mathfrak{R}$.

Пусть $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — покрытие множества E; если J — часть множества I, такая, что $(X_\iota)_{\iota\in J}$ также есть покрытие для E, то это покрытие, очевидно, мельче, чем $(X_\iota)_{\iota\in I}$.

Пусть $(X_\iota)_{\iota\in I}$ и $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ — покрытия множества E. Семейство множеств $(X_\iota \cap Y_\varkappa)_{(\iota,\varkappa)\in I\times K}$ также является покрытием для E. В самом деле, если $x\in E$, то существуют такие индексы $\iota\in I$ и $\varkappa\in K$, что $x\in X_\iota$ и $x\in Y_\varkappa$, откуда $x\in X_\iota\cap Y_\varkappa$. Кроме того, ясно, что покрытие $(X_\iota\cap Y_\varkappa)_{(\iota,\varkappa)\in I\times K}$ мельче каждого из покрытий $(X_\iota)_{\iota\in I}$, $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$. Пусть, обратно, $(Z_\lambda)_{\lambda\in L}$ — покрытие для E, более мелкое, чем каждое из покрытий $(X_\iota)_{\iota\in I}$ и $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$; если $\lambda\in L$, то существуют такие индексы $\iota\in I$ и $\varkappa\in K$, что $Z_\lambda\subset X_\iota$ и $Z_\lambda\subset Y_\varkappa$, откуда $Z_\lambda\subset X_\iota\cap Y_\varkappa$; а это доказывает, что покрытие $(Z_\lambda)_{\lambda\in L}$ мельче покрытия $(X_\iota\cap Y_\varkappa)_{(\iota,\varkappa)\in I\times K}$.

Пусть $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — покрытие множества A и пусть f — отображение множества A *на* множество B. Семейство $(f\langle X_\iota\rangle)_{\iota\in I}$ является тогда покрытием множества B (предложение 3); оно называется *образом покрытия* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ при отображении (или относительно отображения, или по отображению) f. Если g — отображение множества C в множество A, то семейство $(\overset{-1}{g}\langle X_\iota\rangle)_{\iota\in I}$ есть покрытие для C, называемое *полным прообразом покрытия* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ при (относительно, по) g.

Пусть E и F — множества, $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — покрытие множества E и $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ — покрытие множества F. Семейство $(X_\iota\times Y_\varkappa)_{(\iota,\varkappa)\in I\times K}$ является тогда покрытием множества $E\times F$, называемым *произведением* покрытий $(X_\iota)_{\iota\in I}$ множества E и $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ множества F.

Предложение 7. 1° *Пусть* E — *множество и* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — *покрытие множества* E. *Если функции f и g, областью определения которых служит* E, *таковы, что для каждого $\iota\in I$, f и g совпадают на* $E\cap X_\iota$, то *f и g совпадают на* E.

2° *Пусть $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство множеств; пусть $(f_\iota)_{\iota\in I}$ — такое семейство функций, имеющих одну и ту же область прибытия* F, *что для каждого $\iota\in I$ область определения функции f_ι есть X_ι и для каждой пары $(\iota,\varkappa)\in I\times I$ функции f_ι и $f_\varkappa$ совпадают на $X_\iota\cap X_\varkappa$. Тогда существует и единственна функция f, областью определения которой служит $A=\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$, а областью прибытия — множество* F *и которая продолжает все функции f_ι $(\iota\in I)$.*

1° Пусть x — произвольный элемент из E; существует такое $\iota\in I$, что $x\in X_\iota$, откуда $f(x)=g(x)$ по предположению.

2° Пусть G_ι — график для f_ι и пусть $G=\bigcup_{\iota\in I} G_\iota$; покажем, что G — функциональный график. В самом деле, если $(x, y)\in G$ и $(x, y')\in G$, то в I существуют такие два индекса ι и $\varkappa$, что $(x, y)\in G_\iota$ и $(x, y')\in G_\varkappa$. Это влечет $x\in X_\iota$, $x\in X_\varkappa$, $y=f_\iota(x)$, $y'=f_\varkappa(x)$; но так как $x\in X_\iota\cap X_\varkappa$, то $f_\iota(x)=f_\varkappa(x)$, т. е. $y=y'$. Областью определения графика G служит множество $\mathrm{pr}_1 G = \bigcup_{\iota\in I}\mathrm{pr}_1 G_\iota = A$; следовательно, функция $f=(G, A, F)$ — искомая. Ее единственность вытекает из первой части предложения.

7. Разбиения

Определение 6. *Мы скажем, что два множества* A, B *не пересекаются* (или *не имеют общих элементов*), *если* $A \cap B = \varnothing$; *в противном случае мы скажем, что* A *и* B *пересекаются. Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств; мы скажем, что множества этого семейства взаимно* (или *попарно*) *не пересекаются, если условия* $\iota \in I$, $\varkappa \in I$, $\iota \neq \varkappa$ *влекут* $X_\iota \cap X_\varkappa = \varnothing$.

Пусть f — отображение множества A в множество B, $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство попарно непересекающихся частей множества B; предложение 4 показывает, что множества из семейства $(\overset{-1}{f}\langle Y_\iota\rangle)_{\iota \in I}$ частей множества A тоже попарно не пересекаются. Напротив, если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство попарно непересекающихся частей множества A, то множества из семейства $(f\langle X_\iota\rangle)_{\iota \in I}$, вообще говоря, не являются попарно непересекающимися.

Предложение 8. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство попарно непересекающихся множеств, а* $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — *такое семейство функций, имеющих одну и ту же область прибытия* F, *что для каждого* $\iota \in I$ *область определения функции* f_ι *есть* X_ι. *Тогда существует единственная функция* f, *у которой областью определения служит* $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, *а областью прибытия — множество* F *и которая продолжает все функции* f_ι $(\iota \in I)$.

Это — немедленное следствие предложения 7, поскольку f_ι и $f_\varkappa$, очевидно, совпадают на $X_\iota \cap X_\varkappa = \varnothing$ при $\iota \neq \varkappa$.

Определение 7. *Разбиением множества* E *называется семейство непустых и попарно непересекающихся частей множества* E, *являющееся покрытием множества* E.

Пример. Для всякого непустого множества A семейство $(\{x\})_{x \in A}$ частей множества A, состоящих из единственного элемента, есть разбиение этого множества A.

Если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — разбиение множества E, то отображение $\iota \to X_\iota$ множества I на множество $\mathfrak{F}$ элементов X_ι этого разбиения есть взаимно однозначное отображение. Следовательно, задание множества $\mathfrak{F}$ определяет разбиение с точностью до взаимно однозначного соответствия между множествами индексов. Когда говорят о разбиении, то чаще всего речь идет именно о множестве элементов разбиения.

8. Сумма семейства множеств

Предложение 9. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств. Существует множество* X, *обладающее следующим свойством:* X *есть объединение такого семейства* $(X'_\iota)_{\iota \in I}$ *попарно непересекающихся множеств, что для каждого* $\iota \in I$ *существует взаимно однозначное отображение множества* X_ι *на* X'_ι.

Пусть $A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$. Если $\iota \in I$, то отображение $x \to (x, \iota)$ $(x \in X_\iota)$ есть взаимно однозначное отображение множества X_ι на часть X'_ι множества $A \times I$. Кроме того, образ множества X'_ι относительно второй координатной функции на $A \times I$ содержится в множестве $\{\iota\}$; отсюда вытекает, что $X'_\iota \cap X'_\varkappa = \varnothing$ при $\iota \neq \varkappa$. Тогда достаточно положить $X = \bigcup_{\iota \in I} X'_\iota$.

Определение 8. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств. Суммой этого семейства множеств называется объединение семейства множеств* $X_\iota \times \{\iota\}$ $(\iota \in I)$.

Предложение 10. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство попарно непересекающихся множеств. Пусть* A — *его объединение и* S — *его сумма. Существует взаимно однозначное отображение множества* A *на множество* S.

Для каждого $\iota \in I$ пусть f_ι есть биекция множества X_ι на множество $X_\iota \times \{\iota\}$. Ввиду предложения 8 существует отображение f множества A в множество S, продолжающее все отображения f_ι. Нетрудно видеть, что f — взаимно однозначное отображение множества A на множество S.

Допуская вольность речи, мы говорим, что множество E есть *сумма* семейства множеств $(X_\iota)_{\iota \in I}$, если существует биекция множества E на сумму этого семейства, определяемую согласно определению 8.

Заметим, что если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство множеств, то вывод предложения 10 показывает, что существует отображение суммы S этого семейства *на* его объединение A.

Упражнения

1) Пусть G — график. Показать, что три следующих предложения эквивалентны:

а) G есть функциональный график;

б) каковы бы ни были множества X, Y, всегда $\overset{-1}{G}(X \cap Y) = \overset{-1}{G}(X) \cap \overset{-1}{G}(Y)$;

в) соотношение $X \cap Y = \varnothing$ влечет за собой $\overset{-1}{G}(X) \cap \overset{-1}{G}(Y) = \varnothing$.

2) Пусть G — график. Показать, что для всякого множества X справедливо $G(X) = pr_2(G \cap (X \times pr_2 G))$ и $G(X) = G(X \cap pr_1 G)$.

3) Пусть X, Y, Y′, Z — четыре множества. Показать, что

$$(Y' \times Z) \circ (X \times Y) = \varnothing, \quad \text{если} \quad Y \cap Y' = \varnothing$$

и

$$(Y' \times Z) \circ (X \times Y) = X \times Z, \quad \text{если} \quad Y \cap Y' \neq \varnothing.$$

4) Пусть $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство графиков. Показать, что для всякого множества X справедливо $\left(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota\right)\langle X \rangle = \bigcup_{\iota \in I} G_\iota \langle X \rangle$ и что для всякого объекта x справедливо $\left(\bigcap_{\iota \in I} G_\iota\right)\langle\{x\}\rangle = \bigcap_{\iota \in I} G_\iota \langle\{x\}\rangle$. Привести пример двух графиков G, H и множества X, таких, что

$$(G \cap H)\langle X \rangle \neq G\langle X \rangle \cap H\langle X \rangle.$$

5) Пусть $(G_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство графиков, H — график. Показать, что

$$\left(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota\right) \circ H = \bigcup_{\iota \in I} (G_\iota \circ H), \quad H \circ \left(\bigcup_{\iota \in I} G_\iota\right) = \bigcup_{\iota \in I} (H \circ G_\iota).$$

6) Для того чтобы график G был функциональным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой пары графиков H, H'

$$(H \cap H') \circ G = (H \circ G) \cap (H' \circ G).$$

7) Пусть G, H, K — три графика. Доказать соотношение

$$(H \circ G) \cap K \subset (H \cap (K \circ \overset{-1}{G})) \circ (G \cap (\overset{-1}{H} \circ K)).$$

8) Пусть $\mathfrak{R} = (X_\iota)_{\iota \in I}$ и $\mathfrak{S} = (Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ — два покрытия множества E.

а) Показать, что если $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ — разбиения множеств E и $\mathfrak{R}$ мельче, чем $\mathfrak{S}$, то для каждого $\varkappa \in K$ существует такое $\iota \in I$, что $X_\iota \subset Y_\varkappa$.

б) Привести пример двух таких покрытий $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, что $\mathfrak{R}$ мельче $\mathfrak{S}$, но свойство, описанное в а), при этом отсутствует.

в) Привести пример двух таких разбиений $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ множества E, что для каждого $\varkappa \in K$ существует $\iota \in I$, для которого $X_\iota \subset Y_\varkappa$, но при этом $\mathfrak{R}$ не мельче, чем $\mathfrak{S}$.

§ 5. Произведение семейства множеств

1. Аксиома множества частей

A4. $$(\forall X)\, \mathrm{coll}_Y (Y \subset X).$$

Эта аксиома означает, что для каждого множества X существует множество, элементами которого служат все части от X, а именно множество $\mathfrak{E}_Y(Y \subset X)$ (§ 1, n° 4); его обозначают через $\mathfrak{P}(X)$ и называют *множеством* (*всех*) *частей* или *множеством* (*всех*) *подмножеств множества* X. Ясно, что если $X \subset X'$, то $\mathfrak{P}(X) \subset \mathfrak{P}(X')$.

Пусть A и B — два множества, Γ — соответствие между A и B. *Функция* $X \to \Gamma\langle X \rangle$ $(X \in \mathfrak{P}(A),\ \Gamma\langle X \rangle \in \mathfrak{P}(B))$ называется *каноническим распространением* (или просто *распространением*) *соответствия* Γ *на множества частей* и обозначается символом $\widehat{\Gamma}$; это есть отображение множества $\mathfrak{P}(A)$ в $\mathfrak{P}(B)$. Если Γ' — соответствие между B и некоторым множеством C, то формула $(\Gamma' \circ \Gamma)\langle X \rangle = \Gamma'\langle \Gamma\langle X \rangle \rangle$ показывает, что распространение соответствия $\Gamma' \circ \Gamma$ на множества частей есть отображение $\widehat{\Gamma'} \circ \widehat{\Gamma}$.

Предложение 1. 1° *Если f — сюръекция множества* E *на множество* F, *то каноническое распространение $\widehat{f}$ есть сюръекция из* $\mathfrak{P}(E)$ *на* $\mathfrak{P}(F)$.

2° *Если f — инъекция множества* E *в множество* F, *то каноническое распространение $\widehat{f}$ есть инъекция из* $\mathfrak{P}(E)$ *в* $\mathfrak{P}(F)$.

1° Если s — иссечение, ассоциированное с f, то $f \circ s$ есть тождественное отображение множества F; следовательно, $\widehat{f} \circ \widehat{s}$ есть тождественное отображение множества $\mathfrak{P}(F)$, а это доказывает, что $\widehat{f}$ есть сюръекция и $\widehat{s}$ — ассоциированное с ней иссечение (§ 3, n° 8).

2° Предложение непосредственно очевидно при $E = \varnothing$, потому что тогда $\mathfrak{P}(E) = \{\varnothing\}$. Если $E \neq \varnothing$ и r есть ретракция, ассоциированная с f, то $r \circ f$ есть тождественное отображение множества E; следовательно, $\widehat{r} \circ \widehat{f}$ есть тождественное отображение множества $\mathfrak{P}(E)$, а это доказывает, что $\widehat{f}$ есть инъекция и $\widehat{r}$ — ассоциированная с ней ретракция (§ 3, n° 8).

2. Множество отображений одного множества в другое

Пусть E и F — множества. График отображения множества E в F есть часть множества $E \times F$. Множество элементов из $\mathfrak{P}(E \times F)$, обладающих свойством „быть графиком отображения множества E в F“, является поэтому частью от $\mathfrak{P}(E \times F)$, которую мы обозначаем через F^E. Множество троек $f = (G, E, F)$, где $G \in F^E$, есть, таким образом, *множество отображений* множества E в множество F; оно обозначается символом $\mathcal{F}(E, F)$. Ясно, что $G \to (G, E, F)$ есть биекция (называемая *канонической*) множества F^E на $\mathcal{F}(E, F)$. Существование этой биекции позволяет сразу же перевести всякое предложение о множестве F^E в предложение о множестве $\mathcal{F}(E, F)$, и обратно.

Пусть E, E', F, F' — множества. Пусть u — отображение множества E' в E и v — отображение из F в F'. Функция $f \to v \circ f \circ u$ $(f \in \mathcal{F}(E, F))$ есть отображение из $\mathcal{F}(E, F)$ в $\mathcal{F}(E', F')$.

Предложение 2. 1° *Если u — сюръекция множества* E' *на* E *и v — инъекция множества* F *в* F', *то отображение $f \to v \circ f \circ u$ инъективно.*

2° *Если u — инъекция множества* E' *в* E *и v — сюръекция множества* F *на* F', *то отображение $f \to v \circ f \circ u$ сюръективно.*

Ограничимся случаем, когда множества E, E', F, F' непусты, так как в других случаях предложение проверяется тривиально.

1° Пусть s — иссечение, ассоциированное с u, r — ретракция, ассоциированная с v (§ 3, определение 11). Тогда $r \circ (v \circ f \circ u) \circ s = I_F \circ f \circ I_E = f$, а это доказывает, что $f \to v \circ f \circ u$ инъективно.

2° Пусть r' — ретракция, ассоциированная с u, s' — иссечение, ассоциированное с v. Для всякого отображения $f' : E' \to F'$ справедливо $v \circ (s' \circ f' \circ r') \circ u = f'$, а это доказывает, что $f \to v \circ f \circ u$ сюръективно.

Следствие. *Если u — биекция множества* E' *на множество* E *и v — биекция множества* F *на множество* F', *то* $f \to v \circ f \circ u$ *биективно.*

Пусть A, B, C — три множества и f — отображение множества $B \times C$ в множество A. Для всякого $y \in C$ пусть $f(\cdot, y)$ есть частное отображение $x \to f(x, y)$ множества B в множество A (§ 3, n° 9); функция $y \to f(\cdot, y)$ есть отображение множества C в $\mathcal{F}(B, A)$. Обратно, для всякого отображения g множества C в $\mathcal{F}(B, A)$ существует и единственно отображение f множества $B \times C$ в A, такое, что $g(y) = f(\cdot, y)$ для каждого $y \in C$, а именно отображение $(x, y) \to (g(y))(x)$. Следовательно, имеет место следующее предложение.

Предложение 3. *Если для всякого отображения f множества $B \times C$ в множество* A *обозначить символом $\tilde{f}$ отображение $y \to f(\cdot, y)$ множества* C *в* $\mathcal{F}(B, A)$, *то функция $f \to \tilde{f}$ есть биекция* (называемая *канонической*) *множества* $\mathcal{F}(B \times C, A)$ *на множество* $\mathcal{F}(C, \mathcal{F}(B, A))$.

Аналогично определяется биекция (называемая канонической) множества $\mathcal{F}(B \times C, A)$ на $\mathcal{F}(B, \mathcal{F}(C, A))$. В силу взаимно однозначного соответствия между отображениями и функциональными графиками предыдущие биекции дают биекции (называемые каноническими) множества $A^{B \times C}$ на множество $(A^B)^C$ (соответственно $(A^C)^B$).

3. Определение произведения семейства множеств

Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств, F — такой функциональный график с областью определения I, что для всякого $\iota \in I$ имеет место $F(\iota) \in X_\iota$; отсюда вытекает, что для всякого $\iota \in I$ имеет место $F(\iota) \in A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ и, следовательно, F есть элемент из $\mathfrak{P}(I \times A)$. Функциональные графики, обладающие этим свойством, образуют, таким образом, часть от $\mathfrak{P}(I \times A)$.

Определение 1. *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств. Множество функциональных графиков* F *с областью определения* I, *таких, что* $F(\iota) \in X_\iota$ *для всякого* $\iota \in I$, *называется произведением семейства множеств* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *и обозначается символом* $\prod_{\iota \in I} X_\iota$. *Для всякого* $\iota \in I$ *множество* X_ι *называется множителем* (или *сомножителем*) *индекса* ι *произведения* $\prod_{\iota \in I} X_\iota$; *отображение* $F \to F(\iota)$ $\left(F \in \prod_{\iota \in I} X_\iota,\ F(\iota) \in X_\iota\right)$ *называется координатной функцией индекса* ι (*или проектированием по индексу* ι) *и обозначается через* pr_ι.

Мы говорим, что $F(\iota)$ есть *координата индекса* ι (или *проекция индекса* ι) графика F; образ $pr_\iota \langle A \rangle$ части A произведения $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ относительно координатной функции индекса ι называется *проекцией индекса* ι множества A; нетрудно видеть, что $A \subset \prod_{\iota \in I} pr_\iota \langle A \rangle$.

Запись $(x_\iota)_{\iota \in I}$ часто используется для обозначения элементов из $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ (§ 3, n° 6).

Если $I = \varnothing$, то множество $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ обладает лишь одним элементом, а именно пустым множеством (§ 3, n° 4, пример 1).

Когда все сомножители X_ι произведения $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ равны одному и тому же множеству E, то $\prod_{\iota \in I} X_\iota = E^I$, как это вытекает сразу же из определений.

Если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — произвольное семейство множеств, а E — такое множество, что $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota \subset E$, то определение 1 показывает, что $\prod_{\iota \in I} X_\iota \subset E^I$; следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между произведением $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ и некоторым множеством отображений множества I в множество E (составляющим часть от $\mathcal{F}(I, E)$).

Если $I = \{\alpha\}$ — множество с единственным элементом, то $\prod_{\iota \in I} X_\iota = X_\alpha^{\{\alpha\}}$; отображение $F \to F(\alpha)$ является тогда биективным отображением произведения $\prod_{\iota \in \{\alpha\}} X_\iota$ на X_α (называемым, как и обратное отображение, *каноническим*).

Пусть A и B — множества и пусть α, β — два различных объекта (таковые существуют, например $\varnothing$ и $\{\varnothing\}$). Рассмотрим график $\{(\alpha, A), (\beta, B)\}$, который, очевидно, является функциональным и есть не что иное, как семейство $(X_\iota)_{\iota \in \{\alpha, \beta\}}$, такое, что $X_\alpha = A$, $X_\beta = B$. Для всякой пары $(x, y) \in A \times B$ пусть $f_{x,y}$ есть функциональный график $\{(\alpha, x), (\beta, y)\}$. Сразу же видно, что функция $(x, y) \to f_{x,y}$ есть биективное отображение множества $A \times B$ на $\prod_{\iota \in \{\alpha, \beta\}} X_\iota$, для которого обратным отображением служит $g \to (g(\alpha), g(\beta))$; эти два

отображения называются *каноническими*. Мы в дальнейшем используем это взаимно однозначное соответствие, чтобы доказать свойства произведения двух множеств, исходя из свойств произведения семейства множеств.

Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств, каждое из которых состоит из единственного элемента: скажем, $X_\iota = \{a_\iota\}$; тогда произведение $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ есть множество, состоящее из единственного элемента $(a_\iota)_{\iota \in I}$.

Пусть E — множество; графики, *постоянных* отображений $\iota \to x$ множества I в E образуют часть Δ произведения E^I, называемую *диагональю*; если $\bar{x}$ обозначает график отображения $\iota \to x$ (для $x \in E$), то отображение $x \to \bar{x}$ есть биекция множества E на диагональ Δ, называемая *диагональным отображением*.

Предложение 4. *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств, u — биекция множества K на множество I, U — ее график. Отображение $F \to F \circ U$ множества $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ в множество $\prod_{x \in K} X_{u(x)}$ биективно.*

Пусть $A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota = \bigcup_{x \in K} X_{u(x)}$ (§ 4, предложение 1). Отображение $F \to F \circ U (F \in A^I)$ является биективным отображением множества A^I на A^K (предложение 2). Очевидно, что условие „для всякого $\iota \in I$, $F(\iota) \in X_\iota$“ эквивалентно условию „для всякого $x \in K$, $(F \circ U)(x) \in X_{u(x)}$“, а это доказывает предложение.

4. Частичные произведения

Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств и J — часть множества I; мы говорим, что $\prod_{\iota \in J} X_\iota$ есть *частичное произведение* произведения $\prod_{\iota \in I} X_\iota$. Если f — функция с графиком $F \in \prod_{\iota \in I} X_\iota$, то $F \circ \Delta_J$ (где Δ_J — диагональ в $J \times J$) есть график *сужения* функции f на J. Очевидно, что $F \circ \Delta_J \in \prod_{\iota \in J} X_\iota$; отображение $F \to F \circ \Delta_J$ множества $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ в множество $\prod_{\iota \in J} X_\iota$ называется *проектированием по индексу* J и обозначается через pr_J.

Предложение 5. *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств и J — часть множества I. Если для всякого $\iota \in I$ имеет место $X_\iota \neq \varnothing$, то проектирование pr_J есть отображение множества $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ на множество $\prod_{\iota \in J} X_\iota$.*

Согласно сделанным выше замечаниям, достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 6. *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — такое семейство множеств, что $X_\iota \neq \varnothing$ для всякого $\iota \in I$. Если дано отображение g множества $J \subset I$ в $A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, такое, что $g(\iota) \in X_\iota$ для каждого $\iota \in J$, то существует такое продолжение f функции g на I, что $f(\iota) \in X_\iota$ для каждого $\iota \in I$.*

В самом деле, для каждого $\iota \in I - J$ условимся обозначать через T_ι терм $\tau_y (y \in X_\iota)$. Так как $X_\iota \neq \varnothing$ по предположению, то $T_\iota \in X_\iota$ для каждого $\iota \in I - J$ (гл. I, § 4, n° 1). Если G — график функции g, то график $G \cup \left(\bigcup_{\iota \in I - J} \{(\iota, T_\iota)\} \right)$ есть график некоторой функции f, дающей ответ на вопрос, как это сразу же видно.

Следствие 1. *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — такое семейство множеств, что для каждого $\iota \in I$ справедливо $X_\iota \neq \varnothing$. Тогда для каждого $\alpha \in I$ проектирование pr_α есть отображение произведения $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ на X_α.*

Достаточно применить предложение 5 к части $J = \{\alpha\}$ множества I и заметить, что pr_α есть композиция канонического отображения множества $X_\alpha^{\{\alpha\}}$ на X_α и отображения $\mathrm{pr}_{\{\alpha\}}$.

Следствие 2. *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств. Для того чтобы $\prod_{\iota \in I} X_\iota = \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $\iota \in I$, что $X_\iota = \varnothing$.*

В самом деле, если для каждого $\iota \in I$ имеет место $X_\iota \neq \varnothing$, то и $\prod_{\iota \in I} X_\iota \neq \varnothing$, как это вытекает из следствия 1; обратно, если $\prod_{\iota \in I} X_\iota \neq \varnothing$, то соотношение $\mathrm{pr}_\alpha \left(\prod_{\iota \in I} X_\iota \right) \subset X_\alpha$ показывает, что $X_\alpha \neq \varnothing$ для всякого $\alpha \in I$.

Мы видим, таким образом, что если нам дано семейство $(X_\iota)_{\iota \in I}$ непустых множеств, то мы можем ввести (на правах вспомогательной константы) функцию f, у которой областью определения служит I и которая обладает тем свойством, что $f(\iota) \in X_\iota$ для всякого $\iota \in I$. На практике говорят: „Возьмем в каждом множестве X_ι по элементу x_ι“. С интуитивной точки зрения тем самым „выбирается“ элемент x_ι в каждом из X_ι; введение логического знака τ и критериев, управляющих его употреблением, позволило нам обойтись здесь без формулировки „аксиомы выбора“ для оправдания этой операции (см. сводку результатов § 4, n° 10).

Следствие 3. *Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ и $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — два семейства множеств с одним и тем же множеством индексов I. Если для каждого*

$\iota \in \mathrm{I}$ *справедливо* $X_\iota \subset Y_\iota$, *то и* $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota \subset \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{Y}_\iota$. *Обратно, если* $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota \subset \prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{Y}_\iota$ *и для всякого* $\iota \in \mathrm{I}$ *справедливо* $\mathrm{X}_\iota \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{X}_\iota \subset \mathrm{Y}_\iota$ *для всякого* $\iota \in \mathrm{I}$.

Первое утверждение очевидно, а второе вытекает из следствия 1 предложения 5, ибо в этом случае для каждого $\alpha \in \mathrm{I}$

$$\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{pr}_\alpha\Big(\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota\Big) \subset \mathrm{pr}_\alpha\Big(\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{Y}_\iota\Big) = \mathrm{Y}_\alpha.$$

5. Ассоциативность произведений множеств

Предложение 7. *Пусть* $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ — *семейство множеств с непустым множеством индексов* I. *Пусть* $(\mathrm{J}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{L}}$ — *разбиение множества* I; *отображение* $f \to (\mathrm{pr}_{\mathrm{J}_\lambda} f)_{\lambda \in \mathrm{L}}$ *произведения* $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$ *в множество-произведение* $\prod_{\lambda \in \mathrm{L}}\Big(\prod_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda} \mathrm{X}_\iota\Big)$ *биективно* („ассоциативность" произведений множеств).

Согласно истолкованию множества $\mathrm{pr}_{\mathrm{J}_\lambda} f$ как графика сужения функции с графиком f (n° 4), утверждение о биективности отображения $f \to (\mathrm{pr}_{\mathrm{J}_\lambda} f)_{\lambda \in \mathrm{L}}$ означает, что для всякого семейства $(v_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{L}}$, где v_λ — отображение из J_λ в $\bigcup_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$, существует единственное отображение u множества I в $\bigcup_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$, такое, что для всякого $\lambda \in \mathrm{L}$ отображение v_λ есть сужение отображения u на J_λ; но ведь это вытекает из того, что $(\mathrm{J}_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{L}}$ есть разбиение множества I (§ 4, предложение 8).

Отображение, определенное в предложении 7, и отображение, обратное к нему, называются *каноническими*.

Замечания. 1) Пусть α, β — два разных объекта и $(\mathrm{J}_\lambda)_{\lambda \in \{\alpha, \beta\}}$ — разбиение множества I на два множества J_α, J_β. Мы получим взаимно однозначное отображение (также называемое *каноническим*) произведения $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$ на $\Big(\prod_{\iota \in \mathrm{J}_\alpha} \mathrm{X}_\iota\Big) \times \Big(\prod_{\iota \in \mathrm{J}_\beta} \mathrm{X}_\iota\Big)$, взяв композицию канонического отображения множества $\prod_{\lambda \in \{\alpha, \beta\}}\Big(\prod_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda} \mathrm{X}_\iota\Big)$ на $\Big(\prod_{\iota \in \mathrm{J}_\alpha} \mathrm{X}_\iota\Big) \times \Big(\prod_{\iota \in \mathrm{J}_\beta} \mathrm{X}_\iota\Big)$ и канонического отображения множеств $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$ на $\prod_{\lambda \in \{\alpha, \beta\}}\Big(\prod_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda} \mathrm{X}_\iota\Big)$. Если для всякого $\iota \in \mathrm{J}_\beta$ множество X_ι состоит из *единственного элемента*, то $\mathrm{pr}_{\mathrm{J}_\alpha}$ есть взаимно однозначное отображение множества $\prod_{\iota \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_\iota$ на $\prod_{\iota \in \mathrm{J}_\alpha} \mathrm{X}_\iota$.

2) Пусть α, β, γ — попарно различные объекты (таковые существуют, например $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ и $\{\{\varnothing\}\}$) и пусть A, B, C — множества. Рассмотрим функциональный график $\{(\alpha, \mathrm{A}), (\beta, \mathrm{B}), (\gamma, \mathrm{C})\}$, т. е. семейство множеств $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota \in \{\alpha, \beta, \gamma\}}$, такое, что $\mathrm{X}_\alpha = \mathrm{A}$, $\mathrm{X}_\beta = \mathrm{B}$, $\mathrm{X}_\gamma = \mathrm{C}$. Разбиению множества $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, образуемому двумя множествами $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\gamma\}$, соответствует каноническая биекция множества $\prod_{\iota \in \{\alpha, \beta, \gamma\}} \mathrm{X}_\iota$ на произведение $\Big(\prod_{\iota \in \{\alpha, \beta\}} \mathrm{X}_\iota\Big) \times \mathrm{X}_\gamma^{\{\gamma\}}$ и, следовательно, биекция (также называемая *канонической*) множества $\prod_{\iota \in \{\alpha, \beta, \gamma\}} \mathrm{X}_\iota$ на $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$ (§ 2, n° 2), ставящая в соответствие всякому графику $f \in \prod_{\iota \in \{\alpha, \beta, \gamma\}} \mathrm{X}_\iota$ элемент $(f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))$ из $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$. Принимая во внимание предложение 4, можно тем самым поставить во взаимно однозначное соответствие любые два из множеств $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$, $\mathrm{B} \times \mathrm{C} \times \mathrm{A}$, $\mathrm{C} \times \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, $\mathrm{B} \times \mathrm{A} \times \mathrm{C}$, $\mathrm{A} \times \mathrm{C} \times \mathrm{B}$, $\mathrm{C} \times \mathrm{B} \times \mathrm{A}$.

6. Формулы дистрибутивности

Предложение 8. *Пусть* $((\mathrm{X}_{\lambda, \iota})_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda})_{\lambda \in \mathrm{L}}$ — *семейство семейств множеств (имеющее* L *в качестве множества индексов). Предполагается, что* $\mathrm{L} \neq \varnothing$ *и* $\mathrm{J}_\lambda \neq \varnothing$ *для каждого* $\lambda \in \mathrm{L}$. *Пусть* $\mathrm{I} = \prod_{\lambda \in \mathrm{L}} \mathrm{J}_\lambda \neq \varnothing$. *Тогда*

$$\bigcup_{\lambda \in \mathrm{L}}\Big(\bigcap_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda} \mathrm{X}_{\lambda, \iota}\Big) = \bigcap_{f \in \mathrm{I}}\Big(\bigcup_{\lambda \in \mathrm{L}} \mathrm{X}_{\lambda, f(\lambda)}\Big)$$

и

$$\bigcap_{\lambda \in \mathrm{L}}\Big(\bigcup_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda} \mathrm{X}_{\lambda, \iota}\Big) = \bigcup_{f \in \mathrm{I}}\Big(\bigcap_{\lambda \in \mathrm{L}} \mathrm{X}_{\lambda, f(\lambda)}\Big)$$

(„дистрибутивность" объединения относительно пересечения и пересечения относительно объединения).

Пусть x — элемент из $\bigcup_{\lambda \in \mathrm{L}}\Big(\bigcap_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda} \mathrm{X}_{\lambda, \iota}\Big)$. Пусть f — любой элемент из I. Существует такой индекс λ, что $x \in \bigcap_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda} \mathrm{X}_{\lambda, \iota}$, следовательно, $x \in \mathrm{X}_{\lambda, f(\lambda)}$, откуда $x \in \bigcup_{\lambda \in \mathrm{L}} \mathrm{X}_{\lambda, f(\lambda)}$. Так как это справедливо для всякого $f \in \mathrm{I}$, то $x \in \bigcap_{f \in \mathrm{I}}\Big(\bigcup_{\lambda \in \mathrm{L}} \mathrm{X}_{\lambda, f(\lambda)}\Big)$. Пусть теперь x есть предмет, не принадлежащий к множеству $\bigcup_{\lambda \in \mathrm{L}}\Big(\bigcap_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda} \mathrm{X}_{\lambda, \iota}\Big)$. Отсюда вытекает, что для всякого $\lambda \in \mathrm{L}$ имеет место $x \notin \bigcap_{\iota \in \mathrm{J}_\lambda} \mathrm{X}_{\lambda, \iota}$, а это означает, что для всякого $\lambda \in \mathrm{L}$ множество J'_λ таких $\iota \in \mathrm{J}_\lambda$, что $x \notin \mathrm{X}_{\lambda, \iota}$, не пусто. Согласно следствию 2 предложения 5, существует такой функциональ-

ный график f с областью определения L, что для всякого $\lambda \in L$ $f(\lambda) \in J'_\lambda$. Следовательно, $f \in I$ и для всякого $\lambda \in L$ $x \notin X_{\lambda, f(\lambda)}$. Отсюда вытекает, что $x \notin \bigcup_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)}$ и, следовательно,

$$x \notin \bigcap_{f \in I} \left(\bigcup_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)} \right).$$

Тем самым первая формула доказана. Вторая выводится отсюда, если применить первую формулу к семейству $\left((\complement_A X_{\lambda, \iota})_{\iota \in J_\lambda} \right)_{\lambda \in L}$, где A обозначает объединение $\bigcup_{\lambda \in L} \left(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_{\lambda, \iota} \right)$.

Следствие. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *и* $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ — *два семейства множеств с непустыми множествами индексов. Тогда*

$$\left(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota \right) \cup \left(\bigcap_{\varkappa \in K} Y_\varkappa \right) = \bigcap_{(\iota, \varkappa) \in I \times K} (X_\iota \cup Y_\varkappa)$$

и

$$\left(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota \right) \cap \left(\bigcup_{\varkappa \in K} Y_\varkappa \right) = \bigcup_{(\iota, \varkappa) \in I \times K} (X_\iota \cap Y_\varkappa).$$

Пусть α и β — два различных предмета; достаточно применить формулы предложения 8 к случаю, когда $L = \{\alpha, \beta\}$, $J_\alpha = I$, $J_\beta = K$, и к семейству $\left((Z_{\lambda, \mu})_{\mu \in J_\lambda} \right)_{\lambda \in L}$, такому, что $Z_{\alpha, \iota} = X_\iota$ для всякого $\iota \in I$ и $Z_{\beta, \varkappa} = Y_\varkappa$ для всякого $\varkappa \in K$; приняв во внимание существование канонической биекции множества $\prod_{\lambda \in L} J_\lambda$ на $I \times K$ (n° 3) и предложение 1 из § 4, получим указанные формулы.

Предложение 9. *Пусть* $\left((X_{\lambda, \iota})_{\iota \in J_\lambda} \right)_{\lambda \in L}$ — *семейство семейств множеств (имеющее* L *в качестве множества индексов). Пусть* $I = \prod_{\lambda \in L} J_\lambda$. *Тогда*

$$\prod_{\lambda \in L} \left(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_{\lambda, \iota} \right) = \bigcup_{f \in I} \left(\prod_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)} \right)$$

и (если $L \neq \varnothing$ *и* $J_\lambda \neq \varnothing$ *для всякого* $\lambda \in L$*)*

$$\prod_{\lambda \in L} \left(\bigcap_{\iota \in J_\lambda} X_{\lambda, \iota} \right) = \bigcap_{f \in I} \left(\prod_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)} \right)$$

(„дистрибутивность“ произведения относительно объединения и пересечения).

Первая формула очевидна, если $L = \varnothing$ или $J_\lambda = \varnothing$ для некоторого индекса $\lambda \in L$. В противном случае пусть g — элемент из $\prod_{\lambda \in L} \left(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_{\lambda, \iota} \right)$; следовательно, для каждого $\lambda \in L$ существует такое $\iota \in J_\lambda$, что $g(\lambda) \in X_{\lambda, \iota}$; иными словами, множество H_λ, таких $\iota \in J_\lambda$, что $g(\lambda) \in X_{\lambda, \iota}$, не пусто. Согласно следствию 2 предложения 5, существует такой функциональный график f с областью определения L, что для всякого $\lambda \in L$ $f(\lambda) \in H_\lambda$, а это означает, что $g(\lambda) \in X_{\lambda, f(\lambda)}$. Следовательно, $g \in \prod_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)}$ и потому $g \in \bigcup_{f \in I} \left(\prod_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)} \right)$. Обратно, если $g \in \bigcup_{f \in I} \left(\prod_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)} \right)$, то существует такой функциональный график $f \in I$, что для каждого $\lambda \in L$ справедливо $g(\lambda) \in X_{\lambda, f(\lambda)}$ и тем более $g(\lambda) \in \bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_{\lambda, \iota}$; тем самым доказательство первой формулы закончено. Вторая доказывается аналогично, но еще проще, как в этом может убедиться читатель своими силами.

Следствие 1. *Предположим, что* $L \neq \varnothing$ *и* $J_\lambda \neq 0$ *для каждого* $\lambda \in L$. *Если для каждого индекса* $\lambda \in L$ *семейство* $(X_{\lambda, \iota})_{\iota \in J_\lambda}$ *есть разбиение множества* $X_\lambda = \bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_{\lambda, \iota}$, *то семейство* $\left(\prod_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)} \right)_{f \in I}$ *есть разбиение множества* $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$.

Если положить $P_f = \prod_{\lambda \in L} X_{\lambda, f(\lambda)}$, то ввиду первой из формул предложения 9 достаточно доказать, что для всякого $f \in I$ справедливо $P_f \neq \varnothing$ и что если f и g — различные элементы из I, то $P_f \cap P_g = \varnothing$. Первое вытекает из следствия 2 предложения 5. С другой стороны, если $f \neq g$, то существует такое $\lambda \in L$, что $f(\lambda) \neq g(\lambda)$, откуда в силу предположения $X_{\lambda, f(\lambda)} \cap X_{\lambda, g(\lambda)} = \varnothing$. Отсюда вытекает, что не существует ни одного графика, принадлежащего к $P_f \cap P_g$; в самом деле, такой график G должен удовлетворять условию $G(\lambda) \in X_{\lambda, f(\lambda)} \cap X_{\lambda, g(\lambda)} = \varnothing$, что абсурдно.

Следствие 2. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *и* $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ — *два семейства множеств. Тогда*

$$\left(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota \right) \times \left(\bigcup_{\varkappa \in K} Y_\varkappa \right) = \bigcup_{(\iota, \varkappa) \in I \times K} (X_\iota \times Y_\varkappa)$$

и (если I *и* K *не пусты)*

$$\left(\bigcap_{\iota \in I} X_\iota \right) \times \left(\bigcap_{\varkappa \in K} Y_\varkappa \right) = \bigcap_{(\iota, \varkappa) \in I \times K} (X_\iota \times Y_\varkappa).$$

Достаточно рассуждать, как при доказательстве следствия предложения 8.

Предложение 10. *Пусть* $(X_{\iota,\varkappa})_{(\iota,\varkappa)\in I\times K}$ — *семейство множеств, множество индексов которого есть произведение двух множеств* I *и* K. *Если* $K\neq\varnothing$, *то*

$$\bigcap_{\varkappa\in K}\Big(\prod_{\iota\in I}X_{\iota,\varkappa}\Big)=\prod_{\iota\in I}\Big(\bigcap_{\varkappa\in K}X_{\iota,\varkappa}\Big).$$

Обе стороны доказываемого равенства представляют собой множества функциональных графиков. Для того чтобы график f принадлежал к левой стороне, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varkappa\in K$ было справедливо $f\in\prod_{\iota\in I}X_{\iota,\varkappa}$, т. е. чтобы для каждого $(\iota,\varkappa)\in I\times K$ $f(\iota)$ принадлежало к $X_{\iota,\varkappa}$. Для того чтобы f принадлежало к правой стороне, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\iota\in I$ было справедливо $f(\iota)\in\bigcap_{\varkappa\in K}X_{\iota,\varkappa}$, т. е., иными словами, чтобы для всякого $(\iota,\varkappa)\in I\times K$ $f(\iota)$ принадлежало к $X_{\iota,\varkappa}$. Тем самым предложение доказано.

Следствие. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ *и* $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — *два семейства множеств, обладающие одним и тем же множеством индексов* $I\neq\varnothing$. *Тогда*

$$\Big(\prod_{\iota\in I}X_\iota\Big)\cap\Big(\prod_{\iota\in I}Y_\iota\Big)=\prod_{\iota\in I}(X_\iota\cap Y_\iota)$$

и

$$\Big(\bigcap_{\iota\in I}X_\iota\Big)\times\Big(\bigcap_{\iota\in I}Y_\iota\Big)=\bigcap_{\iota\in I}(X_\iota\times Y_\iota).$$

Достаточно применить предложение 10 к случаю, когда K (соответственно I) есть множество, состоящее из двух различных элементов.

7. Распространение отображений на произведения

Определение 2. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota\in I}$, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — *два семейства множеств и* $(g_\iota)_{\iota\in I}$ — *такое семейство функций, имеющее то же самое множество индексов, что для каждого* $\iota\in I$ *функция* g_ι *есть отображение множества* X_ι *в множество* Y_ι. *Для каждого* $f\in\prod_{\iota\in I}X_\iota$ *пусть* u_f *есть график функции* $\iota\to g_\iota(f(\iota))\ (\iota\in I)$, *являющийся элементом произведения* $\prod_{\iota\in I}Y_\iota$. *Отображение* $f\to u_f$ *множества* $\prod_{\iota\in I}X_\iota$ *в множество* $\prod_{\iota\in I}Y_\iota$ *называется каноническим распространением* (или просто *распространением*) *семейства отображений* $(g_\iota)_{\iota\in I}$ *на произведения; иногда его называют также произведением семейства отображений* $(g_\iota)_{\iota\in I}$.

Таким образом, если использовать индексные обозначения, то произведение семейства отображений $(g_\iota)_{\iota\in I}$ есть функция $(x_\iota)_{\iota\in I}\to(g_\iota(x_\iota))_{\iota\in I}$; иногда ее также обозначают через $(g_\iota)_{\iota\in I}$.

Если $I=\{\alpha,\beta\}$, где α и β различны, то распространение на произведения семейства отображений $(g_\iota)_{\iota\in I}$ есть не что иное, как $\psi\circ(g_\alpha\times g_\beta)\circ\varphi$, где φ обозначает каноническое отображение множества $\prod_{\iota\in I}X_\iota$ на множество $X_\alpha\times X_\beta$ (n° 3), ψ — каноническое отображение множества $Y_\alpha\times Y_\beta$ на множество $\prod_{\iota\in I}Y_\iota$.

Предложение 11. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota\in I}$, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$, $(Z_\iota)_{\iota\in I}$ — *три семейства множеств и пусть* $(g_\iota)_{\iota\in I}$ *и* $(g'_\iota)_{\iota\in I}$ — *два семейства функций, имеющие то же самое множество индексов и обладающие тем свойством, что для каждого* $\iota\in I$ g_ι *есть отображение из* X_ι *в* Y_ι, *а* g'_ι — *отображение из* Y_ι *в* Z_ι. *Пусть* g *и* g' — *распространения семейств* $(g_\iota)_{\iota\in I}$ *и* $(g'_\iota)_{\iota\in I}$ *на произведения; тогда распространение семейства* $(g'_\iota\circ g_\iota)_{\iota\in I}$ *на произведения равно* $g'\circ g$.

Предложение сразу же вытекает из определения 2.

Следствие. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota\in I}$, $(Y_\iota)_{\iota\in I}$ — *два семейства множеств,* $(g_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство функций. Если для каждого* $\iota\in I$ g_ι *есть инъекция* (соответственно *сюръекция*) *множества* X_ι *в множество* Y_ι, *то распространение* g *семейства* $(g_\iota)_{\iota\in I}$ *на произведения есть инъекция* (соответственно *сюръекция*) *множества* $\prod_{\iota\in I}X_\iota$ *в* $\prod_{\iota\in I}Y_\iota$.

1° Ограничимся случаем, когда $X_\iota\neq\varnothing$ для всякого $\iota\in I$, ибо в остальных случаях результат выводится тривиально. Предположим, что для всякого $\iota\in I$ g_ι есть инъекция и что r_ι есть ретракция, ассоциированная с g_ι (§ 3, n° 8, определение 11); таким образом, $r_\iota\circ g_\iota$ есть тождественное отображение множества X_ι. Пусть r — распространение на произведения семейства $(r_\iota)_{\iota\in I}$, так как $r\circ g$ есть распространение на произведения семейства тождественных отображений I_{X_ι}, то $r\circ g$ есть тождественное отображение множества $\prod_{\iota\in I}X_\iota$ и, следовательно, g есть инъекция (§ 3, предложение 8).

2° Предположим, что для всякого $\iota\in I$ g_ι есть сюръекция множества X_ι на множество Y_ι и что s_ι есть иссечение, ассоциированное с g_ι (§ 3, n° 8, определение 11); таким образом, $g_\iota\circ s_\iota$ есть тождественное отображение множества Y_ι. Если s есть распространение на произведения семейства $(s_\iota)_{\iota\in I}$, то $g\circ s$ есть распространение на произведения семейства тождественных отображений I_{Y_ι} и,

следовательно, $g \circ s$ есть тождественное отображение множества $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$, а это доказывает, что g есть сюръекция (§ 3, предложение 8).

Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств и пусть E — множество. Для всякого отображения f множества E в произведение $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ композиция $\mathrm{pr}_\iota \circ f$ есть отображение множества E в множество X_ι; если $\bar{f}$ — распространение этого семейства отображений на произведения и d — диагональное отображение (п° 3) множества E в множество E^I, то нетрудно видеть, что $f = \bar{f} \circ d$. Обратно, пусть $(f_\iota)_{\iota \in I}$ — такое семейство функций, что для всякого $\iota \in I$ f_ι есть отображение множества E в множество X_ι, и пусть $\bar{f}$ — распространение этого семейства на произведения; тогда для каждого $\iota \in I$ имеет место $\mathrm{pr}_\iota \circ (\bar{f} \circ d) = f_\iota$. Допуская вольность речи, мы обозначаем отображение $\bar{f} \circ d$ также символом $(f_\iota)_{\iota \in I}$. Таким образом, мы определили взаимно однозначное отображение (называемое, как и обратное к нему, *каноническим*) множества $\prod_{\iota \in I} X_\iota^E$ на множество $\left(\prod_{\iota \in I} X_\iota\right)^E$.

Упражнения

1) Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств. Показать, что если $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — такое семейство множеств, что $Y_\iota \subset X_\iota$ для всякого $\iota \in I$, то $\prod_{\iota \in I} Y_\iota = \bigcap_{\iota \in I} \overset{-1}{\mathrm{pr}_\iota}(Y_\iota)$.

2) Пусть A и B — два множества. Для каждой части G множества $A \times B$ пусть G есть отображение $x \to G\langle (x) \rangle$ множества A в $\mathfrak{P}(B)$. Показать, что отображение $G \to \widetilde{G}$ есть биекция из $\mathfrak{P}(A \times B)$ на $(\mathfrak{P}(B))^A$.

3) Пусть $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство множеств. Для каждой части H множества индексов $(1, n)$ пусть $P_H = \bigcup_{i \in H} X_i$ и $Q_H = \bigcap_{i \in H} X_i$. Пусть $\mathfrak{F}_k$ — множество частей множества $(1, n)$, имеющее k элементов; показать, что

$$\bigcup_{H \in \mathfrak{F}_k} Q_H \supset \bigcap_{H \in \mathfrak{F}_k} P_H \quad \text{при} \quad k \leqslant \frac{n+1}{2}$$

и

$$\bigcup_{H \in \mathfrak{F}_k} Q_H \subset \bigcap_{H \in \mathfrak{F}_k} P_H \quad \text{при} \quad k \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

§ 6. Соотношения эквивалентности

В принципе мы перестанем отныне пользоваться полужирными курсивными буквами для обозначения неопределенных знакосочетаний; контекст позволит читателю различать без труда высказывания, относящиеся к буквам и к неопределенным соотношениям.

1. Определение соотношения эквивалентности

Пусть $R\{x, y\}$ — соотношение, x и y — различные буквы. Мы говорим, что соотношение R является *симметрическим* или *симметричным* (по буквам x и y или относительно букв x и y), если $R\{x, y\} \Rightarrow R\{y, x\}$. Если дело обстоит так, то, заменяя x и y двумя буквами x', y', отличными друг от друга и от всех букв, встречающихся в R, а затем заменяя x' и y' соответственно буквами y и x, нетрудно видеть, что $R\{y, x\} \Rightarrow R\{x, y\}$; следовательно $R\{x, y\}$ и $R\{y, x\}$ эквивалентны.

Пусть z — буква, не встречающаяся в R. Мы говорим, что соотношение R *транзитивно* (по буквам x и y или относительно букв x и y), если $(R\{x, y\}$ и $R\{y, z\}) \Rightarrow R\{x, z\}$.

Примеры. Соотношение $x = y$ симметрично и транзитивно. Соотношение $X \subset Y$ транзитивно, но не симметрично. Соотношение $X \cap Y = \varnothing$ симметрично, но не транзитивно.

Если $R\{x, y\}$ одновременно и симметрично, и транзитивно, то мы говорим, что $R\{x, y\}$ есть *соотношение эквивалентности* (по буквам x и y или относительно букв x и y). В этом случае иногда применяется запись $x \equiv y \pmod{R}$ как синоним с $R\{x, y\}$; эта запись читается так: „*x эквивалентно y по модулю* R (или *по* R или *согласно* R)“. Если R — соотношение эквивалентности, то $R\{x, y\} \Rightarrow (R\{x, x\}$ и $R\{y, y\})$, ибо $R\{x, y\}$ влечет $R\{y, x\}$, а $(R\{x, y\}$ и $R\{y, x\})$ влечет $(R\{x, x\}$ и $R\{y, y\})$ в силу определений.

Пусть $R\{x, y\}$ — соотношение. Мы говорим, что соотношение R *рефлексивно в* E (по буквам x и y), если соотношение $R\{x, x\}$ эквивалентно $x \in E$. Если нет никакой неясности насчет E, мы говорим просто, допуская вольность речи, что R *рефлексивно*.

Соотношением эквивалентности в E называется соотношение эквивалентности, рефлексивное в E. Если $R\{x, y\}$ есть соотношение эквивалентности в E, то $R\{x, y\} \Rightarrow ((x, y) \in E \times E)$; следовательно, R обладает графиком (по буквам x и y). Обратно, предположим, что соотношение эквивалентности $R\{x, y\}$ обладает графиком G; заметим, что соотношение $R\{x, x\}$ эквивалентно соотношению $(\exists y) R(x, y)$; в самом деле, первое влечет последнее (гл. I, § 4, п° 2, схема S5), а с другой стороны, так как $R\{x, y\}$ влечет $R\{x, x\}$, то $(\exists y) R\{x, y\}$ влечет $(\exists y) R\{x, x\}$, а следовательно, и $R\{x, x\}$. Итак, мы видим, что $R\{x, x\}$ эквивалентно $x \in \mathrm{pr}_1 G$, а потому R есть соотношение эквивалентности в $\mathrm{pr}_1 G$.

Эквивалентностью на множестве E называется соответствие, у которого областью прибытия и областью отправления является E и у которого график F таков, что соотношение $(x, y) \in F$ есть соотношение эквивалентности в E.

Примеры. 1) Соотношение $x = y$ есть соотношение эквивалентности, не обладающее графиком, так как первая проекция этого графика была бы множеством всех объектов.

2) Соотношение „$x = y$ и $x \in E$" есть соотношение эквивалентности в E, графиком которого служит диагональ в $E \times E$.

3) Соотношение „существует биекция множества X на множество Y" есть соотношение эквивалентности, не обладающее графиком (см. гл. III, § 3).

4) Соотношение „$x \in E$ и $y \in E$" есть соотношение эквивалентности в E, график которого есть $E \times E$.

5) Предположим, что $A \subset E$. Соотношение

$$(x \in E - A \text{ и } y = x) \quad \text{или} \quad (x \in A \text{ и } y \in A)$$

есть соотношение эквивалентности в E.

6) ° Соотношение „$x \in \mathbf{Z}$ и $y \in \mathbf{Z}$ и $x - y$ делится на 4" есть соотношение эквивалентности в $\mathbf{Z}$. °

Предложение 1. *Для того чтобы соответствие* Γ *между* X *и* X *было эквивалентностью на* X, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* а) X *есть область определения соответствия* Γ; б) $\Gamma = \overset{-1}{\Gamma}$; в) $\Gamma \circ \Gamma = \Gamma$.

Пусть Γ — соответствие между X и X и G — его график. Если Γ — эквивалентность на X, то $(x, x) \in G$ для всякого $x \in X$; следовательно, X есть область определения для Γ. Соотношение $(x, y) \in G$ эквивалентно $(y, x) \in G$, а следовательно, и $(x, y) \in \overset{-1}{G}$, так что $G = \overset{-1}{G}$ и потому $\Gamma = \overset{-1}{\Gamma}$. Соотношения $(x, y) \in G$ и $(y, z) \in G$ влекут $(x, z) \in G$, а это доказывает, что $G \circ G \subset G$; с другой стороны, соотношение $(x, y) \in G$ влечет $(x, x) \in G$, а следовательно, и $(x, y) \in G \circ G$, так что $G \subset G \circ G$; таким образом, $G = G \circ G$ и, следовательно, $\Gamma = \Gamma \circ \Gamma$.

Обратно, предположим, что условия а), б), в) выполнены. Соотношение $(x, y) \in G$ симметрично ввиду б) и транзитивно ввиду в); следовательно, это соотношение эквивалентности, и, наконец, из а) вытекает, что это соотношение эквивалентности в X.

2. Классы эквивалентности; фактормножество

Пусть f — функция, E — ее область определения, F — ее график. Соотношение „$x \in E$ и $y \in E$ и $f(x) = f(y)$" есть соотношение эквивалентности в E; мы скажем, что это соотношение есть соотношение эквивалентности, *ассоциированное* с f. Оно эквивалентно соотношению $(\exists z)((x, z) \in F$ и $(y, z) \in F)$, т. е. соотношению $(\exists z)((x, z) \in F$ и $(z, y) \in \overset{-1}{F})$; его график, стало быть, есть $\overset{-1}{F} \circ F$.

Теперь мы покажем, что всякое соотношение эквивалентности R в множестве E есть соотношение эквивалентности такого же типа. В самом деле, пусть G есть график для R. Для всякого $x \in E$

(непустое) множество $G(x) \subset E$ называется *классом эквивалентности элемента* x *по соотношению* R (или *для*, или *относительно* соотношения R); иными словами, это множество таких $y \in E$, что $R\{x, y\}$. Всякое множество, представимое в виде $G(x)$ для какого-нибудь $x \in E$, называется классом эквивалентности (по R). Элемент класса эквивалентности называется также *представителем* этого класса. Множество классов эквивалентности по R (т. е. множество объектов вида $G(x)$ для $x \in E$) называется *фактормножеством* множества E по R и обозначается через E/R; отображение $x \to G(x)$ $(x \in E)$, у которого областью определения служит множество E, а областью прибытия — множество E/R, называется *каноническим отображением* множества E на фактормножество E/R. Теперь можно сформулировать следующий критерий:

C55. *Пусть* R — *соотношение эквивалентности в множестве* E, *а* p — *каноническое отображение множества* E *на фактормножество* E/R. *Тогда*

$$R\{x, y\} \Leftrightarrow (p(x) = p(y)).$$

В самом деле (при предыдущих обозначениях), пусть x и y — такие элементы из E, что $(x, y) \in G$. Отсюда сразу же следует $x \in E$ и $y \in E$; покажем, что $G(x) = G(y)$. Так как $y \in G(x)$, то (предложение 1) $G(y) \subset (G \circ G)(x) = G(x)$. С другой стороны, $(y, x) \in G$, откуда $G(x) \subset G(y)$ и, следовательно, $G(x) = G(y)$, т. е. $p(x) = p(y)$. Обратно, если $G(x) = G(y)$, то $y \in G(y) = G(x)$, откуда $(x, y) \in G$, а это доказывает критерий.

Иссечение, ассоциированное с каноническим отображением p множества E на фактормножество E/R (§ 3, n°8, определение 11), называется кратко *иссечением* множества E (для соотношения R).

Примеры. 1) Пусть R — соотношение эквивалентности „$x \in E$ и $y \in E$ и $x = y$" в множестве E; тогда класс эквивалентности для $x \in E$ есть множество $\{x\}$ и каноническое отображение $x \to \{x\}$ множества E на фактормножество E/R биективно.

2) Пусть E и F — два множества и R — соотношение эквивалентности в $E \times F$, связанное с отображением pr_1 из множества $E \times F$ на множество E. Классы эквивалентности для R суть множества вида $\{x\} \times F$, где $x \in E$; отображение $x \to \{x\} \times F$ есть биекция множества E на фактормножество $(E \times F)/R$.

Пусть R — соотношение эквивалентности в множестве E. Фактормножество E/R есть часть множества $\mathfrak{P}(E)$, а тождественное отображение фактормножества E/R есть *разбиение* множества E (§ 4, n° 7); в самом деле, если G — график соотношения R, то $x \in G(x)$ для всякого $x \in E$, а если два класса эквивалентности $G(x)$ и $G(y)$ имеют общий элемент z, то имеют место $R\{x, z\}$ и $R\{z, y\}$, а следовательно, и $R\{x, y\}$, а потому $G(x) = G(y)$. Кроме того, соот-

ношение

$$(\exists X)(X \in E/R \text{ и } x \in X \text{ и } y \in X)$$

является эквивалентным $R\{x, y\}$.

Обратно, пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — разбиение множества E; нетрудно видеть, что соотношение $(\exists \iota)(\iota \in I$ и $x \in X_\iota$ и $y \in X_\iota)$ есть соотношение эквивалентности R в E; классы эквивалентности по R суть не что иное, как множества X_ι этого разбиения, и отображение $\iota \to X_\iota$ есть биекция множества I на фактормножество E/R. Любая часть S множества E, такая, что для всякого $\iota \in I$ множество $S \cap X_\iota$ состоит из единственного элемента, называется *системой представителей* классов эквивалентности по R. Этим названием обозначают также всякую инъекцию произвольного множества K в E, обладающую тем свойством, что образ множества K по этой инъекции есть система представителей классов эквивалентности по R; таким является, в частности, всякое иссечение множества E для соотношения R.

3. Соотношения, совместимые с соотношением эквивалентности

Пусть $R\{x, x'\}$ — соотношение эквивалентности и $P\{x\}$ — произвольное соотношение. Мы говорим, что $P\{x\}$ *совместимо с соотношением эквивалентности* $R\{x, x'\}$ (по x), если

$$(P\{x\} \text{ и } R\{x, y\}) \Rightarrow P\{y\},$$

где y обозначает букву, не встречающуюся ни в P, ни в R.

Например, из C43 (гл. I, § 5, n° 1) вытекает, что любое соотношение $P\{x\}$ совместимо с соотношением эквивалентности $x = x'$.

C56. *Пусть* $R\{x, x'\}$ — *соотношение эквивалентности в множестве* E, *а* $P\{x\}$ — *соотношение, не содержащее буквы* x' *и совместимое (по* x*) с соотношением эквивалентности* $R\{x, x'\}$; *тогда, если* t *не встречается в* $P\{x\}$, *соотношение* „$t \in E/R$ и $(\exists x)(x \in t$ и $P\{x\})$“ *эквивалентно соотношению* „$t \in E/R$ и $(\forall x)((x \in t) \Rightarrow P\{x\})$“.

В самом деле, пусть $t \in E/R$. Если существует такое $a \in t$, что $P\{a\}$, то для всякого $x \in t$ имеет место $R\{a, x\}$ и, следовательно, $P\{x\}$. Следовательно, $(\exists x)(x \in t$ и $P\{x\})$ влечет $(\forall x)((x \in t) \Rightarrow P\{x\})$. Обратное очевидно, так как из $t \in E/R$ следует, что $t \neq \varnothing$.

Про соотношение ($t \in E/R$ и $(\exists x)(x \in t$ и $P\{x\})$) говорят, что оно *выведено из* $P\{x\}$ *переходом к фактормножеству* (по x) для соотношения R. Если обозначить указанное соотношение через $P'\{t\}$ и если f есть каноническое отображение множества E на фактормножество E/R, то соотношение ($y \in E$ и $P'\{f(y)\}$) (где y не встречается в $P\{x\}$) *эквивалентно* ($y \in E$ и $P\{y\}$), как нетрудно показать.

4. Насыщенные части

Пусть $R\{x, y\}$ — соотношение эквивалентности в множестве E и пусть A — часть множества E. Мы говорим, что часть A *насыщена для* соотношения R, если соотношение $x \in A$ совместимо (по x) с $R\{x, y\}$; или — что то же самое — если *для всякого* $x \in A$ *класс эквивалентности элемента* x *содержится в* A. Иначе говоря, для того чтобы множество было насыщенным для R, необходимо и достаточно, чтобы оно было *объединением какого-либо множества классов эквивалентности по* R.

Пусть f — каноническое отображение множества E на фактормножество E/R; если A насыщено для R, то класс эквивалентности всякого элемента $x \in A$, представляющий собой не что иное, как $\overset{-1}{f}\langle\{f(x)\}\rangle$, содержится в A; следовательно, $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle \subset A$. Но так как, с другой стороны, $A \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$, то $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$. Обратно, если $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$, то для всякого $x \in A$ класс эквивалентности $K = f(x)$ элемента x для R есть элемент из $f\langle A\rangle$ и так как $K = \overset{-1}{f}\langle\{K\}\rangle$, $K \subset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle = A$. Таким образом, мы видим, что части от E, насыщенные для R, суть такие части A множества E, что $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$. Можно также сказать, что это части множества E вида $\overset{-1}{f}\langle B\rangle$, где $B \subset E/R$; в самом деле, соотношение $A = \overset{-1}{f}\langle B\rangle$ влечет $B = f\langle A\rangle$, откуда $A = \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$.

Если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство насыщенных частей множества E, то множества $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ и $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$ насыщены (§ 4, предложения 3 и 4). Если A — насыщенная часть множества E, то и $\complement_E A$ — насыщенная часть (§ 4, предложение 6).

Пусть теперь A — произвольная часть множества E. Множество $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ содержит A и насыщено. Обратно, если насыщенная часть A' множества E содержит A, то $f\langle A'\rangle \supset f\langle A\rangle$, откуда $A' = \overset{-1}{f}\langle f\langle A'\rangle\rangle \supset \overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$. Поэтому можно сказать, что $\overset{-1}{f}\langle f\langle A\rangle\rangle$ есть „наименьшая“ насыщенная часть множества E, содержащая A (ср. гл. III); это множество называется *насыщением* части A для соотношения R. Непосредственно очевидно, что оно есть объединение всех классов эквивалентности элементов множества A. Если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство частей множества E, а A_ι — насыщение множества X_ι для R, то насыщение множества $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ есть $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ (§ 4, предложение 3).

5. *Отображения, совместимые с соотношениями эквивалентности*

Пусть R — соотношение эквивалентности в множестве E и пусть f — функция с областью определения E. Мы говорим, что f *совместима с соотношением* R, если соотношение $y=f(x)$ совместимо (по x) с соотношением R$\{x, x'\}$.

Вместо этого, как легко видеть, можно сказать, что сужение функции f на произвольный класс эквивалентности есть постоянное отображение; можно сказать также в этом случае, что f *постоянна на всяком классе эквивалентности по* R. Если g — каноническое отображение множества E на фактормножество E/R, то это означает также, что соотношение $g(x)=g(x')$ влечет $f(x)=f(x')$; следовательно (§ 3, предложение 9), мы получили следующий критерий:

C57. *Пусть* R — *соотношение эквивалентности в множестве* E *и* g — *каноническое отображение множества* E *на фактормножество* E/R. *Для того чтобы отображение f множества* E *в множество* F *было совместимым с* R, *необходимо и достаточно, чтобы f можно было представить в виде $h\circ g$, где h — отображение фактормножества* E/R *в множество* F. *Отображение h однозначно определяется через f; если s — сечение, ассоциированное с g, то $h=f\circ s$.*

Мы говорим, что h есть *отображение, выведенное из f переходом к фактормножеству по* R.

Пусть f — отображение множества E в множество F и пусть $A=f\langle E\rangle\subset F$. Пусть R — соотношение эквивалентности, ассоциированное с f (п° 2); ясно, что f совместимо с R. Кроме того, отображение h, выведенное из f переходом к фактормножеству, есть *инъективное* отображение фактормножества E/R в множество F; в самом деле, если t и t' — классы эквивалентности по R, такие, что $h(t)=h(t')$, то $f(x)=f(x')$ при $x\in t$ и $x'\in t'$, а это влечет $t=t'$ по определению соотношения R. Пусть k — отображение фактормножества E/R на множество A, имеющее тот же самый график, что и h; тогда k *биективно*. Если j — каноническая инъекция множества A в множество F и g — каноническое отображение множества E на фактормножество E/R, то можно написать $f=j\circ k\circ g$; это соотношение называется *каноническим разложением* отображения f.

Пусть f — отображение множества E в множество F, R — соотношение эквивалентности в E, S — соотношение эквивалентности в F. Пусть u — каноническое отображение множества E на фактормножество E/R, v — каноническое отображение множества F на фактормножество F/S. Мы говорим, что f *совместимо с соотношениями эквивалентности* R *и* S, если $v\circ f$ совместимо с R; это означает, что соотношение $x\equiv x' \pmod{R}$ *влечет* $f(x)\equiv f(x') \pmod{S}$. Отображение h фактормножества E/R на множество F/S, выведенное из $v\circ f$ переходом к фактормножеству по R, называется тогда *отображением, выведенным из f переходом к фактормножествам по* R *и* S; оно характеризуется соотношением $v\circ f=h\circ u$ (рис. 3).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ E/R & \xrightarrow[h]{} & F/S \end{array}$$

Рис. 3

6. *Полный прообраз соотношения эквивалентности; индуцированное соотношение эквивалентности*

Пусть φ — отображение множества E в множество F, а S — соотношение эквивалентности в F. Если u — каноническое отображение множества F на фактормножество F/S, то соотношение эквивалентности, ассоциированное с отображением $u\circ\varphi$ множества E в фактормножество F/S, называется *полным прообразом* соотношения S относительно (при, по) φ; если R — такое соотношение, то R$\{x, y\}$ эквивалентно S$\{\varphi(x), \varphi(y)\}$; классы эквивалентности по R суть полные прообразы по φ от тех классов эквивалентности по S, которые пересекаются с $\varphi\langle E\rangle$.

В частности, рассмотрим соотношение эквивалентности R в множестве E, и пусть A есть часть множества E; полный прообраз соотношения R по инъекции j множества A в множество E называется соотношением эквивалентности, *индуцированным* в A соотношением R и обозначается символом R_A.

Классы эквивалентности по R_A суть *следы* на A от классов эквивалентности по R, пересекающихся с A. Инъекция j, очевидно, совместима с соотношениями R_A и R. Отображение h фактормножества A/R_A в фактормножество E/R, выведенное из j переходом к фактормножествам по R_A и R есть *инъективное* отображение фактормножества A/R_A в E/R; в самом деле, если f — каноническое отображение множества E на E/R, а g — каноническое отображение множества A на A/R_A, то соотношение $h(g(x))=h(g(x'))$ при $x\in A$ и $x'\in A$ эквивалентно $f(x)=f(x')$, а следовательно, $g(x)=g(x')$. Образ $h\langle A/R_A\rangle$ равен $f\langle A\rangle$; если k — биективное отображение фактормножества A/R_A на $f\langle A\rangle$, имеющее тот же самый график, что и h, то само k и обратное к нему отображение называются *каноническими*.

7. *Факторсоотношения соотношений эквивалентности*

Пусть R и S — два соотношения эквивалентности по буквам x и y. Мы скажем про S, что оно *более мелкое* (*тонкое*), *чем* R, или *мельче* (*тоньше*) R, а про R, что оно *более крупное* (*грубое*), *чем* S, или *крупнее* (*грубее*) S, если справедливо соотношение S $\Rightarrow$ R. Если R и S — соотношения эквивалентности в одном и том же мно-

жестве E, то сказать, что S мельче, чем R, значит сказать, что график соотношения S содержится в графике соотношения R, или, что всякий класс эквивалентности по S содержится в некотором классе эквивалентности по R, или, иными словами, что всякий класс эквивалентности по R насыщен для S.

Примеры. 1) Соотношение „$x \in E$ и $y \in E$ и $x = y$" мельче, чем любое соотношение эквивалентности в E; соотношение „$x \in E$ и $y \in E$" крупнее, чем любое соотношение эквивалентности в E.

2)° Соотношение эквивалентности „$x \in \mathbf{Z}$ и $y \in \mathbf{Z}$ и $x - y$ делится на 4" мельче, чем соотношение эквивалентности „$x \in \mathbf{Z}$ и $y \in \mathbf{Z}$ и $x - y$ делится на 2". $_\circ$

Пусть R и S — соотношения эквивалентности в одном и том же множестве E, причем S мельче, чем R. Пусть f и g — канонические отображения множества E на E/R и множества E на E/S. Функция f совместима с S; пусть h — функция, выведенная из f переходом к фактормножеству по S; h есть отображение фактормножества E/S на E/R. Соотношение эквивалентности, ассоциированное с h в E/S, называется ***факторсоотношением*** соотношения R по S и обозначается символом R/S; соотношение $x \equiv y \pmod{R}$ эквивалентно соотношению $g(x) \equiv g(y) \pmod{R/S}$; классы эквивалентности по R/S суть образы классов эквивалентности по R. Пусть $h = j \circ h_2 \circ h_1$ есть каноническое разложение (n° 5) отображения h; тогда h_1 есть каноническое отображение фактормножества E/S на (E/S)/(R/S), j есть тождественное отображение фактормножества E/R и h_2 — взаимно однозначное отображение множества (E/S)/(R/S) на E/R. Отображение h_2 и обратное к нему отображение называются ***каноническими***.

Рассмотрим, наоборот, произвольное отношение эквивалентности T в множестве E/S, и пусть R — соотношение эквивалентности в E, являющееся полным прообразом соотношения T по g (n° 6); так как соотношение $x \equiv y \pmod R$ эквивалентно с $g(x) \equiv g(y) \pmod T$, то нетрудно видеть, что T эквивалентно с R/S.

8. Произведение двух соотношений эквивалентности

Пусть $R\{x, y\}$ и $R'\{x', y'\}$ — два соотношения эквивалентности. Обозначим через $S\{u, v\}$ соотношение

$$(\exists x)(\exists y)(\exists x')(\exists y')(u = (x, x') \text{ и } v = (y, y') \text{ и } R\{x, y\} \text{ и } R'\{x', y'\});$$

легко видеть, что $S\{u, v\}$ — соотношение эквивалентности; его называют ***произведением*** соотношений R и R' и обозначают через $R \times R'$. Предположим, что R — соотношение эквивалентности в множестве E и что R' — соотношение эквивалентности в множестве E'. Тогда соотношение $S\{u, u\}$ эквивалентно

$$(\exists x)(\exists x')(u = (x, x') \text{ и } R\{x, x\} \text{ и } R'\{x', x'\}),$$

т. е. $(\exists x)(\exists x')(u = (x, x')$ и $x \in E$ и $x' \in E')$, а следовательно, и $u \in E \times E'$; отсюда вытекает, что $R \times R'$ есть соотношение эквивалентности в $E \times E'$. Если $u = (x, x')$ есть элемент из $E \times E'$, то соотношение $S\{u, v\}$ эквивалентно

$$(\exists y)(\exists y')(v = (y, y') \text{ и } R\{x, y\} \text{ и } R'\{x', y'\});$$

если G и G' — графики для R и R', то это соотношение эквивалентно также $v \in G(x) \times G'(x')$. *Всякий класс эквивалентности по $R \times R'$ является, таким образом, произведением некоторого класса эквивалентности по R и некоторого класса эквивалентности по R', и обратно.*

Пусть f и f' — канонические отображения множества E на E/R и множества E' на E'/R', и пусть $f \times f'$ — каноническое распространение отображений f и f' на произведения-множества (§ 3, n° 9); тогда $(f \times f')(x, x') = (f(x), f'(x'))$ для $(x, x') \in E \times E'$. Прообраз по $f \times f'$ элемента (u, u') из $(E/R) \times (E'/R')$ есть не что иное, как произведение $u \times u'$ класса эквивалентности u по R и класса эквивалентности u' по R'; отсюда вытекает, что соотношение эквивалентности, ассоциированное с $f \times f'$, эквивалентно $R \times R'$. Поэтому отображение $f \times f'$ можно представить в виде $h \circ g$, где g — каноническое отображение из $E \times E'$ на $(E \times E')/(R \times R')$, а h — взаимно однозначное отображение множества $(E \times E')/(R \times R')$ на $(E/R) \times (E'/R')$; это отображение и обратное к нему называются ***каноническими***.

Замечание. Пусть $P\{x, x'\}$ — соотношение, в котором не встречаются буквы y и y'; мы говорим, что P *совместимо* с соотношениями эквивалентности $R\{x, y\}$ и $R'\{x', y'\}$ (по x и x'), если соотношение ($P\{x, x'\}$ и $R\{x, y\}$ и $R'\{x', y'\}$) влечет $P\{y, y'\}$. Пусть $Q\{u\}$ есть соотношение $(\exists x)(\exists x')(u = (x, x')$ и $P\{x, x'\})$; это значит, что $Q\{u\}$ совместимо (по u) с соотношением эквивалентности $S\{u, v\}$ — произведением соотношений R и R'.

9. Классы эквивалентных объектов

Пусть $R\{x, y\}$ — произвольное соотношение эквивалентности, быть может даже не имеющее графика. Очевидно, что если x, x' и y суть три различные буквы, то соотношение $R\{x, x'\}$ влечет $R\{x, y\} \Leftrightarrow R\{x', y\}$, а следовательно, и $(\forall y)(R\{x, y\} \Leftrightarrow R\{x', y\})$. Положим $\theta\{x\} = \tau_y(R\{x, y\})$. Ввиду схемы S7 (гл. I, § 5, n° 1) соотношение $R\{x, x'\}$ влечет $\theta\{x\} = \theta\{x'\}$. Заметим, с другой стороны, что по определению $R\{x, \theta\{x\}\}$ есть не что иное, как соотношение $(\exists y) R\{x, y\}$; таким образом (n° 1), соотношение $R\{x, \theta\{x\}\}$ эквивалентно соотношению $R\{x, x\}$. Поэтому можно заключить, что соотношение ($R\{x, x\}$ и $R\{x', x'\}$ и $\theta\{x\} = \theta\{x'\}$) *эквивалентно* соотношению $R\{x, x'\}$; в самом деле, первое из этих соотношений влечет, в силу S6 (гл. I, § 5, n° 1), соотношение

$$(R\{x, x\} \text{ и } R\{x', x'\} \text{ и } R\{x', \theta\{x\}\} \Leftrightarrow R\{x', \theta\{x'\}\}),$$

а значит, и соотношение ($R\{x, \theta\{x\}\}$ и $R\{x', \theta\{x\}\}$) и, наконец, в силу транзитивности и симметричности, $R\{x, x'\}$; так как, с другой стороны, известно, что $R\{x, x'\}$ влечет ($R\{x, x\}$ и $R\{x', x'\}$), наше утверждение доказано. Терм $\theta\{x\}$ называют *классом объектов, эквивалентных* x (согласно соотношению R).

Предположим теперь, что T — такой терм, для которого соотношение

$$(\forall y)(R\{y, y\} \Rightarrow (\exists x)(x \in T \text{ и } R\{x, y\})) \qquad (1)$$

истинно. Тогда соотношение $(\exists x)(R\{x, x\}$ и $z = \theta\{x\})$ является *коллективизирующим по* z [1]). В самом деле, можно предполагать, что $x \in T$ влечет $R\{x, x\}$; достаточно заменить T множеством $x \in T$, таких, что $R\{x, x\}$ (заметим, что $R\{x, y\}$ влечет $R\{x, x\}$). Пусть тогда Θ будет множеством объектов вида $\theta\{x\}$ для $x \in T$ (§ 1, n° 6). Предположим, что $R\{y, y\}$ истинно; тогда существует такой $x \in T$, что $R\{x, y\}$; следовательно, $\theta\{y\} = \theta\{x\} \in \Theta$. Говорят, что множество Θ есть *множество классов эквивалентных объектов* для R, и для всякого x, такого, что $R\{x, x\}$, $\theta\{x\}$ есть *единственный* элемент $z \in \Theta$, такой, что $R\{x, z\}$.

При тех же предположениях пусть $A\{x\}$ — такой терм, что $R\{x, y\}$ влечет $A\{x\} = A\{y\}$. Тогда соотношение $(\exists x)(R\{x, x\}$ и $z = A\{x\})$ также является коллективизирующим по z, ибо $R\{x, x\}$, будучи эквивалентным $R\{x, \theta\{x\}\}$, влечет $A\{x\} = A\{\theta\{x\}\}$ и, следовательно, если E есть множество объектов вида $A\{t\}$ для $t \in \Theta$, $R\{x, x\}$ влечет $A\{x\} \in E$. Если f есть функция $t \to A\{t\}$ ($t \in \Theta$, $A\{t\} \in E$), то соотношение $R\{x, x\}$ влечет $A\{x\} = f(\theta\{x\})$.

В частности, если R — соотношение эквивалентности *в множестве* F, за $A\{x\}$ можно взять *класс эквивалентности элемента* x по R (n° 2); функция f является тогда *биекцией* множества Θ на фактормножество F/R, что оправдывает введенную терминологию.

° *Пример.* Пусть $R\{x, y\}$ есть соотношение эквивалентности „x и y суть векторные пространства над C одной и той же конечной размерности"; это соотношение не обладает графиком. Условие (1) выполняется, если за T взять либо множество векторных подпространств пространства $C^{(N)}$, либо подмножество T′ множества T, образованное пространствами C^n ($n \in N$), где под C^0 понимается точка 0 пространства C^N, а для $n > 0$ пространство C^n есть сумма первых n компонент прямой суммы $C^{(N)}$. Между прочим, при втором выборе $\Theta = T'$. °

Упражнения

1) Для того чтобы график G был графиком какой-либо эквивалентности на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы $pr_1 G = E$, $G \circ \overset{-1}{G} \circ G = G$ и $\Delta_E \subset G$ (где Δ_E — диагональ множества E).

[1]) Этот факт, по-видимому, обосновывается ссылкой на дедуктивные критерии § 1, n° 6. Но тогда, как кажется, надо дополнительно потребовать, чтобы буква x не встречалась в терме T. — *Прим. ред.*

2) Если G — такой график, что $G \circ \overset{-1}{G} \circ G = G$, показать, что $\overset{-1}{G} \circ G$ и $G \circ \overset{-1}{G}$ суть графики эквивалентностей на $pr_1 G$ и $pr_2 G$ соответственно.

3) Пусть E — множество, A — подмножество множества E, R — соотношение эквивалентности, ассоциированное с отображением $X \to X \cap A$ множества $\mathfrak{P}(E)$ в множество $\mathfrak{P}(E)$. Показать, что существует биекция множества $\mathfrak{P}(A)$ на фактормножество $\mathfrak{P}(E)/R$.

4) Пусть G — график некоторой эквивалентности на множестве E. Показать, что если A — такой график, что $A \subset G$ и $pr_1 A = E$ (соответственно $pr_2 A = E$), то $G \circ A = G$ (соответственно $A \circ G = G$); кроме того, если B — произвольный график, то $(G \cap B) \circ A = G \cap (B \circ A)$ [соответственно $A \circ (G \cap B) = G \cap (A \circ B)$].

5) Показать, что всякое пересечение графиков эквивалентностей в множестве E есть график эквивалентности на E. Привести пример двух эквивалентностей на E, таких, чтобы объединение их графиков не было графиком эквивалентности в E.

6) Пусть G и H — графики двух эквивалентностей на E. Для того чтобы $G \circ H$ было графиком эквивалентности на E, необходимо и достаточно, чтобы $G \circ H = H \circ G$; тогда график $G \circ H$ есть пересечение всех графиков эквивалентностей на E, содержащих G и H.

7) Пусть G_0, G_1, H_0, H_1 — графики четырех эквивалентностей на множестве E, такие, что $G_1 \cap H_0 = G_0 \cap H_1$ и $G_1 \circ H_0 = G_0 \circ H_1$. Для всякого $x \in E$ пусть R_0 (соответственно S_0) есть соотношение, индуцированное на $G_1(x)$ (соответственно $H_1(x)$) соотношением эквивалентности $(x, y) \in G_0$ (соответственно $(x, y) \in H_0$). Показать, что существует биекция фактормножества $G_1(x)/R_0$ на фактормножество $H_1(x)/S_0$ [показать, что эти два фактормножества находятся во взаимно однозначном соответствии с фактормножеством множества $A = G_1(x) \cap H_1(x)$ по соотношению эквивалентности, индуцированному на A соотношением R_0, причем это соотношение эквивалентно соотношению эквивалентности, индуцированному на A соотношением S_0].

8) Пусть E и F — два множества, R — соотношение эквивалентности в F, f — отображение множества E в F. Если S — соотношение эквивалентности, составляющее прообраз соотношения R по f, и $A = f\langle E\rangle$, определить каноническую биекцию множества E/S на A/R_A.

9) Пусть F, G — два множества, R — соотношение эквивалентности в F, p — каноническое отображение множества F на F/R, f — сюръекция множества G на F/R. Показать, что существует множество E, сюръекция g множества E на множество F и сюръекция h множества E на множество G, такие, что $p \circ g = f \circ h$.

10) а) Если $R\{x, y\}$ — произвольное соотношение, то „$R\{x, y\}$ и $R\{y, x\}$" есть симметрическое соотношение. При каком условии оно рефлексивно в множестве E?

° б) Пусть $R\{x, y\}$ — соотношение, симметрическое и рефлексивное в множестве E. Пусть $S\{x, y\}$ есть соотношение „существует такое целое число $n > 0$ и такая последовательность $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ элементов из E, что $x_0 = x$, $x_n = y$ и для всякого индекса i, такого, что $0 \leqslant i < n$, имеет место $R\{x_i, x_{i+1}\}$". Показать, что $S\{x, y\}$ есть соотношение эквивалентности в E и что его график является наименьшим из графиков эквивалентностей в E, содержащих график соотношения R. Классы эквивалентности по S называются *связными компонентами* множества E относительно соотношения R.

в) Пусть $\mathfrak{F}$ — множество частей A множества E, обладающих тем свойством, что для всякой пары элементов (y, z), где $y \in A$, $z \in E - A$, справедливо „не $R\{y, z\}$". Для всякого $x \in E$ показать, что пересечение

множеств $A \in \mathfrak{F}$, таких, что $x \in A$, есть связная компонента элемента x относительно соотношения R. ◦

11) а) Пусть R$\{x, y\}$ — симметрическое и рефлексивное соотношение в множестве E. Мы говорим, что R есть *интранзитивное соотношение порядка* 1, если для четырех *различных* элементов x, y, z, t из E соотношения R$\{x, y\}$, R$\{x, z\}$, R$\{x, t\}$, R$\{y, z\}$ и R$\{y, t\}$ влекут R$\{z, t\}$. Мы говорим, что часть A множества E *устойчива* против соотношения R, если, каковы бы ни были x и y в A, всегда R$\{x, y\}$. Если a и b — два различных элемента из E, таких, что R$\{a, b\}$, показать, что множество C(a, b) таких $x \in E$, что R$\{a, x\}$ и R$\{b, x\}$, устойчиво и что для всякой пары различных элементов x, y из C(a, b) справедливо C$(x, y) = $ C(a, b). *Конституэнтами* множества E относительно соотношения R назовем эти множества C(a, b) [для всякой пары (a, b) такой, что R$\{a, b\}$] и связные компоненты (упражнение 10) по R, сводящиеся к единственному элементу. Показать, что пересечение двух различных конституэнт множества E не может содержать более одного элемента и что для трех попарно различных конституэнт A, B, C по меньшей мере одно из множеств $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ пусто.

б) Обратно, пусть $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ — покрытие некоторого множества E, образованное непустыми частями множества E и обладающее следующими свойствами: 1° если λ и μ — два различных индекса, то $X_\lambda \cap X_\mu$ содержит самое большее один элемент; 2° если λ, μ, ν — три различных индекса, то хотя бы одно из трех множеств $X_\lambda \cap X_\mu$, $X_\mu \cap X_\nu$, $X_\nu \cap X_\lambda$ пусто. Пусть R$\{x, y\}$ есть соотношение „существует такое $\lambda \in L$, что $x \in X_\lambda$ и $y \in X_\lambda$"; показать, что R рефлексивное в E, симметрическое и интранзитивное порядка 1 соотношение и что множества X_λ суть конституэнты множества E относительно R.

в) ◦ Мы говорим, что соотношение R$\{x, y\}$, симметрическое и рефлексивное в E, является *интранзитивным соотношением порядка* $n - 3$, если для всякого семейства $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ различных элементов из E соотношения R$\{x_i, x_j\}$ для всякой пары $(i, j) \neq (n-1, n)$ влекут R$\{x_{n-1}, x_n\}$. Обобщить свойства а) и б) на интранзитивные соотношения произвольного порядка. Показать, что интранзитивное соотношение порядка p является также интранзитивным соотношением порядка q для всякого $q > p$. ◦

ГЛАВА III

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Соотношения порядка. Упорядоченные множества

1. Определение соотношения порядка

Пусть R$\{x, y\}$ — соотношение, а x и y — различные буквы. Мы говорим, что R есть *соотношение порядка по буквам* x *и* y (или *относительно* x *и* y или *между* x *и* y), если верны соотношения

$$(R\{x, y\} \text{ и } R\{y, z\}) \Rightarrow R\{x, z\},$$
$$(R\{x, y\} \text{ и } R\{y, x\}) \Rightarrow (x = y),$$
$$R\{x, y\} \Rightarrow (R\{x, x\} \text{ и } R\{y, y\}).$$

Из них первое означает, что соотношение R *транзитивно по буквам* x *и* y (гл. II, § 6, п° 1).

Примеры. 1) *Соотношение равенства* $x = y$ есть соотношение порядка.

2) Соотношение $X \subset Y$ есть соотношение порядка между X и Y (гл. II, § 1, предложения 1 и 2 и аксиома A1); оно называется часто соотношением *включения* или *соотношением* $\subset$.

3) Пусть R$\{x, y\}$ — соотношение порядка между x и y. Соотношение R$\{y, x\}$ есть соотношение порядка *между* x *и* y; оно называется соотношением порядка, *противоположным* к R$\{x, y\}$.

Соотношением порядка в множестве E называется соотношение порядка R$\{x, y\}$ по двум различным буквам x, y, такое, что соотношение R$\{x, x\}$ *эквивалентно* $x \in E$ [иначе говоря, такое, что R$\{x, y\}$ *рефлексивно* в E (гл. II, § 6, п° 1)]. Тогда соотношение R$\{x, y\}$ влечет „$x \in E$ и $y \in E$", а соотношение (R$\{x, y\}$ и R$\{y, x\}$) эквивалентно „$x \in E$ и $y \in E$ и $x = y$".

Примеры. 1) Соотношение равенства и соотношение включения не являются соотношениями порядка в каком-нибудь множестве, так как соотношения $x = x$ и $X \subset X$ не являются коллективизирующими (гл. II, § 1, п° 7).

2) Пусть R$\{x, y\}$ — соотношение порядка между x и y и пусть E — такое множество, что $x \in E$ влечет R$\{x, x\}$ (нетрудно видеть, что пустое множество удовлетворяет этому условию). Соотношение „R$\{x, y\}$ и $x \in E$ и $y \in E$" есть тогда соотношение порядка в E, как это сразу же видно; мы говорим, что это соотношение *индуцировано* в E соотношением R$\{x, y\}$ (ср. п° 4). Допуская вольность речи, мы будем часто говорить: „соотношение S$\{x, y\}$ есть соотношение порядка между элементами множества E", вместо того чтобы сказать: „соотношение (S x, y и $x \in E$ и $y \in E$) есть соотношение порядка в E". Например,

если дано множество A, то соотношение „$X \subset Y$ и $X \subset A$ и $Y \subset A$“ есть соотношение порядка в множестве частей множества A, а „$X \subset Y$“— соотношение порядка между частями A.

3) Пусть E и F — множества. Соотношение „g продолжает f“ есть соотношение порядка между элементами f и g множества отображений частей множества E в множество F.

4) Множество $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ множеств частей множества E содержит в качестве элемента $\mathscr{P}$ множество *разбиений* множества E (гл. II, § 4, n° 7). Напомним, что разбиение ω называется более крупным, чем разбиение ω', если, каково бы ни было $Y \in \omega'$, существует такое $X \in \omega$, что $Y \subset X$ (гл. II, § 4, n° 6). Для всякого разбиения $\omega \in \mathscr{P}$ пусть $\tilde{\omega}$ есть график эквивалентности, определенной через ω в E (гл. II, § 6, n° 2), т. е. объединение попарно не пересекающихся множеств $A \times A$, где A пробегает ω. Соотношение „ω крупнее, чем ω'“ эквивалентно включению $\tilde{\omega} \supset \tilde{\omega}'$, что сразу же видно; следовательно, это соотношение порядка между элементами ω и ω' множества $\mathscr{P}$.

Порядком на множестве E называется такое соответствие $\Gamma = (G, E, E)$ с областью отправления E и областью прибытия E, что $(x, y) \in G$ есть соотношение порядка в E. Допуская вольность речи, мы иногда будем говорить, что график G соответствия Γ есть порядок на E. Если $R\{x, y\}$ — соотношение порядка в E, то оно обладает графиком, являющимся порядком на E.

Предложение 1. *Для того чтобы соответствие Γ между E и E было порядком на E, необходимо и достаточно, чтобы его график G удовлетворял следующим условиям:*

а) $G \circ G = G$;

б) *множество* $G \cap \overset{-1}{G}$ *есть диагональ* Δ *в* $E \times E$.

В самом деле, соотношение $((x, y) \in G$ и $(y, z) \in G) \Rightarrow ((x, z) \in G)$ записывается также в виде $G \circ G \subset G$, а соотношение

$$((x, y) \in G \text{ и } (y, x) \in G) \Leftrightarrow (x = y \text{ и } x \in E \text{ и } y \in E)$$

записывается в виде $G \cap \overset{-1}{G} = \Delta$. Из $G \cap \overset{-1}{G} = \Delta$ тогда вытекает $\Delta \subset G$, а отсюда $G = \Delta \circ G \subset G \circ G$. Так как $G \circ G \subset G$, это влечет $G \circ G = G$.

2. Соотношения предпорядка

Пусть $R\{x, y\}$ — соотношение, x и y — различные буквы. Если R транзитивно и

$$R\{x, y\} \Rightarrow (R\{x, x\} \text{ и } R\{y, y\}),$$

то R не является с необходимостью соотношением порядка, так как соотношение $(R\{x, y\}$ и $R\{y, x\})$ не влечет с необходимостью $x = y$. Мы говорим, что $R\{x, y\}$ есть *соотношение предпорядка* между x и y.

Например, пусть $\mathscr{R}$ — множество частей множества $\mathfrak{P}(E)$, являющихся покрытиями для E (гл. II, § 4, n° 6). Соотношение „$\mathfrak{R}$ крупнее, чем $\mathfrak{R}'$“, между элементами $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ множества $\mathscr{R}$ (гл. II, § 4, n° 6) транзитивно и рефлексивно, но два различных покрытия могут оказаться такими, что каждое из них будет крупнее, чем другое. Например, именно так обстоит дело, когда $\mathfrak{R}'$ есть (в $\mathfrak{P}(E)$) объединение множества $\mathfrak{R}$ и части множества E, содержащейся в каком-либо множестве из $\mathfrak{R}$, но не принадлежащей к $\mathfrak{R}$.

Однако соотношение $(R\{x, y\}$ и $R\{y, x\})$, во всяком случае, является *соотношением эквивалентности* $S\{x, y\}$ по x и y. Пусть x' и y' — буквы, отличные от x, y и не встречающиеся в R; тогда $R\{x, y\}$ *совместимо* (по x и y) с соотношениями эквивалентности $S\{x, x'\}$ и $S\{y, y'\}$, иначе говоря (гл. II, § 6, n° 8), соотношение $(R\{x, y\}$ и $S\{x, x'\}$ и $S\{y, y'\})$ влечет $R\{x', y'\}$.

Соотношением предпорядка в множестве E называется такое соотношение предпорядка $R\{x, y\}$, что соотношение $R\{x, x\}$ эквивалентно $x \in E$, соотношение $R\{x, y\}$ влечет тогда „$x \in E$ и $y \in E$“.

Если $R\{x, y\}$ — соотношение предпорядка в множестве E, то определенное выше соотношение $S\{x, y\}$ есть соотношение эквивалентности в E. Пусть тогда $R'\{X, Y\}$ есть соотношение

$$X \in E/S \text{ и } Y \in E/S \text{ и } (\exists x)(\exists y)((x \in X \text{ и } y \in Y) \text{ и } R\{x, y\}),$$

т. е. соотношение, выведенное из R переходом к факторсоотношению (по x и y); мы уже видели в гл. II, § 6, n° 3, что оно эквивалентно соотношению

$$X \in E/S \text{ и } Y \in E/S \text{ и } (\forall x)(\forall y)((x \in X \text{ и } y \in Y) \Rightarrow R\{x, y\}).$$

Покажем, что $R'\{X, Y\}$ есть *соотношение порядка* между элементами фактормножества E/S. В самом деле, соотношение $(R'\{X, Y\}$ и $R'\{Y, Z\})$ эквивалентно $X \in E/S$ и $Y \in E/S$ и $Z \in E/S$ и

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in X \text{ и } y \in Y \text{ и } z \in Z) \Rightarrow (R\{x, y\} \text{ и } R\{y, z\}))$$

(гл. I, § 4, критерии C40 и C41); так как $R\{x, y\}$ транзитивно и $Y \in E/S$ влечет $Y \neq \varnothing$ (гл. II, § 6, n° 2), то отсюда нетрудно вывести, что $R'\{X, Y\}$ транзитивно. Кроме того, соотношение $(R'\{X, Y\}$ и $R'\{Y, X\})$ эквивалентно соотношению $X \in E/S$ и $Y \in E/S$ и

$$(\forall x)(\forall y)((x \in X \text{ и } y \in Y) \Rightarrow (R\{x, y\} \text{ и } R\{y, x\})),$$

т. е. соотношению

$$X \in E/S \text{ и } Y \in E/S \text{ и } (\forall x)(\forall y)((x \in X \text{ и } y \in Y) \Rightarrow S\{x, y\}),$$

а потому это соотношение влечет

$$X \in E/S \text{ и } Y \in E/S \text{ и } X = Y.$$

Кроме того, $R\{x, y\}$ влечет $R\{x, x\}$ и $R\{y, y\}$, откуда следует, что $R'\{X, Y\}$ влечет каждое из соотношений

$$X \in E/S \text{ и } (\forall x)((x \in X) \Rightarrow R\{x, x\}),$$
$$Y \in E/S \text{ и } (\forall y)((y \in Y) \Rightarrow R\{y, y\});$$

следовательно, $R'\{X, Y\}$ влечет $(R'\{X, X\}$ и $R'\{Y, Y\})$. Наконец, так как $x \in E$ влечет $R\{x, x\}$, то $X \in E/S$ влечет $R'\{X, X\}$, что

завершает доказательство нашего утверждения. Мы говорим, что $R'\{X, Y\}$ есть соотношение порядка, *ассоциированное* с $R\{x, y\}$.

Предпорядком на множестве E называется такое соответствие $\Gamma = (G, E, E)$ с областью отправления E и областью прибытия E, что $(x, y) \in G$ есть соотношение предпорядка в E; допуская вольность речи, мы говорим иногда, что график G соответствия Γ есть предпорядок на E. Для того чтобы график G был предпорядком на E, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_E \subset G$ и $G \circ G \subset G$ (откуда следует $G \circ G = G$). Соотношение эквивалентности S, соответствующее соотношению предпорядка $(x, y) \in G$, имеет тогда в качестве графика $G \cap \overset{-1}{G}$; соотношение порядка, ассоциированное с соотношением $(x, y) \in G$, имеет в качестве графика часть G' произведения $(E/S) \times (E/S)$, соответствующую (гл. II, § 6, п° 8) образу графика G при каноническом отображении множества $E \times E$ на $(E \times E)/(S \times S)$.

Пример. ° Пусть A — кольцо с единицей. Соотношение $(\exists z)(z \in A$ и $y = zx)$ между двумя элементами x и y из A есть соотношение предпорядка в A; оно читается так: „x есть правый делитель для y" или „y есть левое кратное для x" (см. „Алгебра", гл. I, § 8 и гл. VI, § 1). $_\circ$

3. Обозначения и терминология

Определения, даваемые в дальнейшей части этого параграфа, применимы к любому соотношению порядка $R\{x, y\}$ между x и y, но в особенности будут использоваться в случае, когда $R\{x, y\}$ обозначается через $x \leqslant y$ °(по аналогии с обычным соотношением порядка между целыми или действительными числами)$_\circ$ (или через $x \subset y$ или аналогичным знаком); поэтому мы сформулируем их лишь в обозначениях $x \leqslant y$, предоставляя читателю распространить их на другие случаи. Когда $R\{x, y\}$ обозначается через $x \leqslant y$, то считается, что $y \geqslant x$ есть синоним для $x \leqslant y$, и эти соотношения читаются так: „*x минорирует y*" („x est *inférieur* à y") или „*x меньше y*" („x est *plus petit* que y") или „*y превышает* (*мажорирует*) *x*" („y est *supérieur* à x") или „*y больше x*" („y est *plus grand* que x"), или иногда „*x меньше или равен y*" („x est *au plus égal* à y"), или „*y больше или равен x*" („y est au moins égal à x"). Тогда соотношение $x \geqslant y$ есть соотношение порядка (*между x и y*), *противоположное* $x \leqslant y$.

Допуская вольность речи, мы будем часто говорить о „соотношении $\leqslant$" вместо „соотношения $x \leqslant y$"; в этом случае „соотношение $\geqslant$" будет противоположным „соотношению $\leqslant$". Заметим также, что в одном и том же доказательстве часто будет использоваться один и тот же знак $\leqslant$ для обозначения нескольких разных соотношений порядка, если это не приводит к путанице.

Условия, при которых соотношение, обозначенное через $x \leqslant y$, будет соотношением порядка в множестве E, записываются теперь

в виде

(RO_I) *Соотношение* „$x \leqslant y$ и $y \leqslant z$" *влечет* $x \leqslant z$.
(RO_{II}) *Соотношение* „$x \leqslant y$ и $y \leqslant x$" *влечет* $x = y$.
(RO_{III}) *Соотношение* $x \leqslant y$ *влечет* „$x \leqslant x$ и $y \leqslant y$".
(RO_{IV}) *Соотношение* $x \leqslant x$ *эквивалентно соотношению* $x \in E$.

Когда соотношение порядка обозначается через $x \leqslant y$, то пишут $x < y$ (или $y > x$) для обозначения соотношения „$x \leqslant y$ и $x \neq y$"; эти соотношения читаются так: „*x строго минорирует y*", или „*x строго меньше y*", или „*y строго превышает* (*строго мажорирует*) *x*", или „*y строго больше x*".

Пример соотношения включения показывает, что отрицание соотношения $x \leqslant y$ (обозначаемое иногда через $x \nleqslant y$) *отнюдь не обязательно эквивалентно* соотношению $y < x$ (ср. п° 14).

C58. *Пусть* $\leqslant$ *есть соотношение порядка, x и y — различные буквы. Соотношение* $x \leqslant y$ *эквивалентно* „$x < y$ или $x = y$". *Каждое из соотношений* „$x \leqslant y$ и $y < z$", „$x < y$ и $y \leqslant z$" *влечет* $x < z$.

Первое утверждение вытекает из критерия

$$A \Rightarrow ((A \text{ и } (\text{не } B)) \text{ или } B)$$

(гл. I, § 3, критерий C24). Для доказательства второго заметим сначала, что каждое из предположений влечет $x \leqslant z$ ввиду транзитивности. С другой стороны, соотношение ($x = z$ и $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$) повлекло бы $x = y = z$, что противоречит нашему предположению.

Чтобы сделать изложение более удобным и заменить метаматематические критерии математическими теоремами, мы большей частью будем перемещаться в некоторую теорию $\mathcal{T}$, содержащую аксиомы и схемы теории множеств и, кроме того, две константы E и Γ, удовлетворяющие аксиоме

„Γ есть порядок на множестве E" (п° 1).

Мы будем обозначать через $x \leqslant y$ соотношение $y \in \Gamma\langle x \rangle$ и будем говорить, что E есть *множество, упорядоченное порядком* Γ (или соотношением порядка $y \in \Gamma\langle x \rangle$) (см. гл. IV, § 1)[1].

Если Γ является — в теории $\mathcal{T}$ — предпорядком на E, то мы будем говорить также, что E есть *множество, предупорядоченное предпорядком* Γ.

В некоторых случаях (например, в нижеследующем определении) теории, в которые мы будем перемещаться, будут довольно сложными. Мы предоставляем читателю составлять явные списки констант и аксиом этих теорий.

[1]) По поводу этой терминологии см. подстрочное примечание к п° 1 § 6 сводки результатов (стр. 384). — *Прим. ред.*

Пусть E, E′ — два множества, упорядоченных порядками Γ и Γ′. *Изоморфизмом множества* E *на множество* E′ (относительно порядков Γ и Γ′) называется такое взаимно однозначное отображение f множества E на множество E′, что соотношения $x \leqslant y$ и $f(x) \leqslant f(y)$ эквивалентны (ср. гл. IV, § 1).

4. Упорядоченные подмножества. Произведение упорядоченных множеств

Пусть E — множество, упорядоченное порядком Γ, и пусть G — график порядка Γ. Для всякой части A множества E пересечение $G \cap (A \times A)$ есть порядок на A; соответствующее соотношение порядка эквивалентно соотношению „$x \leqslant y$ и $x \in A$ и $y \in A$"; мы будем обозначать его также через $x \leqslant y$ (допуская вольность речи). Порядок и соотношение порядка, так определенные на A, называются *индуцированными* порядком и соотношением порядка, заданными на E; мы говорим также, что порядок и соотношение порядка на E суть *продолжения* порядка и соотношения порядка, индуцированных на A. Когда A рассматривается как упорядоченное множество, то, если не оговорено противное, речь идет именно о порядке, индуцированном на A порядком на E.

Примеры. Соотношения, индуцированные соотношением включения $X \subset Y$ на разных множествах частей, очень важны. Приведем несколько примеров:

1) Пусть E, F — два множества, Φ(E, F) — множество отображений частей множества E в множество F; для всякой функции $f \in \Phi(E, F)$ пусть G_f есть график функции f, составляющий часть множества $E \times F$. Если наделить Φ(E, F) соотношением порядка „g продолжает f" между f и g (n° 1, пример 3), то $f \to G_f$ есть изоморфизм упорядоченного множества Φ(E, F) на некоторое подмножество множества $\mathfrak{P}(E \times F)$, упорядоченное соотношением включения.

2) Для всякого разбиения ω какого-нибудь множества E пусть $\tilde{\omega}$ есть график эквивалентности, определенной через ω в E. Отображение $\omega \to \tilde{\omega}$ есть изоморфизм множества $\mathscr{P}$ разбиений этого E, упорядоченного соотношением „ω мельче, чем ω′", между ω и ω′ (n° 1, пример 4), на некоторое подмножество множества $\mathfrak{P}(E \times F)$, упорядоченное соотношением включения.

3) Пусть E — множество, $\Omega \subset \mathfrak{P}(E \times E)$ — множество графиков предпорядков на E (n° 2) (или — допуская вольность речи — множество предпорядков на E). Соотношение $s \subset t$ между s и t, индуцированное на Ω соотношением включения в $\mathfrak{P}(E \times E)$, можно выразить словами: „предпорядок s *мельче* (*тоньше*), чем предпорядок t" [или „t *крупнее* (грубее), чем s"]. Обозначим через $x(s)y$ и $x(t)y$ соответственно соотношения предпорядка $(x, y) \in s$ и $(x, y) \in t$ в E; сказать „s мельче, чем t", — значит сказать, что соотношение $x(s)y$ *влечет* $x(t)y$.

Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств, и для всякого $\iota \in I$ пусть Γ_ι есть порядок на E_ι, а $G_\iota \subset E_\iota \times E_\iota$ — его график. Запишем в виде $x_\iota \leqslant y_\iota$ соотношение порядка $(x_\iota, y_\iota) \in G_\iota$ на E_ι. В произведении мно-

жеств $F = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ соотношение

$$(\forall \iota)((\iota \in I) \Rightarrow (x_\iota \leqslant y_\iota))$$

есть соотношение порядка между $x = (x_\iota)$ и $y = (y_\iota)$, как нетрудно видеть. Порядок и соотношение порядка, так определенные на F, называются *произведением* порядков Γ_ι и *произведением соотношений порядка* $x_\iota \leqslant y_\iota$; это соотношение мы обозначаем (допуская вольность обозначений) через $x \leqslant y$ и говорим, что множество F, упорядоченное произведением порядков Γ_ι, есть *произведение упорядоченных множеств* E_ι.

Нетрудно видеть, что график порядка-произведения на множестве F есть образ множества-произведения $\prod_{\iota \in I} G_\iota$ при каноническом отображении множества $\prod_{\iota \in I} (E_\iota \times E_\iota)$ на $F \times F$ (гл. II, § 5, n° 5).

Важный пример произведения упорядоченных множеств составляет множество F^E графиков отображений множества E в упорядоченное множество F; мы знаем, что существует каноническое отображение множества графиков F^E на множество $\mathscr{F}(E, F)$ отображений E в F; это отображение есть изоморфизм упорядоченного множества F^E на множество $\mathscr{F}(E, F)$, наделенное порядком, определяемым следующим соотношением между двумя отображениями f, g множества E в F: „каково бы ни было $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$" (это соотношение обозначается через $f \leqslant g$).

Следует заметить, что в упорядоченном множестве $\mathscr{F}(E, F)$ соотношение $f < g$ означает:

„каково бы ни было $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$, и существует такое $y \in E$, что $f(y) < g(y)$",

но отнюдь *не означает*, что

„каково бы ни было $x \in E$, $f(x) < g(x)$".

Чтобы не опасаться этого смешения, мы будем обычно избегать употребления обозначения $f < g$ в этом случае.

5. Возрастающие отображения

Определение 1. *Пусть* E *и* F — *упорядоченные множества (и притом упорядоченные соотношениями, которые оба обозначаются через* $\leqslant$*). Мы говорим, что отображение* f *множества* E *в множество* F *является возрастающим, если* $x \leqslant y$ *влечет* $f(x) \leqslant f(y)$; *мы говорим, что отображение* f *является убывающим, если соотношение* $x \leqslant y$ *влечет* $f(x) \geqslant f(y)$. *Отображение множества* E *в множество* F *называется монотонным, если оно возрастающее или убывающее.*

Возрастающее отображение множества E в множество F становится убывающим (и обратно), если *один* из порядков множества E или

множества F заменить противоположным порядком. Всякая постоянная функция является одновременно возрастающей и убывающей; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Например, если множество E упорядочено соотношением равенства, то тождественное отображение множества E на себя является одновременно возрастающим и убывающим, но не постоянным, если только E содержит не менее двух элементов (ср. упр. 7).

Определение 2. *Пусть* E *и* F — *два упорядоченных множества; мы говорим, что отображение* f *из* E *в* F *является строго возрастающим, если соотношение* $x < y$ *влечет* $f(x) < f(y)$; *отображение* f *является строго убывающим, если соотношение* $x < y$ *влечет* $f(x) > f(y)$. *Отображение множества* E *в множество* F *называется строго монотонным, если оно строго возрастающее или строго убывающее.*

Примеры. 1) Пусть E — множество; отображение $X \to E - X$ множества $\mathfrak{P}(E)$ (упорядоченного включением) на себя является строго убывающим.

2) Пусть E — упорядоченное множество. Для всякого $x \in E$ пусть U_x есть множество таких $y \in E$, что $y \geqslant x$. Отображение $x \to U_x$ является строго убывающим отображением множества E в множество $\mathfrak{P}(E)$ (упорядоченное включением); можно даже заметить, что соотношение $x \leqslant y$ эквивалентно $U_x \supset U_y$.

Монотонное и взаимно однозначное отображение множества E в F *строго монотонно*; обратное, вообще говоря, неверно, ибо соотношение $f(x) = f(y)$ может быть верным и тогда, когда ни одно из соотношений $x \leqslant y$, $x \geqslant y$ не верно (ср. n° 14, предложение 13).

Для того чтобы взаимно однозначное отображение f упорядоченного множества E на упорядоченное множество E′ было изоморфизмом множества E на E′ (n° 3), необходимо и достаточно, чтобы f и обратное отображение к нему были возрастающими.

Когда I есть упорядоченное множество индексов, говорят, что *семейство частей* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ множества E является *возрастающим*, если $\iota \to X_\iota$ есть возрастающее отображение из I в $\mathfrak{P}(E)$, где $\mathfrak{P}(E)$ упорядочено включением (иными словами, если $\iota \leqslant \varkappa$ влечет $X_\iota \subset X_\varkappa$). Аналогично определяются *убывающее, строго возрастающее* и *строго убывающее* семейство частей $(X_\iota)_{\iota \in I}$.

6. Максимальные и минимальные элементы

Определение 3. *Пусть* E — *упорядоченное множество. Элемент* $a \in E$ *называется минимальным* (соответственно *максимальным*) *элементом множества* E, *если соотношение* $x \leqslant a$ (соответственно $x \geqslant a$) *влечет* $x = a$.

Всякий минимальный элемент множества E есть максимальный элемент для противоположного порядка, и обратно.

Примеры. 1) Пусть A — множество; в части множества $\mathfrak{P}(A)$ (упорядоченной включением), образуемой непустыми частями от A, минимальными элементами служат части множества, состоящие из одного элемента.

2) В множестве $\Phi(E, F)$ отображений частей множества E в непустое множество F, если $\Phi(E, F)$ упорядочено соотношением „v продолжает u" между u и v, максимальными элементами служат отображения всего множества E в F.

3) °В множестве натуральных чисел > 1, упорядоченном соотношением „m есть делитель для n" между m и n, минимальными элементами служат простые числа.$_\circ$

4) °Множество действительных чисел не обладает ни максимальными, ни минимальными элементами.$_\circ$

7. Наибольший элемент; наименьший элемент

Если в упорядоченном множестве E существует такой элемент a, что $a \leqslant x$ для всякого $x \in E$, то a есть *единственный* элемент из E, обладающий этим свойством; действительно, если еще и $b \leqslant x$ для всякого $x \in E$, то отсюда следует, что $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, а поэтому $a = b$.

Определение 4. *Пусть* E — *упорядоченное множество. Мы говорим, что элемент* $a \in E$ *есть наименьший* (соответственно *наибольший*) *элемент множества* E, *если для всякого* $x \in E$ *справедливо* $a \leqslant x$ (соответственно $x \leqslant a$).

Упорядоченное множество не обязательно содержит наибольший и наименьший элементы; если E имеет наименьший элемент a, то a есть наибольший элемент для противоположного порядка.

Если E имеет наименьший элемент a, то a есть *единственный минимальный элемент* множества E; действительно, $a < x$ для всякого x, отличного от a.

Примеры. 1) Пусть $\mathfrak{S}$ — непустая часть множества $\mathfrak{P}(E)$ частей какого-нибудь множества E. Если $\mathfrak{S}$ имеет наименьший (соответственно наибольший) элемент A для соотношения включения, то A есть не что иное, как пересечение (соответственно *объединение*) множеств из $\mathfrak{S}$. Обратно, если пересечение (соответственно объединение) множеств из $\mathfrak{S}$ принадлежит к $\mathfrak{S}$, то оно является наименьшим (соответственно наибольшим) элементом в $\mathfrak{S}$.

2) В частности, $\varnothing$ есть наименьший и E — наибольший элемент в $\mathfrak{P}(E)$. В множестве $\Phi(E, F)$ отображений частей множества E в множество F, где $\Phi(E, F)$ упорядочено продолжением (n° 1, пример 3), *пустое отображение* есть наименьший элемент, а наибольшего элемента не существует, если только F не состоит из единственного элемента. Наконец, диагональ Δ в $E \times E$ есть наименьший элемент в множестве графиков эквивалентностей на E (или предпорядков на E).

Предложение 2. *Пусть* E — *упорядоченное множество,* E′ — *сумма множества* E *и множества* $\{a\}$, *состоящего из единственного элемента; на* E′ *существует и единствен порядок, индуцирующий на* E *заданный порядок и обладающий тем*

свойством, что при нем a есть наибольший элемент множества E′.

В самом деле, если G — график порядка на E, то график, отвечающий на наш вопрос, должен быть объединением G′ графика G и множества пар (x, a), где $x \in E'$; обратно, непосредственно очевидно, что G′ есть график порядка на E′, отвечающего поставленным условиям.

Мы говорим, что упорядоченное множество E′ получается *присоединением к E наибольшего элемента a* (ср. упражнение 3).

Мы говорим, что часть A упорядоченного множества E конфинальна (соответственно *коинициальна*) множеству E, если для всякого $x \in E$ существует такое $y \in A$, что $x \leqslant y$ (соответственно $y \leqslant x$). Сказать, что упорядоченное множество имеет наибольший (соответственно наименьший) элемент, значит сказать, что в E существует конфинальная (соответственно коинициальная) часть, состоящая из единственного элемента.

8. Мажоранты; миноранты

Определение 5. *Пусть E — упорядоченное множество и X — часть множества E. Минорантой* (соответственно *мажорантой*) [или *нижним* (соответственно *верхним*) *ограничителем*] *множества X называется любой такой элемент $x \in E$, что для всякого $y \in X$ справедливо $x \leqslant y$* (соответственно $x \geqslant y$); *мы говорим тогда, что x минорирует* (соответственно *мажорирует*) X.

Всякая мажоранта множества X есть миноранта множества X при противоположном порядке, и обратно.

Если x минорирует X, то всякий элемент $z \leqslant x$ тоже минорирует X. Миноранта множества X есть также миноранта всякой части множества X. Для того чтобы X имело наименьший элемент, необходимо и достаточно, чтобы существовала миноранта множества X, принадлежащая к X.

Множество минорант части X множества E может быть пустым: например, когда X = E и E не имеет наименьшего элемента.

Часть X от E с непустым множеством минорант (соответственно мажорант) называется *минорированной* (соответственно *мажорированной*) или *ограниченной снизу* (соответственно *сверху*); часть, ограниченная и снизу, и сверху, называется *ограниченной*. Если X ограничено снизу (соответственно ограничено сверху, ограничено), то и всякая часть от X ограничена снизу (соответственно ограничена сверху, ограничена).

Всякая часть, состоящая из единственного элемента, ограничена. Однако двухэлементная часть уже не обязательно ограничена снизу или сверху (n° 10).

Пусть E — упорядоченное множество, а f — отображение произвольного множества A в множество E. Допуская вольность речи, мы говорим, что отображение f ограничено снизу (соответственно мажорировано, ограничено), если множество $f(A)$ мажорировано (соответственно минорировано, ограничено).

9. Верхняя грань; нижняя грань

Определение 6. *Пусть E — упорядоченное множество, X — часть множества E. Мы говорим, что элемент из E есть нижняя* (соответственно *верхняя*) *грань множества X в множестве E, если этот элемент есть наибольший* (соответственно *наименьший*) *элемент множества минорант* (соответственно *мажорант*) *части X множества E.*

Пусть дана часть X упорядоченного множества E; символом $\sup_E X$ (соответственно $\inf_E X$) или, если можно не опасаться путаницы, символом $\sup X$ (соответственно $\inf X$) обозначается верхняя (соответственно нижняя) грань множества X в E, когда она существует. Верхняя (соответственно нижняя) грань двухэлементного множества $\{x, y\}$ обозначается (когда она существует) символом $\sup(x, y)$ [соответственно $\inf(x, y)$]; аналогичные обозначения вводятся для верхней и нижней граней трехэлементного множества и т. д.

Если часть X множества E имеет наибольший элемент a, то a есть верхняя грань множества X в множестве E.

Если X имеет нижнюю грань a в E, то a есть верхняя грань для X при противоположном порядке на E; это нам позволит в дальнейшем большей частью рассматривать лишь верхние грани.

Примеры. 1) Множество мажорант пустой части ∅ упорядоченного множества E есть, очевидно, само множество E; для того чтобы ∅ обладало в E верхней гранью, необходимо и достаточно, чтобы E имело *наименьший* элемент, который тогда будет *верхней гранью* для ∅.

2) В множестве $\mathfrak{P}(E)$ частей множества E, если $\mathfrak{P}(E)$ упорядочено включением, всякая часть $\mathfrak{S}$ множества $\mathfrak{P}(E)$ имеет верхнюю грань, которой служит *объединение* множеств из $\mathfrak{S}$, и нижнюю грань, которой служит *пересечение* множеств из $\mathfrak{S}$.

3) Пусть E и F — два множества, а Θ — часть множества Φ(E, F) отображений частей множества E в множество F, упорядоченного продолжением (n° 1, пример 3). Для всякого $u \in \Phi(E, F)$ пусть $D(u)$ есть область определения этого u. Условие существования общего продолжения для семейства отображений, принадлежащих к Φ(E, F) (гл. II, § 4, предложение 7), показывает, что для того, чтобы Θ имело верхнюю грань в Φ(E, F), необходимо и достаточно, чтобы для всякой пары элементов (u, v) из Θ выполнялось $u(x) = v(x)$ при любом $x \in D(u) \cap D(v)$.

Пусть дано отображение f множества A в упорядоченное множество E. Мы говорим, что эта функция имеет верхнюю грань, если образ $f(A)$ имеет верхнюю грань в E; эта грань тогда называется

верхней гранью функции f и обозначается через $\sup\limits_{x \in A} f(x)$. Нижняя грань для f определяется и обозначается аналогично.

В частности, если часть A множества E имеет верхнюю грань в E, то эта грань есть верхняя грань канонической инъекции части A множества E, а потому может быть обозначена через $\sup\limits_{x \in A} x$.

Предложение 3. *Пусть* E — *упорядоченное множество*, A — *часть множества* E, *имеющая в* E *и нижнюю, и верхнюю грани; тогда* $\inf A \leqslant \sup A$, *если* A *не пусто; если же* $A = \varnothing$, *то* $\sup A$ *есть наименьший, а* $\inf A$ — *наибольший элемент в* E.

Это вытекает сразу же из определений.

Предложение 4. *Пусть* E — *упорядоченное множество*, A *и* B — *две части множества* E, *имеющие каждая верхнюю* (соответственно *нижнюю*) *грань в* E; *если* $A \subset B$, *то* $\sup A \leqslant \sup B$ (соответственно $\inf A \geqslant \inf B$).

Это предложение очевидно.

Следствие. *Пусть* $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство элементов множества* E, *имеющее верхнюю грань в* E; *если* J — *такая часть множества* I, *что семейство* $(x_\iota)_{\iota \in J}$ *имеет верхнюю грань в* E, *то* $\sup\limits_{\iota \in J} x_\iota \leqslant \sup\limits_{\iota \in I} x_\iota$.

Предложение 5. *Пусть* $(x_\iota)_{\iota \in I}$, $(y_\iota)_{\iota \in I}$ — *два семейства элементов упорядоченного множества* E, *имеющие одно и то же множество индексов* I *и такие, что* $x_\iota \leqslant y_\iota$ *для всякого* $\iota \in I$; *если оба семейства имеют верхнюю грань в* E, *то* $\sup\limits_{\iota \in I} x_\iota \leqslant \sup\limits_{\iota \in I} y_\iota$.

В самом деле, $a = \sup\limits_{\iota \in I} y_\iota$ есть мажоранта множества элементов y_ι; следовательно, $x_\iota \leqslant y_\iota \leqslant a$ для всякого ι, что влечет $\sup\limits_{\iota \in I} x_\iota \leqslant a$.

Предложение 6. *Пусть* $(x_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство элементов упорядоченного множества* E, *а* $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — *покрытие множества индексов* I; *предполагается, что каждое из подсемейств* $(x_\iota)_{\iota \in J_\lambda}$ *имеет верхнюю грань в* E. *Для того чтобы семейство* $(x_\iota)_{\iota \in I}$ *имело верхнюю грань в* E, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* $\left(\sup\limits_{\iota \in J_\lambda} x_\iota\right)_{\lambda \in L}$ *имело верхнюю грань в* E, *причем в этом случае*

$$\sup_{\iota \in I} x_\iota = \sup_{\lambda \in L} \left(\sup_{\iota \in J_\lambda} x_\iota\right). \tag{1}$$

Положим $b_\lambda = \sup\limits_{\iota \in J_\lambda} x_\iota$. Предположим, что $(x_\iota)_{\iota \in I}$ имеет верхнюю грань a; тогда $a \geqslant b_\lambda$ для всякого $\lambda \in L$ (следствие предложения 4). С другой стороны, если $c \geqslant b_\lambda$ для всякого $\lambda \in L$, то $c \geqslant x_\iota$ для всякого $\iota \in I$, ибо $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ есть покрытие множества I; следовательно, $c \geqslant a$, что доказывает равенство $a = \sup\limits_{\lambda \in L} b_\lambda$. Предположим, обратно, что семейство $(b_\lambda)_{\lambda \in L}$ имеет верхнюю грань a'; тогда $a' \geqslant x_\iota$ для всякого $\iota \in I$. С другой стороны, если $c' \geqslant x_\iota$ для всякого $\iota \in I$, в частности $c' \geqslant \sup\limits_{\iota \in J_\lambda} x_\iota = b_\lambda$ для всякого $\lambda \in L$, следовательно, $c' \geqslant a'$, что доказывает равенство $a' = \sup\limits_{\iota \in I} x_\iota$.

Следствие. *Пусть* $(x_{\lambda\mu})_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$ — *двойное семейство элементов упорядоченного множества* E, *такое, что для всякого* $\mu \in M$ *семейство* $(x_{\lambda\mu})_{\lambda \in L}$ *имеет верхнюю грань в* E. *Для того чтобы семейство* $(x_{\lambda\mu})_{(\lambda, \mu) \in L \times M}$ *имело верхнюю грань в* E, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* $\left(\sup\limits_{\lambda \in L} x_{\lambda\mu}\right)_{\mu \in M}$ *имело верхнюю грань в* E, *и тогда*

$$\sup_{(\lambda, \mu) \in L \times M} x_{\lambda\mu} = \sup_{\mu \in M} \left(\sup_{\lambda \in L} x_{\lambda\mu}\right). \tag{2}$$

Предложение 7. *Пусть* $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство упорядоченных множеств. Пусть* A — *часть упорядоченного множества-произведения* $E = \prod\limits_{\iota \in I} E_\iota$, *и для всякого* $\iota \in I$ *пусть* $A_\iota = \mathrm{pr}_\iota A$. *Для того чтобы* A *имело верхнюю грань в* E, *необходимо и достаточно, чтобы при всяком* $\iota \in I$ *множество* A_ι *имело верхнюю грань в* E_ι, *и тогда*

$$\sup A = (\sup A_\iota)_{\iota \in I} = \left(\sup_{x \in A} \mathrm{pr}_\iota x\right)_{\iota \in I}.$$

В самом деле, предположим, что для всякого $\iota \in I$ множество A_ι имеет верхнюю грань b_ι в E_ι. Утверждение, что $c = (c_\iota)$ есть мажоранта для A, означает тогда, что $c_\iota \geqslant b_\iota$ для всякого $\iota \in I$; следовательно, $(b_\iota)_{\iota \in I}$ есть верхняя грань множества A. Обратно, предположим, что A имеет верхнюю грань $a = (a_\iota)_{\iota \in I}$; для всякого $\varkappa \in I$ элемент $a_\varkappa$ есть мажоранта для $A_\varkappa$, ибо при $x_\varkappa \in A_\varkappa$ по определению множества $A_\varkappa$ существует такое $x \in A$, что $\mathrm{pr}_\varkappa x = x_\varkappa$. С другой стороны, если $a'_\varkappa$ — мажоранта для $A_\varkappa$ в $E_\varkappa$, то элемент $c' = (c'_\iota)_{\iota \in I}$, такой, что $c'_\iota = a_\iota$ для $\iota \neq \varkappa$ и $c'_\varkappa = a'_\varkappa$, есть мажоранта множества A, что влечет $c' \geqslant a$ и, следовательно, $a'_\varkappa \geqslant a_\varkappa$. Таким образом, $a_\varkappa$ есть верхняя грань для $A_\varkappa$ в $E_\varkappa$.

Пусть F — часть упорядоченного множества E и пусть A — часть множества F. Может случиться, что один из двух элементов — $\sup_E A$ или $\sup_F A$ — существует, а другой — нет или что оба существуют и не равны.

Примеры. °1) В упорядоченном множестве $E = \mathbf{R}$ действительных чисел рассмотрим множество $F = \mathbf{Q}$ рациональных чисел и множество $A \subset F$ рациональных чисел $< \sqrt{2}$; тогда $\sup_E A$ существует, а $\sup_F A$ — нет.

2) При тех же обозначениях, как в примере 1), пусть G есть объединение множества A и множества $\{2\}$; тогда $G \subset F$ и $\sup_G A$ существует, а $\sup_F A$ — нет.

3) При тех же обозначениях $\sup_E A = \sqrt{2}$, $\sup_G A = 2$.₀

Однако справедлив следующий результат:

Предложение 8. *Пусть E — упорядоченное множество, F — часть множества E и A — часть множества F. Если* $\sup_E A$ *и* $\sup_F A$ *оба существуют, то* $\sup_E A \leqslant \sup_F A$. *Если* $\sup_E A$ *существует и принадлежит к F, то* $\sup_F A$ *существует и равна* $\sup_E A$.

Первое утверждение вытекает из того, что множество M мажорант множества A в F содержится в множестве N мажорант множества A в E, и из предложения 4. С другой стороны, если наименьший элемент из N лежит в F, то он принадлежит к M и, очевидно, является наименьшим элементом в M. Это доказывает второе утверждение.

10. Фильтрующиеся множества

Определение 7. *Мы говорим, что упорядоченное множество E является* **фильтрующимся вправо** (соответственно **влево**), *если всякая двухэлементная часть от E ограничена сверху* (соответственно *снизу*).

Вместо „фильтрующееся вправо" говорят также „фильтрующееся по соотношению $\leqslant$"[1]; аналогичные выражения используются, когда соотношение порядка обозначается другим знаком. Например, если $\mathfrak{S}$ — какое-нибудь множество частей множества A, то мы будем говорить, что $\mathfrak{S}$ является *фильтрующимся по соотношению* $\subset$ (соответственно $\supset$), если для всякой двухэлементной части $\{X, Y\}$ множества $\mathfrak{S}$ существует такое $Z \in \mathfrak{S}$, что $X \subset Z$ и $Y \subset Z$ (соответственно $X \supset Z$ и $Y \supset Z$).

Допуская вольность речи, вместо „множество, фильтрующееся вправо" (соответственно влево), мы иногда будем говорить также „возрастающее (соответственно убывающее) фильтрующееся множество".

Примеры. 1) Упорядоченное множество с наибольшим элементом является фильтрующимся справа.

[1] Относительно терминологии см. также подстрочное примечание к п° 8 § 6 сводки результатов (стр. 387). — *Прим. ред.*

°2) В топологическом пространстве фундаментальная система окрестностей точки является множеством, фильтрующимся по соотношению $\supset$ („Общая топология", Рез. § 1, п° 4).

3) Множество подмодулей конечного типа в произвольном модуле („Алгебра", гл. VII, § 2, п° 2) является фильтрующимся по соотношению $\subset$.₀

Предложение 9. *В фильтрующемся вправо множестве E максимальный элемент a есть наибольший элемент множества E.*

В самом деле, для всякого $x \in E$, по предположению, существует такое $y \in E$, что $x \leqslant y$ и $a \leqslant y$; так как a — максимальный элемент, то $y = a$.

Упорядоченное множество, фильтрующееся вправо, является фильтрующимся влево при противоположном порядке. Всякое произведение фильтрующихся вправо множеств есть фильтрующееся вправо множество. Напротив, часть фильтрующегося вправо множества не обязательно является фильтрующимся вправо множеством.

Если E — *предупорядоченное* множество с соотношением предпорядка, обозначаемым через $x \prec y$ (п° 3), то говорят, что E является *фильтрующимся вправо* (соответственно *влево*), если, каковы бы ни были x, y в E, существует такое $z \in E$, что $x \prec z$ и $y \prec z$ (соответственно $z \prec x$ и $z \prec y$).

11. Отображения: I. Индуктивные пределы

Пусть I — фильтрующееся вправо упорядоченное множество (п° 10), а $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство множеств, множеством индексов которого служит I. Для всякой пары (α, β) индексов из I, таких, что $\alpha \leqslant \beta$, пусть $f_{\beta\alpha}$ есть отображение *множества* E_α *в* E_β. Предположим, что эти $f_{\beta\alpha}$ удовлетворяют следующему условию:

(LI) Соотношения $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ влекут $f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha}$.

Пусть F — множество, являющееся *суммой* семейства множеств $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ (гл. II, § 4, п° 8); допуская вольность речи, мы отождествим множества E_α с соответствующими частями множества F, которые, если множества E_α не пусты, образуют разбиение множества F. В связи с этим для каждого $x \in F$ мы обозначим символом $\lambda(x)$ такой индекс $\alpha \in I$, для которого $x \in E_\alpha$. Пусть $R\{x, y\}$ — следующее соотношение между двумя элементами x и y из F: „существует такой элемент $\gamma \in I$, что $\gamma \geqslant \alpha = \lambda(x)$, $\gamma \geqslant \beta = \lambda(y)$ и $f_{\gamma\alpha}(x) = f_{\gamma\beta}(y)$; покажем, что R — *соотношение эквивалентности в* F. Очевидно, что R симметрично и рефлексивно в F; остается доказать, что оно транзитивно. Пусть $x \in E_\alpha$, $y \in E_\beta$, $z \in E_\gamma$; предположим, что существует такое $\lambda \in I$, что $\lambda \geqslant \alpha$, $\lambda \geqslant \beta$ и $f_{\lambda\alpha}(x) = f_{\lambda\beta}(y)$, и такое $\mu \in I$, что $\mu \geqslant \beta$, $\mu \geqslant \gamma$ и $f_{\mu\beta}(y) = f_{\mu\gamma}(z)$. Так как I — фильтрующееся,

то существует такое $\nu \in \mathrm{I}$, что $\nu \geqslant \lambda$ и $\nu \geqslant \mu$; тогда в силу (LI)

$$f_{\nu\alpha}(x) = f_{\nu\lambda}(f_{\lambda\alpha}(x)) = f_{\nu\lambda}(f_{\lambda\beta}(y)) = f_{\nu\beta}(y) = \\ = f_{\nu\mu}(f_{\mu\beta}(y)) = f_{\nu\mu}(f_{\mu\gamma}(z)) = f_{\nu\gamma}(z),$$

что доказывает наше утверждение. Мы говорим, что фактормножество $\mathrm{E} = \mathrm{F}/\mathrm{R}$ есть *индуктивный предел семейства* $(\mathrm{E}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ *для семейства отображений* $(f_{\beta\alpha})$, и пишем $\mathrm{E} = \varinjlim(\mathrm{E}_\alpha, f_{\beta\alpha})$ или просто $\mathrm{E} = \varinjlim \mathrm{E}_\alpha$, когда это не приводит к путанице. Допуская вольность речи, мы будем говорить также, что пара $((\mathrm{E}_\alpha), (f_{\beta\alpha}))$ (обозначаемая также через $(\mathrm{E}_\alpha, f_{\beta\alpha})$) есть *индуктивная система множеств* относительно множества индексов I.

Ясно, что E не пусто, если хотя бы одно из E_α не пусто. Обозначим через f_α сужение на E_α канонического отображения f множества F на $\mathrm{E} = \mathrm{F}/\mathrm{R}$ и будем говорить, что f_α есть *каноническое отображение* множества E_α в E. При $\alpha \leqslant \beta$ справедливо соотношение

$$f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha; \tag{3}$$

в самом деле, для всякого $x \in \mathrm{E}_\alpha$ справедливо $f_{\beta\beta}(f_{\beta\alpha}(x)) = f_{\beta\alpha}(x)$ ввиду (LI); следовательно, элементы $x \in \mathrm{E}_\alpha$ и $f_{\beta\alpha}(x) \in \mathrm{E}_\beta$ эквивалентны по модулю R, что доказывает (3).

Предложение 10. *Для всякого* $\alpha \in \mathrm{I}$ *пусть* g_α *есть такое отображение множества* E_α *в множество* E', *что соотношение* $\alpha \leqslant \beta$ *влечет* $g_\beta \circ f_{\beta\alpha} = g_\alpha$. *При этих условиях*:

1° *существует и единственно такое отображение* g *множества* $\mathrm{E} = \varinjlim \mathrm{E}_\alpha$ *в множество* E', *что* $g_\alpha = g \circ f_\alpha$ *для всякого* $\alpha \in \mathrm{I}$;

2° *для сюръективности* g *необходимо и достаточно, чтобы* E' *было объединением множеств* $g_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$;

3° *для инъективности* g *необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\alpha \in \mathrm{I}$ *соотношения* $x \in \mathrm{E}_\alpha$, $y \in \mathrm{E}_\alpha$, $g_\alpha(x) = g_\alpha(y)$ *влекли существование такого* $\beta \geqslant \alpha$, *для которого* $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$.

1° Пусть h — отображение множества F в E', совпадающее с g_α в каждом E_α (гл. II, § 4, предложение 8). Из предположения вытекает, что h совместимо с соотношением эквивалентности R (гл. II, § 6, п° 5); следовательно, существует и единственно такое отображение g множества $\mathrm{E} = \mathrm{F}/\mathrm{R}$ в E', что $h = g \circ f$ (см. там же).

2° Так как E — объединение множеств $f_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$, то соотношение $\mathrm{E}' = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{I}} g_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$, очевидно, является необходимым и достаточным для сюръективности g.

3° Если g инъективно, $x \in \mathrm{E}_\alpha$, $y \in \mathrm{E}_\alpha$ и $g_\alpha(x) = g_\alpha(y)$, то $f(x) = f(y)$; по определению соотношения R, существует такое $\beta \geqslant \alpha$, что $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$. Обратно, предположим, что сформулированное условие выполнено, и докажем, что g инъективно. В самом деле, пусть x, y — такие два элемента множества F, что $g(f(x)) = g(f(y))$, и пусть $x \in \mathrm{E}_\alpha$, $y \in \mathrm{E}_\beta$; существует такое $\gamma \in \mathrm{I}$, что $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$ и, следовательно, $f(x) = f(f_{\gamma\alpha}(x))$ и $f(y) = f(f_{\gamma\beta}(y))$. Если положить $x' = f_{\gamma\alpha}(x)$, $y' = f_{\gamma\beta}(y)$, то x' и y' будут принадлежать к E_γ и $g_\gamma x' = g_\gamma(y')$; по предположению, существует такое $\delta \geqslant \gamma$, что $f_{\delta\gamma}(x') = f_{\delta\gamma}(y')$, или, иначе говоря, $f(x') = f(y')$, а, следовательно, $f(x) = f(y)$.

Когда отображение g *биективно*, то иногда мы говорим, допуская вольность речи, что E' есть индуктивный предел семейства (E_α).

Замечание. Предположим, что каждое из отображений $f_{\beta\alpha}$ *инъективно*; тогда каждое из отображений f_α *инъективно* ввиду определения соотношения R. В таком случае обычно отождествляют E_α и $f_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$, рассматривая тем самым E как *объединение* множеств E_α. Обратно, если множество F есть объединение семейства $(\mathrm{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ таких частей, что соотношение $\alpha \leqslant \beta$ влечет $\mathrm{F}_\alpha \subset \mathrm{F}_\beta$, и если (для всякого $\alpha \leqslant \beta$) каноническая инъекция множества F_α в множество F_β обозначается символом $j_{\beta\alpha}$, то из предложения 10 вытекает, что F можно отождествить с индуктивным пределом семейства (F_α) для семейства отображений $(j_{\beta\alpha})$, а канонические отображения множества F_α в $\varinjlim \mathrm{F}_\alpha$ — с каноническими инъекциями множества F_α в F.

Пример. Пусть A и B — два непустых множества, $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{I}}$ — семейство частей множества A, у которого множество индексов I является фильтрующимся вправо и для которого справедливо, что соотношение $\alpha \leqslant \beta$ влечет $\mathrm{V}_\beta \subset \mathrm{V}_\alpha$. Обозначим через E_α множество отображений множества V_α в B; для каждой пары индексов α, β, такой, что $\alpha \leqslant \beta$, пусть $f_{\beta\alpha}$ есть отображение множества E_α в E_β, ставящее в соответствие каждой функции $u \in \mathrm{E}_\alpha$ ее *сужение* $f_{\beta\alpha}(u)$ на V_β. Непосредственно очевидно, что условие (LI) выполнено; говорят, что множество $E = \varinjlim \mathrm{E}_\alpha$ есть множество *ростков отображений* частей множества A в B, соответствующее семейству (V_α).° Чаще всего (V_α) есть семейство *окрестностей* некоторой части топологического пространства A.$_\circ$

Следствие 1. *Пусть* $(\mathrm{A}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ *и* $(\mathrm{B}_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ — *две индуктивные системы множеств относительно одного и того же множества индексов* I; *пусть* $\mathrm{A} = \varinjlim(\mathrm{A}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$, $\mathrm{B} = \varinjlim(\mathrm{B}_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$, *и для всякого* $\alpha \in \mathrm{I}$ *пусть* φ_α (соответственно ψ_α) *есть каноническое отображение множества* A_α *в* A (соответственно *множества* B_α *в* B). *Для всякого* $\alpha \in \mathrm{I}$ *пусть* g_α *есть отображение множества* A_α *в* B_α, *такое, что при* $\alpha \leqslant \beta$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}_\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & \mathrm{B}_\alpha \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\beta\alpha}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\beta\alpha}} \\ \mathrm{A}_\beta & \xrightarrow[g_\beta]{} & \mathrm{B}_\beta \end{array}$$

является „коммутативной“, т. е. имеет место $g_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha} = \psi_{\beta\alpha} \circ g_\alpha$. *При этих условиях существует такое единственное отображение* $g: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, *что для всякого* $\alpha \in \mathrm{I}$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}_\alpha & \xrightarrow{g_\alpha} & \mathrm{B}_\alpha \\ {\scriptstyle\varphi_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_\alpha} \\ \mathrm{A} & \xrightarrow[g]{} & \mathrm{B} \end{array}$$

коммутативна.

Положим $h_\alpha = \psi_\alpha \circ g_\alpha$. При $\alpha \leqslant \beta$ ввиду (3)

$$h_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ g_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_{\beta\alpha} \circ g_\alpha = \psi_\alpha \circ g_\alpha = h_\alpha.$$

Поэтому можно применить предложение 10 к отображениям h_α, откуда следует существование и единственность такого отображения $g: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, что

$$g \circ \varphi_\alpha = h_\alpha = \psi_\alpha \circ g_\alpha$$

для всякого $\alpha \in \mathrm{I}$.

Мы говорим, что семейство отображений $g_\alpha: \mathrm{A}_\alpha \to \mathrm{B}_\alpha$, удовлетворяющее условиям следствия 1, есть *индуктивная система отображений* индуктивной системы $(\mathrm{A}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ в индуктивную систему $(\mathrm{B}_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$; отображение g, определенное в следствии 1, называется *индуктивным пределом* семейства (g_α), и, когда можно не опасаться путаницы, употребляется обозначение $g = \varinjlim g_\alpha$.

Следствие 2. *Пусть* $(\mathrm{A}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$, $(\mathrm{B}_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$, $(\mathrm{C}_\alpha, \theta_{\beta\alpha})$ — *три индуктивные системы множеств относительно* I; *пусть* $\mathrm{A} = \varinjlim (\mathrm{A}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$, $\mathrm{B} = \varinjlim (\mathrm{B}_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$, $\mathrm{C} = \varinjlim (\mathrm{C}_\alpha, \theta_{\beta\alpha})$ *и пусть* φ_α (соответственно ψ_α, θ_α) *есть каноническое отображение множества* A_α (соответственно B_α, C_α) *в* A (соответственно B, C). *Если* $(u_\alpha): (\mathrm{A}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}) \to (\mathrm{B}_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ *и* $(v_\alpha): (\mathrm{B}_\alpha, \psi_{\beta\alpha}) \to (\mathrm{C}_\alpha, \theta_{\beta\alpha})$ *суть две индуктивные системы отображений, то семейство* $(v_\alpha \circ u_\alpha)$ *суть индуктивная система отображений множества* $(\mathrm{A}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ *в* $(\mathrm{C}_\alpha, \theta_{\beta\alpha})$, *и при этом*

$$\varinjlim (v_\alpha \circ u_\alpha) = (\varinjlim v_\alpha) \circ (\varinjlim u_\alpha). \qquad (4)$$

В самом деле, если положить $w_\alpha = v_\alpha \circ u_\alpha$, то при $\alpha \leqslant \beta$ $\theta_{\beta\alpha} \circ w_\alpha = (\theta_{\beta\alpha} \circ v_\alpha) \circ u_\alpha = (v_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}) \circ u_\alpha = v_\alpha \circ (u_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}) = w_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$, а это доказывает, что (w_α) есть индуктивная система отображений. Кроме того, если положить $u = \varinjlim u_\alpha$, $v = \varinjlim v_\alpha$, то для всякого $\alpha \in \mathrm{I}$

$$(v \circ u) \circ \varphi_\alpha = v \circ (\psi_\alpha \circ u_\alpha) = \theta_\alpha \circ (v_\alpha \circ u_\alpha)$$

и ввиду единственности индуктивного предела получаем $v \circ u = \varinjlim w_\alpha$.

Пусть J — *конфинальная* (п° 7) часть множества I; J есть фильтрующееся вправо упорядоченное множество, ибо при $\alpha \in \mathrm{J}$, $\beta \in \mathrm{J}$ существует такое $\gamma \in \mathrm{I}$, что $\alpha \leqslant \gamma$ и $\beta \leqslant \gamma$, и, кроме того, существует такое $\delta \in \mathrm{J}$, что $\gamma \leqslant \delta$. Ясно, что когда α и β пробегают подмножество J множества I, то отображения $f_{\beta\alpha}$ (при $\alpha \leqslant \beta$) удовлетворяют условию (LI); обозначим через E′ индуктивный предел семейства $(\mathrm{E}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{J}}$ относительно этих отображений $f_{\beta\alpha}$. Определим *биекцию* (называемую *канонической*) множества E′ на E (что позволит отождествить E и E′). Множество E′ есть фактормножество F′/R′ суммы F′ семейства $(\mathrm{E}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{J}}$; F′ можно отождествить с объединением частей E_α множества $\mathrm{F}\,(\alpha \in \mathrm{J})$. Обозначим через j каноническую инъекцию множества F′ в F и для всякого $\alpha \in \mathrm{J}$ обозначим через g_α каноническое отображение из E_α в E. Непосредственно очевидно, что при $\alpha \in \mathrm{J}$, $\beta \in \mathrm{J}$ и $\alpha \leqslant \beta$ имеет место $g_\beta \circ f_{\beta\alpha} = g_\alpha$; предложение 10 показывает тогда, что существует отображение g множества E′ в E, такое, что если обозначить через f' каноническое отображение множества F′ на E′, то $g(f'(x)) = f(j(x))$ для всякого $x \in \mathrm{F}'$. Предложение 10 сразу же показывает, что g инъективно; для того чтобы доказать сюръективность g, заметим, что для всякого $\alpha \in \mathrm{J}$ $g_\alpha(\mathrm{E}_\alpha) = f(\mathrm{E}_\alpha)$. Но для всякого $\beta \in \mathrm{I}$ существует такое $\gamma \in \mathrm{J}$, что $\beta \leqslant \gamma$, откуда мы заключаем, что $f(\mathrm{E}_\gamma) \supset f(f_{\gamma\beta}(\mathrm{E}_\beta)) = f(\mathrm{E}_\beta)$; следовательно, E действительно есть объединение множеств $g_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$, где α пробегает J.

Предложение 11. *Пусть* $(\mathrm{A}_\alpha^{(i)}, \varphi_{\beta\alpha}^{(i)})$ $(i = 1, 2)$ *суть две индуктивные системы множеств относительно одного и того же множества индексов* I. *Пусть* $\mathrm{A}^{(i)} = \varinjlim (\mathrm{A}_\alpha^{(i)}, \varphi_{\beta\alpha}^{(i)})$. *Обозначим через* $\varphi_\alpha^{(i)}$ *каноническое отображение множества* $\mathrm{A}_\alpha^{(i)}$ *в* $\mathrm{A}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. *Положим* $\mathrm{A}_\alpha = \mathrm{A}_\alpha^{(1)} \times \mathrm{A}_\alpha^{(2)}$, $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta\alpha}^{(1)} \times \varphi_{\beta\alpha}^{(2)}$; *семейство* $(\mathrm{A}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ *является тогда индуктивной системой множеств. Пусть* $\mathrm{A} = \varinjlim (\mathrm{A}_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ *и пусть* φ_α — *каноническое отображение множества* A_α *в* A. *Наконец, пусть* $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{(1)} \times \mathrm{A}^{(2)}$ *и* $\psi_\alpha = \varphi_\alpha^{(1)} \times \varphi_\alpha^{(2)}$; *тогда существует и единственная биекция* $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ (*называемая канонической*), *такая, что* $f \circ \varphi_\alpha = \psi_\alpha$ *для всякого* $\alpha \in \mathrm{I}$.

Иными словами, f позволяет отождествить произведение B индуктивных пределов $\mathrm{A}^{(1)}$, $\mathrm{A}^{(2)}$ с индуктивным пределом A произведений A_α.

Нетрудно видеть, что условие (LI) выполнено для $\varphi_{\beta\alpha}$; кроме того, для $\alpha \leqslant \beta$ справедливо $\psi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha} = \psi_\alpha$. Согласно предложению 10, существует поэтому такое единственное отображение $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, что $f \circ \varphi_\alpha = \psi_\alpha$ для всякого $\alpha \in \mathrm{I}$. Покажем, что f биективно. Для этого определим такое отображение $g: \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, чтобы $g \circ f$ было тождественным отображением множества A и $f \circ g$ — тождественным отображением множества B (гл. II, § 3, следствие предложения 8).

Пусть $x=(x^{(1)}, x^{(2)})\in B$; так как I — фильтрующееся множество, то существует такое $\alpha\in I$ и такие $x_\alpha^{(i)}\in A_\alpha^{(i)}$, что $\varphi_\alpha^{(i)}(x_\alpha^{(i)})=x^{(i)}$ для $i=1, 2$. Пусть $x_\alpha=(x_\alpha^{(1)}=(x_\alpha^{(1)}, x_\alpha^{(2)})\in A_\alpha)$. Тогда образ $\varphi_\alpha(x_\alpha)\in A$ зависит лишь от элемента x, но не от выбора элементов $x_\alpha^{(i)}$. В самом деле, пусть $\beta\in I$ и $x_\beta^{(i)}\in A_\beta^{(i)}$ таковы, что $\varphi_\beta^{(i)}(x_\beta^{(i)})=x^{(i)}$ $(i=1, 2)$. В I существуют такие γ_1, γ_2, что $\gamma_i\geqslant\alpha$, $\gamma_i\geqslant\beta$ и $\varphi_{\gamma_i\beta}^{(i)}(x_\beta^{(i)})=\varphi_{\gamma_i\alpha}^{(i)}(x_\alpha^{(i)})$ $(i=1, 2)$. Пусть $\delta\in I$ таково, что $\delta\geqslant\gamma_1$, $\delta\geqslant\gamma_2$; тогда

$$\varphi_{\delta\gamma_i}^{(i)}(\varphi_{\gamma_i\beta}^{(i)}(x_\beta^{(i)}))=\varphi_{\delta\gamma_i}^{(i)}(\varphi_{\gamma_i\alpha}^{(i)}(x_\alpha^{(i)})).$$

Иными словами, $\varphi_{\delta\beta}^{(i)}(x_\beta^{(i)})=\varphi_{\delta\alpha}^{(i)}(x_\alpha^{(i)})$ для $i=1, 2$. Отсюда по определению следует, что $\varphi_{\delta\beta}(x_\beta)=\varphi_{\delta\alpha}(x_\alpha)$; следовательно, $\varphi_\beta(x_\beta)=\varphi_\alpha(x_\alpha)$. Если положить $g(x)=\varphi_\alpha(x_\alpha)$, то легко убедиться, что g отвечает на вопрос, а это завершает доказательство.

Замечания. °1) Предложение 11 нетрудно распространить на произведение любого *конечного* числа индуктивных пределов.$_\circ$

2) Определения и результаты нз настоящего п° 11 нетрудно распространить на случай, когда предполагается лишь, что I есть фильтрующееся вправо предупорядоченное множество (п° 10).

12. Отображения: II. Проективные пределы

Пусть I — фильтрующееся вправо упорядоченное множество, $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ — семейство множеств, множеством индексов которого служит I. Для всякой пары (α, β) индексов из I, таких, что $\alpha\leqslant\beta$, пусть $f_{\alpha\beta}$ есть отображение *множества* E_β в *множество* E_α. Предполагается, что отображения $f_{\alpha\beta}$ удовлетворяют следующему условию (LP):

(LP) *Соотношения* $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ влекут $f_{\alpha\gamma}=f_{\alpha\beta}\circ f_{\beta\gamma}$.

Пусть $G=\prod_{\alpha\in I}E_\alpha$ — *произведение* семейства множеств $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$; обозначим через E часть множества G, образованную элементами x, удовлетворяющими *каждому* из соотношений

$$\mathrm{pr}_\alpha x=f_{\alpha\beta}(\mathrm{pr}_\beta x) \qquad (5)$$

для всякой пары таких индексов (α, β), что $\alpha\leqslant\beta$. Мы говорим, что E есть *проективный предел семейства* $(E_\alpha)_{\alpha\in I}$ *для семейства отображений* $(f_{\alpha\beta})$, и пишем $E=\varprojlim(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ или просто $E=\varprojlim E_\alpha$, если не возникает путаницы. Допуская вольность речи, мы будем говорить также, что пара $((E_\alpha), (f_{\alpha\beta}))$ (обозначаемая также через $(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$) есть *проективная система множеств* относительно множества индексов I. Мы говорим, что сужение f_α на E проекции pr_α есть *каноническое отображение* множества E в множество E_α; справедливо соотношение

$$f_\alpha=f_{\alpha\beta}\circ f_\beta \qquad (6)$$

для $\alpha\leqslant\beta$, что представляет собой лишь другую форму условий (5), определяющих E.

Заметим, что множество E может быть *пустым*, даже когда множества E_α непусты и каждое из отображений $f_{\alpha\beta}$ сюръективно (упражнение 32).

Предложение 12. *Для всякого* $\alpha\in I$ *пусть* g_α *есть такое отображение множества* E′ *в* E_α, *что соотношение* $\alpha\leqslant\beta$ *влечет* $f_{\alpha\beta}\circ g_\beta=g_\alpha$. *В этих условиях*:

1° *существует и единственно такое отображение* g множества E′ *в* E, что $g_\alpha=f_\alpha\circ g$ *для всякого* $\alpha\in I$;

2° *для инъективности* g *необходимо и достаточно, чтобы для всякой пары различных элементов* x', y' *из* E′ *существовало такое* $\alpha\in I$, *что* $g_\alpha(x')\neq g_\alpha(y')$.

В самом деле, соотношение $g_\alpha=f_\alpha\circ g$ означает, что для всякого $x'\in E'$ справедливо $\mathrm{pr}_\alpha(g(x'))=g_\alpha(x')$; следовательно, элемент $g(x')\in\prod_{\alpha\in I}E_\alpha$ однозначно определяется соотношением $g(x')=(g_\alpha(x'))_{\alpha\in I}$. Остается доказать, что $g(x')\in E$, или, иными словами, что

$$\mathrm{pr}_\alpha(g(x'))=f_{\alpha\beta}(\mathrm{pr}_\beta(g(x')))$$

при $\alpha\leqslant\beta$; но это допускает запись $g_\alpha(x')=f_{\alpha\beta}(g_\beta(x'))$ и вытекает из предположений. Вторая часть предложения сразу же вытекает из определений.

Пример. ° Пусть $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ — семейство множеств, I — множество конечных частей множества L, упорядоченное включением; I является фильтрующимся по отношению к $\subset$. Для всякой конечной части J множества L пусть $E_J=\prod_{\lambda\in J}F_\lambda$; если J, K — две конечные части множества L, такие, что $J\subset K$, пусть f_{JK} есть проекция из E_K на E_J; непосредственно очевидно, что эти f_{JK} удовлетворяют условию (LP). Пусть E — проективный предел семейства (E_J) для семейства отображений (f_{JK}); определим *биекцию* g произведения $F=\prod_{\lambda\in L}F_\lambda$ на множество E. Для всякой конечной части J множества L пусть g_J есть проекция множества F на E_J; непосредственно очевидно, что $f_{JK}\circ g_K=g_J$ при $J\subset K$, откуда g определяется применением предложения 12. Инъективность отображения g очевидна; чтобы доказать сюръективность этого отображения, рассмотрим некоторый элемент $y=(y_J)$ из E; для всякого $\lambda\in L$ и всякой конечной части J множества L, содержащей λ, элемент $\mathrm{pr}_\lambda(y_J)$ не зависит от рассматриваемой части J (содержащей λ), так как по предположению $f_{JK}(y_K)=y_J$ при $J\subset K$. Обозначим этот элемент через x_λ и положим $x=(x_\lambda)_{\lambda\in L}$; для всякой конечной части J множества L по определению $g_J(x)=(x_\lambda)_{\lambda\in J}=y_J$, откуда и вытекает наше утверждение. Допуская вольность речи, часто

отождествляют произведение F с проективным пределом произведений F_J.

Аналогичное рассуждение применимо ко всякому фильтрующемуся множеству частей множества L, объединение которых есть все множество L.

Следствие 1. *Пусть* $(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ *и* $(B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ — *две проективные системы множеств относительно одного и того же множества индексов* I; *пусть* $A = \varprojlim (A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$, $B = \varprojlim (B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$, *и для всякого* $\alpha \in I$ *пусть* φ_α (соответственно ψ_α) *есть каноническое отображение множества* A *в множество* A_α (соответственно *множества* B *в множество* B_α). *Для всякого* $\alpha \in I$ *пусть* g_α *есть такое отображение множества* A_α *в множество* B_α, *что при* $\alpha \leqslant \beta$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} A_\beta & \xrightarrow{g_\beta} & B_\beta \\ {\scriptstyle\varphi_{\alpha\beta}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_{\alpha\beta}} \\ A_\alpha & \xrightarrow[g_\alpha]{} & B_\alpha \end{array}$$

коммутативна. Тогда существует и единственно такое отображение $g: A \to B$, *что для всякого* $\alpha \in I$ *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle\varphi_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_\alpha} \\ A_\alpha & \xrightarrow[g_\alpha]{} & B_\alpha \end{array}$$

коммутативна.

Положим $h_\alpha = g_\alpha \circ \varphi_\alpha$. При $\alpha \leqslant \beta$ ввиду (6)

$$\psi_{\alpha\beta} \circ h_\beta = \psi_{\alpha\beta} \circ g_\beta \circ \varphi_\beta = g_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_\beta = g_\alpha \circ \varphi_\alpha = h_\alpha,$$

и можно применить предложение 12 к отображениям h_α; отсюда и вытекает существование и единственность такого отображения $g: A \to B$, что

$$\psi_\alpha \circ g = h_\alpha = g_\alpha \circ \varphi_\alpha$$

для всякого $\alpha \in I$.

Мы говорим, что семейство отображений $g_\alpha: A_\alpha \to B_\alpha$, удовлетворяющее условиям следствия 1, есть *проективная система отображений* из $(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ в $(B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$; отображение g, определенное в следствии 1, называется *проективным пределом* семейства (g_α) и обозначается через $g = \varprojlim g_\alpha$, когда можно не опасаться путаницы.

Следствие 2. *Пусть* $(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$, $(B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$, $(C_\alpha, \theta_{\alpha\beta})$ *суть три проективные системы множеств относительно* I; *пусть* $A = \varprojlim (A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$, $B = \varprojlim (B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$, $C = \varprojlim (C_\alpha, \theta_{\alpha\beta})$ *и пусть* φ_α (соответственно ψ_α, θ_α) *есть каноническое отображение множества* A (соответственно B, C) в A_α (соответственно B_α, C_α). *Если* $(u_\alpha): (A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}) \to (B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ *и* $(v_\alpha): (B_\alpha, \psi_{\alpha\beta}) \to (C_\alpha, \theta_{\alpha\beta})$ *суть две проективные системы отображений, тогда семейство* $(v_\alpha \circ u_\alpha)$ *есть проективная система отображений системы множеств* $(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ *в систему* $(C_\alpha, \theta_{\alpha\beta})$, *и при этом*

$$\varprojlim (v_\alpha \circ u_\alpha) = (\varprojlim v_\alpha) \circ (\varprojlim u_\alpha). \qquad (7)$$

В самом деле, если положить $w_\alpha = v_\alpha \circ u_\alpha$, то при $\alpha \leqslant \beta$

$$w_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta} = v_\alpha \circ (u_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}) = v_\alpha \circ (\psi_{\alpha\beta} \circ u_\beta) = (\theta_{\alpha\beta} \circ v_\beta) \circ u_\beta = \theta_{\alpha\beta} \circ w_\beta,$$

а это доказывает, что (w_α) есть проективная система отображений. Кроме того, если положить $u = \varprojlim u_\alpha$, $v = \varprojlim v_\alpha$, то для всякого $\alpha \in I$

$$\theta_\alpha \circ (v \circ u) = (v_\alpha \circ \psi_\alpha) \circ u = (v_\alpha \circ u_\alpha) \circ \varphi_\alpha$$

и ввиду единственности проективного предела $v \circ u = \varprojlim w_\alpha$.

Пусть J — *конфинальная* часть (n° 7) множества I; когда α и β пробегают подмножество J в I, отображения $f_{\alpha\beta}$ (при $\alpha \leqslant \beta$) удовлетворяют условию (LP); обозначим через E′ проективный предел семейства $(E_\alpha)_{\alpha \in J}$ относительно этих отображений $f_{\alpha\beta}$. Определим *биекцию* (называемую *канонической*) множества E на множество E′, что позволит отождествить эти два множества. В самом деле, пусть g — такое отображение множества E в E′, что $g(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$ для всякого $x \in E$. Покажем сначала, что g инъективно; если x и y суть различные элементы из E, то существует такое $\alpha \in I$, что $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$; так как J конфинально в I, то существует такое $\beta \in J$, что $\alpha \leqslant \beta$; так как $f_{\alpha\beta}(f_\beta(x)) \neq f_{\alpha\beta}(f_\beta(y))$ ввиду (6), то $f_\beta(x) \neq f_\beta(y)$ и, следовательно, $g(x) \neq g(y)$. Остается убедиться, что g сюръективно. Пусть $x'(x'_\alpha)_{\alpha \in J}$ — элемент из E′. Для всякого $\beta \in I$ существует такое $\lambda \in J$, что $\beta \leqslant \lambda$; покажем, что элемент $f_{\beta\lambda}(x'_\lambda)$ не зависит от индекса $\lambda \in J$, такого, что $\beta \leqslant \lambda$. В самом деле, если индекс $\mu \in J$ таков, что $\beta \leqslant \mu$, то существует такое $\nu \in J$, что $\lambda \leqslant \nu$ и $\mu \leqslant \nu$; следовательно, в силу (LP) справедливо $f_{\beta\nu}(x'_\nu) = f_{\beta\lambda}(f_{\lambda\nu}(x'_\nu)) = f_{\beta\lambda}(x'_\lambda)$, и аналогично $f_{\beta\nu}(x'_\nu) = f_{\beta\mu}(x'_\mu)$, откуда и вытекает наше утверждение. Пусть x_β — общее значение отображений $f_{\beta\lambda}(x'_\lambda)$ для таких $\lambda \in J$, что $\beta \leqslant \lambda$; положим $x = (x_\beta)_{\beta \in I}$. Элемент x принадлежит к E, ибо если $\alpha \leqslant \beta$ и если $\lambda \in J$таково, что $\beta \leqslant \lambda$, то, согласно (LP), $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = f_{\alpha\beta}(f_{\beta\lambda}(x'_\lambda)) = f_{\alpha\lambda}(x'_\lambda) = x_\alpha$. Наконец, $x'_\alpha = f_{\alpha\alpha}(x'_\alpha)$ для всякого $\alpha \in J$; следовательно, $x_\alpha = x'_\alpha$ для всякого $\alpha \in J$. Иными словами, $f_\alpha(x) = x'_\alpha$, откуда $g(x) = x'$, а это и завершает доказательство.

Замечание. Определения и результаты настоящего n° 12 нетрудно распространить на случай, когда предполагается лишь, что I есть фильтрующееся вправо *предупорядоченное* множество.

13. Сетчатые множества

Определение 8. *Говорят, что упорядоченное множество* E *является сетчатым* (или что E есть *упорядоченная сеть* или *решетка*)[1], *если всякая двухэлементная часть от* E *имеет верхнюю и нижнюю грани в* E.

Всякое произведение сетчатых множеств есть сетчатое множество, как это сразу же вытекает из условия существования верхней грани в произведении упорядоченных множеств (предложение 7). Множество всех частей любого множества A, упорядоченное включением, есть сетчатое множество, так как объединение и пересечение двух частей множества A снова есть часть множества A.

Примеры. °1) Множество целых чисел $\geqslant 1$, упорядоченное соотношением „m есть делитель для n" между m и n, является сетчатым множеством. Верхняя (соответственно нижняя) грань множества $\{m, n\}$ есть не что иное, как н. о. к. (соответственно н. о. д.) чисел m и n („Алгебра", гл. VII, § 1).

2) Множество подгрупп любой группы G, упорядоченное включением, является сетчатым множеством („Алгебра", гл. I, § 6).

3) Множество топологии на любом множестве A, упорядоченное соотношением „топология $\mathcal{T}$ мажорируется топологией $\mathcal{T}'$" между $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$, является сетчатым множеством („Общая топология", гл. I, § 2).

4) Множество $\mathcal{F}(\mathrm{I}, \mathbf{R})$ числовых функций, определенных в интервале I множества $\mathbf{R}$, является сетчатым для соотношения порядка $f \leqslant g$ (n° 4), для которого оно изоморфно произведению $\mathbf{R}^{\mathrm{I}}$ (см. „Интегрирование", гл. II).$_\circ$

Замечание. Сетчатое упорядоченное множество является, очевидно, фильтрующимся влево и вправо. Но множество, фильтрующееся влево и вправо, не обязательно является сетчатым, °как показывает пример множества отображений $x \to p(x)$ множества $\mathbf{R}$ в себя, где p — многочлен из $\mathbf{R}[X]$, если это множество упорядочено соотношением $p \leqslant q$ (n° 4).$_\circ$

14. Совершенно упорядоченные множества

Определение 9. *Говорят, что два элемента x, y упорядоченного множества* E *сравнимы, если справедливо соотношение* „$x \leqslant y$ *или* $y \leqslant x$". *Говорят, что множество* E *совершенно упорядочено, если оно упорядочено и любые два его элемента сравнимы. Тогда говорят, что порядок на* E *есть совершенный порядок и что соответствующее соотношение порядка есть соотношение совершенного порядка*[2].

[1]) Относительно терминологии см. также подстрочное примечание[2]) к n° 8 § 6 сводки результатов (стр. 387). — *Прим. ред.*

[2]) Относительно терминологии см. также подстрочное примечание к n° 4 § 6 сводки результатов (стр. 385). — *Прим. ред.*

Если x и y — элементы совершенно упорядоченного множества E, то $x = y$, или $x < y$, или $x > y$; отрицание для $x \leqslant y$ есть тогда $x > y$.

Для того чтобы порядок на E был совершенным порядком, необходимо и достаточно, чтобы его график G, кроме соотношений $G \circ G = G$ и $G \cap \overset{-1}{G} = \Delta$, удовлетворял также соотношению $G \cup \overset{-1}{G} = E \times E$.

Примеры. 1) Всякая часть совершенно упорядоченного множества совершенно упорядочена индуцированным порядком.

2) Пусть E — произвольное упорядоченное множество. Пустая часть множества E совершенно упорядочена, так же как и всякая одноэлементная часть.

3) °Множество $\mathbf{R}$ действительных чисел совершенно упорядочено$_\circ$.

4) Если A — множество, содержащее хотя бы два различных элемента, то множество $\mathfrak{P}(A)$, упорядоченное включением, не является совершенно упорядоченным, ибо при $x \neq y$ части $\{x\}$ и $\{y\}$ несравнимы.

Совершенно упорядоченное множество совершенно упорядочено также и для противоположного порядка; оно является сетчатым и тем более является фильтрующимся вправо и влево.

Предложение 13. *Всякое строго монотонное отображение f совершенно упорядоченного множества* E *в упорядоченное множество* F *инъективно; если f — строго возрастающее отображение, то f есть изоморфизм множества* E *на* $f(E)$.

В самом деле, $x \neq y$ влечет $x < y$ или $x > y$, а следовательно, и $f(x) < f(y)$ или $f(x) > f(y)$, так что в любом случае $f(x) \neq f(y)$. Остается показать, что если f — строго возрастающее отображение, то $f(x) \leqslant f(y)$ влечет $x \leqslant y$; но в противном случае было бы $x > y$, откуда $f(x) > f(y)$.

Предложение 14. *Пусть* E — *совершенно упорядоченное множество, а* X — *часть множества* E. *Для того чтобы элемент $b \in E$ был верхней гранью для* X *в* E, *необходимо и достаточно, чтобы:* 1° *b был мажорантой для* X; 2° *для всякого $c \in E$, такого, что $c < b$, существовал такой $x \in X$, что $c < x \leqslant b$.*

В самом деле, второе условие выражает то обстоятельство, что ни один элемент $c < b$ не является мажорантой для X, т. е. что b есть минимальный элемент множества M мажорант для X; но это значит, что b есть наименьший элемент в M, поскольку M совершенно упорядочено (предложение 9).

15. Интервалы

Пусть E — упорядоченное множество, a и b — такие два элемента из E, что $a \leqslant b$. *Замкнутым интервалом с началом a и концом b* называется и через $[a, b]$ обозначается часть множества E, образованная такими элементами x, что $a \leqslant x \leqslant b$; *полуоткрытым справа* (соответственно *слева*) *интервалом с началом a и концом b* называется и через $[a, b[$ (соответственно через $]a, b]$)

обозначается множество таких $x \in E$, что $a \leqslant x < b$ (соответственно $a < x \leqslant b$); *открытым интервалом с началом a и концом b* называется и через $]a, b[$ обозначается множество таких $x \in E$, что $a < x < b$.

Заметим, что замкнутый интервал никогда не пуст; интервал $[a, a]$ есть множество, состоящее из единственного элемента a. Напротив, интервалы $[a, a[$, $]a, a]$ и $]a, a[$ пусты; открытый интервал $]a, b[$ может быть пустым даже при $a < b$.

Пусть a — элемент из E. Множество таких $x \in E$, что $x \leqslant a$ (соответственно $x < a$), называется *безграничным слева замкнутым* (соответственно *открытым*) *интервалом с концом a* и обозначается через $]\leftarrow, a]$ (соответственно $]\leftarrow, a[$); множество таких $x \in E$, что $x \geqslant a$ (соответственно $x > a$), называется *безграничным справа замкнутым* (соответственно *открытым*) *интервалом с началом a* и обозначается через $[a, \rightarrow[$ (соответственно $]a, \rightarrow[$). Наконец, само множество E называется *безграничным с обеих сторон* (или *в обоих направлениях*) *открытым интервалом* и обозначается через $]\leftarrow, \rightarrow[$.

Предложение 15. *В сетчатом множестве пересечение двух интервалов есть интервал.*

Рассмотрим, например, пересечение двух замкнутых интервалов $[a, b]$ и $[c, d]$ и положим $\alpha = \sup(a, c)$, $\beta = \inf(b, d)$. Если одновременно имеет место $a \leqslant x \leqslant b$ и $c \leqslant x \leqslant d$, то отсюда вытекает $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, и обратно; если $\alpha \leqslant \beta$ не имеет места, то пересечение интервалов $[a, b]$ и $[c, d]$ пусто; если $\alpha \leqslant \beta$, то это пересечение есть $[\alpha, \beta]$. Мы предоставляем читателю труд провести доказательство в остальных случаях.

Упражнения

1) Пусть E — упорядоченное множество, в котором существует хотя бы одна пара различных сравнимых элементов. Показать, что соотношение „$x \in E$ и $x \in E$ и $x < y$“, обозначаемое через R$\{x, y\}$, удовлетворяет первым двум условиям из n° 1, но не третьему.

2) а) Пусть E — упорядоченное множество, S$\{x, y\}$ — соотношение эквивалентности в E. Обозначим через R$\{X, Y\}$ соотношение „$X \in E/S$ и $Y \in E/S$ и, каково бы ни было $x \in X$, существует такое $y \in Y$, что $x \leqslant y$“. Для того чтобы R$\{X, Y\}$ было соотношением порядка в E/S, достаточно, чтобы S$\{x, y\}$ удовлетворяло следующему условию: соотношения $x \leqslant y \leqslant z$ и $x \equiv z \pmod S$ влекут $x \equiv y \pmod S$. Соотношение порядка R$\{X, Y\}$ в E/S называется тогда *факторсоотношением* соотношения $x \leqslant y$ по S, и фактормножество E/S, наделенное этим соотношением порядка, называется (с допущением вольности речи; ср. гл. IV, § 2, n° 6) упорядоченным *фактормножеством* множества E по S.

б) Пусть φ — каноническое отображение множества E на E/S. Показать, что если R$\{X, Y\}$ — соотношение порядка в E/S, то всякое отображение g множества E/S в упорядоченное множество F, что $g \circ \varphi$ является возрастающим, является возрастающим отображением множества E/S в F. Для того чтобы φ было возрастающим, необходимо и достаточно, чтобы, кроме того, S удовлетворяло следующему условию: соотношения $x \leqslant y$ и $x \equiv x' \pmod S$ влекут существование такого y', что $y \equiv y' \pmod S$ и $x' \leqslant y'$. В этом случае мы говорим, что соотношение эквивалентности S является *слабо совместимым* (по x и y) с соотношением порядка $x \leqslant y$. Всякое соотношение порядка S, совместимое (по x) с соотношением порядка $x \leqslant y$ (гл. II, § 6, n° 3), тем более является слабо совместимым (по x и y) с этим соотношением.

в) Пусть E_1, E_2 — два упорядоченных множества. Показать, что если S_1 — соотношение эквивалентности $\mathrm{pr}_1 z = \mathrm{pr}_1 z'$ в $E_1 \times E_2$, то S_1 слабо совместимо по z и t с произведением соотношений порядка — соотношением порядка $z \leqslant t$ на $E_1 \times E_2$ (но, вообще говоря, несовместимо с этим соотношением ни по z, ни по t); кроме того, если φ_1 — каноническое отображение множества $E_1 \times E_2$ на $(E_1 \times E_2)/S_1$, а $\mathrm{pr}_1 = f_1 \circ \varphi_1$ — каноническое разложение отображения pr_1 по соотношению эквивалентности S_1, показать, что f_1 — изоморфизм множества $(E_1 \times E_2)/S_1$ на E_1.

г) Пусть f — возрастающее отображение множества E в упорядоченное множество F и S — соотношение эквивалентности $f(x) = f(y)$ в E. Показать, что условие а) выполняется. Для того чтобы S было слабо совместимым с $x \leqslant y$, необходимо и достаточно, чтобы соотношения $x \leqslant y$ и $f(x) = f(x')$ влекли существование такого y', что $x' \leqslant y'$ и $f(y) = f(y')$. Пусть $f = g \circ \varphi$ — каноническое разложение отображения f; для того чтобы g было изоморфизмом из E/S на $f(E)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось предыдущее условие и, кроме того, чтобы соотношение $f(x) \leqslant f(y)$ влекло существование таких x', y', что $f(x) = f(x')$, $f(y) = f(y')$ и $x' \leqslant y'$.

3) Пусть I — упорядоченное множество, $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство непустых упорядоченных множеств с множеством индексов I.

а) Пусть F — множество, являющееся *суммой* (гл. II, § 4, n° 8) семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ и для всякого $x \in F$ пусть $\lambda(x)$ есть такой индекс $\iota \in I$, что $x \in E_\iota$; пусть G — график, образованный парами $(x, y) \in F \times F$, обладающими следующим свойством: либо $\lambda(x) < \lambda(y)$, либо $\lambda(x) = \lambda(y)$ и $x \leqslant y$ в $E_{\lambda(x)}$. Показать, что G есть график порядка на F; множество F, наделенное этим порядком, называется *ординальной суммой* семейства $(E_\iota)_{\iota \in I}$ и обозначается символом $\sum_{\iota \in I} E_\iota$. Показать, что отношение эквивалентности, соответствующее разбиению $(E_\iota)_{\iota \in I}$ множества F слабо совместимо с соотношением порядка на F и что упорядоченное фактормножество (упр. 2) изоморфно с I.

б) Если множество I есть ординальная сумма упорядоченных множеств $(J_\lambda)_{\lambda \in I}$, где L упорядочено, показать, что упорядоченное множество $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ канонически изоморфно ординальной сумме $\sum_{\lambda \in L} F_\lambda$, где $F_\lambda = \sum_{\iota \subset J_\lambda} E_\iota$ („ассоциативность“ ординальной суммы). Когда I есть совершенно упорядоченное множество $\{1, 2\}$, ординальная сумма множеств E_1 и E_2 записывается также в виде $E_1 + E_2$; показать, что, вообще говоря, $E_1 + E_2$ и $E_2 + E_1$ не изоморфны.

в) Для того чтобы ординальная сумма $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ была фильтрующимся вправо (соответственно совершенно упорядоченным) множеством, достаточно, чтобы I и каждое из E_ι были фильтрующимися вправо (соответственно совершенно упорядоченными). Для того чтобы $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ было сетчатым множеством, достаточно, чтобы I и каждое из E_ι были сетчатыми и, кроме того, чтобы для всякого $\alpha \in I$, для которого существуют

два таких различных индекса β, γ, что $\alpha = \sup(\beta, \gamma)$ (соответственно $\alpha = \inf(\beta, \gamma)$), E_α обладало наименьшим (соответственно наибольшим) элементом.

¶ 4) Пусть E — упорядоченное множество и пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — его разбиение, образованное связными компонентами множества E (гл. II, § 6, упражнение 10) для рефлексивного и симметричного соотношения „$x = y$ или x и y несравнимы".

а) Показать, что если $\iota \neq \varkappa$, $x \in E_\iota$ и $y \in E_\varkappa$, то x и y сравнимы, и что если $y' \in E_\varkappa$, $y' \neq y$ и (например) $x \leqslant y$, то $x \leqslant y'$ (учесть, что не существует разбиения множества $E_\varkappa$ на два таких множества A, B, чтобы всякий элемент из A был сравним со всяким элементом из B).

б) Вывести из а), что соотношение эквивалентности S, соответствующее разбиению (E_ι) множества E, совместимо с соотношением порядка $x \leqslant y$ в E и что упорядоченное фактормножество E/S (упражнение 2) совершенно упорядочено.

в) Каковы связные компоненты E_ι упорядоченного множества $E = F \times G$, являющегося произведением двух совершенно упорядоченных множеств?

5) Пусть E — упорядоченное множество, а $\mathfrak{F}$ — множество *свободных* частей X множества E, т. е. таких частей X, что любые два различных элемента из X несравнимы. Показать, что в $\mathfrak{F}$ соотношение „каково бы ни было $x \in X$, существует такое $y \in Y$, что $x \leqslant y$" есть соотношение порядка между X и Y; оно обозначается через $X \leqslant Y$. Отображение $x \to \{x\}$ есть изоморфизм множества E на часть упорядоченного множества $\mathfrak{F}$. Если $X \subset Y$ ($X \in \mathfrak{F}$, $Y \in \mathfrak{F}$), показать, что $X \leqslant Y$. Для того чтобы $\mathfrak{F}$ было совершенно упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы E было совершенно упорядоченным, и тогда $\mathfrak{F}$ изоморфно с E.

6) Пусть E и F — два упорядоченных множества и пусть $\mathcal{A}(E, F)$ — подмножество упорядоченного множества-произведения F^E, образованное *возрастающими* отображениями множества E в F.

а) Показать, что упорядоченное множество $\mathcal{A}(E, F \times G)$ изоморфно с $\mathcal{A}(E, F) \times \mathcal{A}(E, G)$.

б) Показать, что упорядоченное множество $\mathcal{A}(E \times F, G)$ изоморфно упорядоченному множеству $\mathcal{A}(E, \mathcal{A}(F, G))$.

в) Для того чтобы $\mathcal{A}(E, F)$ было сетчатым, необходимо и достаточно, чтобы F было сетчатым.

г) Показать, что $\mathcal{A}(E, F)$ может быть совершенно упорядоченным лишь в тех случаях, когда F состоит из единственного элемента, или же когда E совершенно упорядоченно, а F есть совершенно упорядоченное множество из двух элементов, или, наконец, E состоит из единственного элемента, а F совершенно упорядоченно.

7) Для того чтобы всякое такое отображение f упорядоченного множества E в упорядоченное множество F, состоящее не менее чем из двух элементов, которое является сразу возрастающим и убывающим, было постоянным, необходимо и достаточно, чтобы E было связной компонентой для рефлексивного и симметрического соотношения „x и y сравнимы" (гл. II, § 6, упражнение 10); в частности, это условие выполняется, когда E является фильтрующимся вправо и влево.

8) Пусть E и F — два упорядоченных множества, f — возрастающее отображение множества E в F, g — возрастающее отображение множества F в E. Пусть A (соответственно B) — множество таких $x \in E$ (соответственно $y \in F$), что $g(f(x)) = x$ (соответственно $f(g(y)) = y$). Показать, что упорядоченные множества A и B изоморфны.

9) В сетчатом множестве E доказать соотношения:

$$\sup_j \left(\inf_i x_{ij}\right) \leqslant \inf_i \left(\sup_j x_{ij}\right),$$

для всякого конечного двойного семейства (x_{ij})

$$\sup(\inf(x, z), \inf(y, t)) \leqslant \inf(\sup(x, y), \sup(z, t)).$$

10) Пусть E и F — два сетчатых множества. Показать, что если f — такое отображение множества E в множество F, что

$$f(\inf(x, y)) = \inf(f(x), f(y)),$$

то f является возрастающим. °Дать пример возрастающего отображения множества-произведения $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$, не удовлетворяющего предыдущему условию.$_0$

11) Мы говорим, что сетчатое множество E является *полным*, если всякая часть множества E допускает верхнюю и нижнюю грани в E.

а) Показать, что если упорядоченное множество E таково, что всякая часть множества E допускает верхнюю грань в E, то E есть полное сетчатое множество.

б) Для того чтобы произведение упорядоченных множеств было полным сетчатым множеством, необходимо и достаточно, чтобы каждый сомножитель был полным сетчатым множеством.

в) Для того чтобы ординальная сумма (упражнение 3) $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ была полным сетчатым множеством, достаточно, чтобы I и каждое из E_ι было полным сетчатым множеством.

г) Для того чтобы упорядоченное множество $\mathcal{A}(E, F)$ возрастающих отображений упорядоченного множества E в упорядоченное множество F (упр. 6) было полным сетчатым множеством, необходимо и достаточно, чтобы F было полным сетчатым множеством.

12) Пусть Φ — множество отображений множества A в себя. Пусть $\mathfrak{F}$ — часть множества $\mathfrak{P}(A)$, образованная такими множествами $X \subset A$, что $f(X) \subset X$ для всякого $f \in \Phi$; показать, что $\mathfrak{F}$ — полное сетчатое множество для соотношения включения.

13) Пусть E — упорядоченное множество; мы говорим, что отображение f множества E в себя является *замыканием*, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) f является возрастающим; 2) для всякого $x \in E$ имеет место $f(x) \geqslant x$; 3) для всякого $x \in E$ имеет место $f(f(x)) = f(x)$. Пусть F — множество элементов из E, инвариантных относительно f.

а) Показать, что для всякого $x \in E$ множество F_x таких элементов $y \in F$, что $x \leqslant y$, непусто и допускает наименьший элемент $f(x)$. Обратно, если G — часть множества E, такая, что для всякого $x \in E$ множество тех $y \in G$, для которых $x \leqslant y$, допускает наименьший элемент $g(x)$, то g есть замыкание и G тождественно с множеством элементов, инвариантных относительно g.

б) Предположим, что E — полное сетчатое множество; показать, что нижняя грань в E произвольной непустой части множества F принадлежит к F.

14) Пусть E и F — два множества, R — произвольная часть множества $E \times F$. Для всякой части $X \subset E$ (соответственно всякой части $Y \subset F$) символом $\rho(X)$ (соответственно $\sigma(Y)$) обозначается множество таких $y \in F$ (соответственно $x \in E$), что $(x, y) \in R$ для всех $x \in X$ (соответственно $(x, y) \in R$ для всякого $y \in Y$).

а) Показать, что ρ и σ — возрастающие и что $X \subset \sigma(\rho(X))$ и $Y \subset \rho(\sigma(Y))$ для всякого $X \subset E$ и всякого $Y \subset F$; вывести отсюда, что $\rho(\sigma(\rho(X))) = \rho(X)$ и $\sigma(\rho(\sigma(Y))) = \sigma(Y)$.

б) Отображение $X \to \sigma(\rho(X))$ (соответственно $Y \to \rho(\sigma(Y))$) является замыканием (упражнение 13) в $\mathfrak{P}(E)$ (соответственно в $\mathfrak{P}(F)$).

15) Пусть дано произвольное упорядоченное множество E. Для всякой части X множества E обозначим через $\rho(X)$ множество мажорант X, а через $\sigma(X)$ — множество минорант X.

Показать, что в $\mathfrak{P}(E)$ множество $\widetilde{E}$ таких X, что $X = \sigma(\rho(X))$, есть полное сетчатое множество (ср. упражнения 13 и 14) и что отображение $x \to \sigma(\{x\})$ есть изоморфизм множества E на упорядоченное подмножество E′ в $\widetilde{E}$, такой, что если семейство (x_ι) элементов из E имеет верхнюю (соответственно нижнюю) грань в E, то образ этой верхней (соответственно нижней) грани есть верхняя (соответственно нижняя), грань в $\widetilde{E}$ для семейства образов элементов x_ι. Мы говорим, что $\widetilde{E}$ есть *пополнение* упорядоченного множества E.

¶ 16) Мы говорим, что сетчатое множество E является *дистрибутивным*, если оно удовлетворяет двум следующим условиям:

$$(D') \quad \sup(x, \inf(y, z)) = \inf(\sup(x, y), \sup(x, z));$$

$$(D'') \quad \inf(x, \sup(y, z)) = \sup(\inf(x, y), \inf(x, z)).$$

а) Показать, что каждое из условий (D′), (D″) влечет условие:

$$(D) \quad \sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)) = \inf(\sup(x, y), \sup(y, z), \sup(z, x)).$$

б) Показать, что условие (D) влечет условие:

$$(M) \quad \text{если } x \geqslant z, \text{ то } \sup(z, \inf(x, y)) = \inf(x, \sup(y, z)).$$

Вывести отсюда, что (D) влечет каждое из условий (D′) и (D″) и, следовательно, все три аксиомы (D), (D′), (D″) эквивалентны [для доказательства того, например, что (D) влечет (D′), взять верхнюю грань для x и каждого из элементов, фигурирующих в (D), и использовать (M)].

в) Показать, что если

$$\inf(z, \sup(x, y)) \leqslant \sup(x, \inf(y, z)),$$

каковы бы ни были x, y, z в E, то E дистрибутивно (рассмотреть элемент $\inf(z, \sup(x, \inf(y, z)))$). Вывести отсюда, что если

$$\inf(\sup(x, y), \sup(z, \inf(x, y))) = \sup(\inf(x, y), \inf(y, z), \inf(z, x)),$$

то E дистрибутивно.

¶ 17) Пусть E — множество не менее чем с тремя элементами, $\mathscr{P}$ — множество разбиений множества E, упорядоченное отношением „ω мельче, чем ω'“, между ω и ω' (n° 1, пример 4):

а) показать, что $\mathscr{P}$ — полное сетчатое множество (упражнение 11);

б) показать, что $\mathscr{P}$ не дистрибутивно (упражнение 16);

в) показать, что для всякого разбиения $\omega \in \mathscr{P}$ существует такое разбиение ω', что верхняя грань для ω и ω' есть наибольший элемент в $\mathscr{P}$, а нижняя грань для ω и ω' есть наименьший элемент в $\mathscr{P}$ (вполне упорядочить множества, принадлежащие к ω).$_0$

18) Мы говорим, что упорядоченное множество E есть множество *без дыр*, если оно содержит два различных сравнимых элемента и если

для всякой пары таких элементов x, y из E, что $x < y$, существует такое $z \in E$, что $x < z < y$.

Показать, что, для того чтобы ординальная сумма $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ (упражнение 3) была множеством без дыр, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1° либо I содержит два различных сравнимых элемента, либо существует такое $\iota \in I$, что E_ι содержит два различных сравнимых элемента; 2° каждое E_ι, содержащее не менее двух элементов, есть множество без дыр; 3° если α, β — два таких элемента из I, что $\alpha < \beta$, и если не существует ни одного такого элемента $\lambda \in I$, что $\alpha < \lambda < \beta$, то либо E_α не имеет максимальных элементов, либо E_β не имеет минимальных элементов. В частности, всякая ординальная сумма $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ множеств без дыр есть множество без дыр, когда ни одно E_ι не имеет максимальных элементов (или когда ни одно E_ι не имеет минимальных элементов). Если I — множество без дыр, то ординальная сумма $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ — без дыр, когда каждое E_ι есть множество без дыр или не содержит ни одной пары различных сравнимых элементов.

¶ 19) Мы говорим, что упорядоченное множество E является *дисперсным*, или *рассеянным*, если никакое упорядоченное подмножество в E не есть множество без дыр. Всякое подмножество дисперсного множества есть дисперсное множество.

а) Если E дисперсно, то для всякой пары таких элементов x, y из E, что $x < y$, существуют два таких элемента x', y' из E, что

$$x \leqslant x' < y' \leqslant y$$

и интервал $]x', y'[$ пуст. °Дать пример совершенно упорядоченного множества, удовлетворяющего предыдущему условию, но тем не менее не дисперсного (рассмотреть триадическое множество Кантора).$_0$

б) Для того чтобы ординальная сумма $E = \sum_{\iota \in I} E_\iota$ (I и все E_ι непусты) была дисперсной, необходимо и достаточно, чтобы I и каждое из E_ι были дисперсными (принять во внимание, что E содержит подмножество, изоморфное с I, и что всякое непустое подмножество F множества E есть ординальная сумма множеств $F \cap E_\iota$, которые все непусты; использовать, наконец, упражнение 18).

20) Пусть E — совершенно упорядоченное множество, $S\{x, y\}$ — соотношение „замкнутый интервал с концами x, y дисперсен“ (упражнение 19). Показать, что S — соотношение порядка, слабо совместимое с соотношением порядка на E, что классы эквивалентности по S суть дисперсные множества и что упорядоченное фактормножество E/S (упражнение 2) — без дыр. Вывести отсюда, что E изоморфно некоторой ординальной сумме дисперсных множеств, где множество индексов — множество без дыр.

21) Пусть I — фильтрующееся вправо упорядоченное множество и

$$(g_\alpha) : (A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}) \to (B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$$

— индуктивная система отображений относительно I. Показать, что если каждое из g_α инъективно (соответственно сюръективно), то $g = \varinjlim g_\alpha$ есть инъективное (соответственно сюръективное) отображение множества $A = \varinjlim A_\alpha$ в $B = \varinjlim B_\alpha$.

22) Пусть I — фильтрующееся вправо множество, $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство частей от множества I, у которого множество индексов L есть такое фильтрующееся вправо множество, что: 1° для всякого $\lambda \in L$ множество J_λ является фильтрующимся для соотношения порядка, индуцированного соотношением порядка на I; 2° соотношение $\lambda \leqslant \mu$ влечет $J_\lambda \subset J_\mu$; 3° I есть объединение семейства (J_λ). Пусть $E = \varinjlim E_\alpha$ — индуктивный предел семейства множеств $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ для семейства отображений $(f_{\beta\alpha})$. Обозначим через F_λ индуктивный предел семейства $(E_\alpha)_{\alpha \in J_\lambda}$ для семейства $(f_{\beta\alpha})$, где α и β пробегают J_λ; пусть $f_\alpha^{(\lambda)}$ — каноническое отображение множества E_α в F_λ для $\alpha \in J_\lambda$.

а) Показать, что при $\lambda \leqslant \mu$ существует единственное отображение $g_{\mu\lambda}$ множества F_λ в F_μ, такое, что $g_{\mu\lambda} \circ f_\alpha^{(\lambda)} = f_\alpha^{(\mu)}$ для всякого $\alpha \in J_\lambda$. Отображения $g_{\mu\lambda}$ удовлетворяют условию (LI); пусть F — индуктивный предел семейства $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ для семейства отображений $(g_{\mu\lambda})$.

б) Для всякого $\lambda \in L$ пусть g_λ — каноническое отображение множества F_λ в F; если $\alpha \in I$ принадлежит одновременно к J_λ и J_μ, показать, что отображения $g_\lambda \circ f_\alpha^{(\lambda)}$ и $g_\mu \circ f_\alpha^{(\mu)}$ равны. Обозначая это отображение через h_α, показать, что существует отображение h множества E в F, такое, что $h_\alpha = h \circ f_\alpha$ для всякого $\alpha \in I$, причем h биективно.

23) Пусть I — фильтрующееся вправо множество, $E = \varinjlim E_\alpha$ — индуктивный предел семейства множеств $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ для семейства отображений $(f_{\beta\alpha})$. Пусть в E_α соотношение R_α есть соотношение эквивалентности $f_\alpha(x) = f_\alpha(y)$; показать, что при $\alpha \leqslant \beta$ отображение $f_{\beta\alpha}$ совместимо с соотношениями эквивалентности R_α и R_β. Пусть $E'_\alpha = E_\alpha/R_\alpha$ и пусть $f'_{\beta\alpha}$ — отображение множества E'_α в E'_β, полученное из $f_{\beta\alpha}$ переходом к фактормножествам. Показать, что отображения $f'_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию (LI) и инъективны; определить каноническую биекцию множества E на индуктивный предел $E' = \varinjlim E'_\alpha$.

24) Пусть I — фильтрующееся вправо множество, $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство множеств и пусть $f_{\beta\alpha}$, где $\alpha \leqslant \beta$, есть отображение множества E_α в E_β. Предполагается, что семейство $(f_{\beta\alpha})$ удовлетворяет условию (LI). Пусть $E'_\alpha = f_{\alpha\alpha}(E_\alpha) \subset E_\alpha$ и пусть $g_{\beta\alpha}$ — сужение отображения $f_{\beta\alpha}$ на множество E'_α; показать, что $g_{\beta\alpha}$ есть отображение множества E'_α в E'_β, что семейство $(g_{\beta\alpha})$ удовлетворяет условию (LI) и что для всякого $\alpha \in I$ отображение $g_{\alpha\alpha}$ есть тождественное отображение множества E'_α. С помощью предложения 10 определить каноническую биекцию множества $E = \varinjlim E_\alpha$ на $E' = \varinjlim E'_\alpha$.

25) Пусть $(g_\alpha): (A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}) \to (B_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ есть индуктивная система отображений относительно упорядоченного множества I. Пусть $G_\alpha \subset A_\alpha \times B_\alpha$ — график отображения g_α и пусть $j_{\beta\alpha}$, где $\alpha \leqslant \beta$, есть сужение отображения $\varphi_{\beta\alpha} \times \psi_{\beta\alpha}$ на G_α. Показать, что семейство $(j_{\beta\alpha})$ удовлетворяет условию (LI), и определить каноническую биекцию множества $G = \varinjlim (G_\alpha, j_{\beta\alpha})$ на график отображения $g = \varinjlim g_\alpha$ множества $A = \varinjlim (A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ в $B = \varinjlim (B_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$.

26) Пусть I — упорядоченное фильтрующееся вправо множество и пусть
$$(g_\alpha): (A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}) \to (B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$$
есть проективная система отображений относительно I. Показать, что если каждое отображение g_α инъективно (соответственно биективно), то $g = \varprojlim g_\alpha$ есть инъективное (соответственно биективное) отображение множества $A = \varprojlim A_\alpha$ в $B = \varprojlim B_\alpha$ (ср. упр. 32д)).

27) Пусть I — фильтрующееся вправо множество, $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство частей множества I, удовлетворяющее условиям из упр. 22. Пусть $E = \varprojlim E_\alpha$ — проективный предел семейства множества $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ по семейству отображений $(f_{\alpha\beta})$. Обозначим через F_λ проективный предел семейства $(E_\alpha)_{\alpha \in J_\lambda}$ по семейству $f_{\alpha\beta}$, где α и β пробегают J_λ; пусть $f_\alpha^{(\lambda)}$ — каноническое отображение множества из F_λ в E_α при $\alpha \in J_\lambda$.

а) Показать, что при $\lambda \leqslant \mu$ существует единственное отображение $g_{\lambda\mu}$ множества F_μ в F_λ, такое, что $f_\alpha^{(\lambda)} \circ g_{\lambda\mu} = f_\alpha^{(\mu)}$ для всякого $\alpha \in J_\lambda$. Отображения $g_{\lambda\mu}$ удовлетворяют условию (LP); пусть F — проективный предел семейства $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ по семейству отображений $(g_{\lambda\mu})$.

б) Для всякого $\lambda \in L$ пусть g_λ — каноническое отображение множества F в F_λ; если $\alpha \in I$ принадлежит одновременно к J_λ и J_μ, показать, что отображения $f_\alpha^{(\lambda)} \circ g_\lambda$ и $f_\alpha^{(\mu)} \circ g_\mu$ равны. Обозначив через h_α это отображение, показать, что существует отображение h множества F в E, такое, что $h_\alpha = f_\alpha \circ h$, и при этом биективно.

28) Пусть I — фильтрующееся вправо множество, $E = \varprojlim E_\alpha$ — проективный предел семейства множеств $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ по семейству отображений $(f_{\alpha\beta})$. Пусть $E'_\alpha = f_\alpha(E)$; показать, что сужение $f'_{\alpha\beta}$ отображения $f_{\alpha\beta}$ на множество E'_β есть сюръекция множества E'_β на E'_α при $\alpha \leqslant \beta$ и что отображения $f'_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию (LP); определить каноническую биекцию множества E на проективный предел $E' = \varprojlim E'_\alpha$ и показать, что каноническое отображение множества E' в E'_α сюръективно.

29) Пусть I — фильтрующееся вправо множество, $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство множеств и пусть $f_{\alpha\beta}$, где $\alpha \leqslant \beta$, есть отображение множества E_β в E_α. Предполагается, что семейство $(f_{\alpha\beta})$ удовлетворяет условию (LP). Пусть $E'_\alpha = f_{\alpha\alpha}(E_\alpha) \subset E_\alpha$ и пусть $g_{\alpha\beta}$ — сужение отображения $f_{\alpha\beta}$ на множество E'_β; показать, что $g_{\alpha\beta}$ есть отображение множества E'_β в E'_α, что семейство $(g_{\alpha\beta})$ удовлетворяет условию (LP) и что для всякого $\alpha \in I$ отображение $g_{\alpha\alpha}$ есть тождественное отображение множества E'_α. Определить каноническую биекцию множества $E = \varprojlim E_\alpha$ на $E' = \varprojlim E'_\alpha$.

30) Пусть $(g_\alpha): (A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}) \to (B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ есть проективная система отображений относительно упорядоченного фильтрующегося множества I. Пусть $G_\alpha \subset A_\alpha \times B_\alpha$ — график отображения g_α и пусть $j_{\alpha\beta}$, где $\alpha \leqslant \beta$, есть сужение $\varphi_{\alpha\beta} \times \psi_{\alpha\beta}$ на G_β. Показать, что семейство $(j_{\alpha\beta})$ удовлетворяет условию (LP), и определить каноническую биекцию множества

$G = \varprojlim (G_\alpha, j_{\alpha\beta})$ на график отображения $g = \varprojlim g_\alpha$ множества $A = \varprojlim A_\alpha$ в $B = \varprojlim B_\alpha$.

31) Пусть I — такое фильтрующееся вправо множество, что существует счетная часть множества от I, конфинальная с I:

а) показать, что для всякой части J множества I, конфинальной с I, существует счетная часть множества J, конфинальная с J (а следовательно, и с I);

б) пусть $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство множеств, у которого множеством индексов служит I, и пусть $f_{\alpha\beta}$, где $\alpha \leqslant \beta$, есть *сюръекция* множества E_β на E_α; предполагается, что отображения $f_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию (LP). Показать, что для всякого $\alpha \in I$ каноническое отображение f_α множества E в E_α сюръективно и, следовательно, E не пусто, если хотя бы одно из E_α не пусто.$_\circ$

°32) Пусть I — фильтрующееся вправо множество, не имеющее наибольшего элемента, и пусть F — множество последовательностей $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n})$ из четного числа $\geqslant 2$ элементов множества I, обладающих следующими свойствами: 1° $\alpha_{2i-1} < \alpha_{2i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$; 2° $\alpha_{2i-1} \not\leqslant \alpha_{2j-1}$ для $1 \leqslant j < i \leqslant n$. Множество F не пусто, если только I не сводится к одному элементу. Мы полагаем $r(x) = \alpha_{2n-1}$, $s(x) = \alpha_{2n}$ и называем $2n$ *длиной* последовательности x.

а) Для всякого $\alpha \in I$ пусть E_α есть множество таких $x \in F$, что $r(x) = \alpha$; E_α не пусто, если I содержит более одного элемента. Для $\alpha \leqslant \beta$ мы определим следующим образом отображение $f_{\alpha\beta}$ множества E_β в множество конечных последовательностей элементов из F: при $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}) \in E_\beta$ пусть j есть наименьший такой индекс, что $\alpha \leqslant \alpha_{2j-1}$; мы полагаем

$$f_{\alpha\beta}(x) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2j-2}, \alpha, \alpha_{2j}).$$

Показать, что $f_{\alpha\beta}(E_\beta) = E_\alpha$, что отображения $f_{\alpha\beta}$ удовлетворяют условию (LP) и что $f_{\alpha\alpha}$ есть тождество.

б) Показать, что если $x_\alpha \in E_\alpha$ и $x_\beta \in E_\beta$ таковы, что существует индекс $\gamma \in I$, который $\geqslant \alpha$ и $\geqslant \beta$, и если $x_\gamma \in E_\gamma$ таково, что $x_\alpha = f_{\alpha\gamma}(x_\gamma)$ и $x_\beta = f_{\beta\gamma}(x_\gamma)$, и если, кроме того, x_α и x_β — последовательности одинаковой длины, то $s(x_\alpha) = s(x_\beta)$.

в) Вывести из б), что если проективный предел $E = \varprojlim E_\alpha$ не пуст и $y = (x_\alpha) \in E$, то множество элементов $s(x_\alpha)$ счетно и конфинально с I.

г) Пусть I — множество конечных частей несчетного множества A, упорядоченное включением. Показать, что не существует никакой счетной части множества I, которая была бы конфинальна с I, и вывести из в) пример семейства $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ и отображений $f_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих условию (LP) и сюръективных (при $\alpha \leqslant \beta$), но таких, чтобы $\varprojlim E_\alpha$ был пустым.

д) Вывести из г) пример проективной системы

$$(g_\alpha): (E_\alpha, f_{\alpha\beta}) \to (E'_\alpha, f'_{\alpha\beta}),$$

такой, чтобы каждое из g_α было сюръективным, но чтобы $g = \varprojlim g_\alpha$ не было сюръективным (взять за все E'_α одноэлементные множества).$_\bullet$

§ 2. Вполне упорядоченные множества

1. Отрезки вполне упорядоченного множества

Соотношение $R\{x, y\}$ называется *соотношением полного порядка между x и y*, если R является соотношением порядка между x и y и если для всякого непустого множества E, на котором $R\{x, y\}$ индуцирует соотношение порядка (т. е. такого, что $x \in E$ влечет $R\{x, x\}$; см. § 1, n° 1), E, упорядоченное этим соотношением, имеет *наименьший элемент*.

Множество E, упорядоченное порядком Г, называется *вполне упорядоченным*, если соотношение $y \in \Gamma\langle x\rangle$ является соотношением полного порядка между x и y; в этом случае Г называется *полным порядком* на E. Это определение равносильно следующему:

Определение 1. *Множество* E *называется вполне упорядоченным, если оно является упорядоченным и если всякая непустая часть множества* E *имеет наименьший элемент.*

Вполне упорядоченное множество E *совершенно упорядочено*, так как всякая часть $\{x, y\}$ множества E имеет наименьший элемент. Всякое подмножество A множества E, ограниченное сверху, имеет в E верхнюю грань.

Примеры. 1) Пусть $E = \{\alpha, \beta\}$ — множество, элементы которого различны. Мгновенно проверяется, что часть $\{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\alpha, \beta)\}$ множества $E \times E$ является графиком полного порядка на E.

2) Всякая часть вполне упорядоченного множества (в частности, пустая часть) вполне упорядочена индуцированным порядком.

3) °Существование совершенно упорядоченных, но не вполне упорядоченных множеств эквивалентно аксиоме бесконечности (§ 4, n° 4, следствие 1 предложения 3 и упражнение 3).

4) Если Г — полный порядок на E, то противоположный к Г порядок только тогда является полным порядком на E, когда E — конечное множество (§ 4, упражнение 3).$_\circ$

5) Пусть E — вполне упорядоченное множество. Множество E_0, полученное присоединением к E наибольшего элемента b (§ 1, n° 7), вполне упорядоченно, так как для всякого непустого подмножества H множества E_0, не сводящегося к элементу b, наименьший элемент множества $H \cap E$ является также наименьшим элементом множества H.

Замечание. °Аксиома бесконечности позволяет доказать существование вполне упорядоченных множеств, не имеющих наибольшего элемента; таким является, например, множество **N** натуральных целых чисел.$_\circ$

Определение 2. *Пусть* E — *упорядоченное множество. Часть* S *множества* E *называется отрезком множества* E, *если соотношения* $x \in S$, $y \in E$ *и* $y \leqslant x$ *влекут* $y \in S$.

Очевидно, всякое пересечение и всякое объединение отрезков множества E также являются отрезками множества E; если S — отре-

зок множества E, то всякий отрезок множества S является отрезком и для множества E. Само множество E и пустое множество являются отрезками множества E.

Предложение 1. *Всякий отрезок вполне упорядоченного множества* E, *отличный от* E, *является интервалом* $]\leftarrow, a[$, *где* $a \in E$.

В самом деле, пусть S — отрезок множества E, отличный от E. Поскольку множество E — S не пусто, оно имеет наименьший элемент a; в силу определения 2 соотношение $x \geqslant a$ влечет $x \notin S$, ибо иначе мы имели бы $a \in S$, что неверно. Таким образом, E — S есть интервал $[a, \rightarrow[$, а S — интервал $]\leftarrow, a[$.

Для всякого элемента x совершенно упорядоченного множества E обозначим через S_x отрезок $]\leftarrow, x[$ и назовем его *отрезком с концом* x.

Заметим, что если E имеет наименьший элемент α, отрезок S_x является также полуоткрытым интервалом $[\alpha, x[$.

Пусть E — совершенно упорядоченное множество. Объединение A отрезков S_x, где x пробегает E, есть E, если E не имеет наибольшего элемента; если же E имеет наибольший элемент b, то $A = E - \{b\}$.

Предложение 2. *Множество* E^* *отрезков вполне упорядоченного множества* E *вполне упорядочено включением; отображение* $x \to S_x$ *есть изоморфизм вполне упорядоченного множества* E *на множество отрезков множества* E, *отличных от* E.

Ясно, что если $x \in E$ и $y \in E$, соотношение $x \leqslant y$ влечет $S_x \subset S_y$, а соотношение $x < y$ влечет $S_x \neq S_y$. Отображение $x \to S_x$ является, таким образом, изоморфизмом множества E на множество S(E) отрезков множества E, отличных от E (§ 1, приложение 13), и, следовательно, S(E) вполне упорядочено. Кроме того, E^* изоморфно вполне упорядоченному множеству, полученному из S(E) добавлением наибольшего элемента.

Предложение 3. *Пусть* $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство вполне упорядоченных множеств, такое, что для каждой пары индексов* $(\iota, \varkappa)$ *одно из множеств* X_ι, $X_\varkappa$ *является отрезком другого. Тогда существует и единствен порядок на множестве* $E = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, *индуцирующий на каждом из множеств* X_ι *данный порядок. Множество* E, *упорядоченное этим порядком, вполне упорядоченно. Всякий отрезок множества* X_ι *является отрезком множества* E. *Для всякого* $x \in X_\iota$ *отрезок множества* X_ι *с концом* x *равен отрезку множества* E *с концом* x. *Всякий отрезок множества* E *либо совпадает с* E, *либо является отрезком одного из* X_ι.

Первое утверждение вытекает из следующей общей леммы.

Лемма 1. *Пусть* $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ — *семейство упорядоченных множеств, фильтрующееся вправо по отношению* $\subset$ (иначе говоря, такое семейство, что для всякой пары индексов (α, β) существует индекс γ, такой, что $X_\alpha \subset X_\gamma$ и $X_\beta \subset X_\gamma$). *Предположим, что для всякой пары индексов* (α, β), *такой, что* $X_\alpha \subset X_\beta$, *порядок, индуцированный на* X_α *порядком, заданным на* X_β, *совпадает с порядком, заданным на* X_α. *При этих условиях существует и единствен порядок на множестве* $E = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, *индуцирующий на каждом из множеств* X_α *данный порядок.*

В самом деле, пусть G_α — график порядка, данного на X_α. Если G — график порядка на E, индуцирующего на каждом из X_α порядок графика G_α, то необходимо $G_\alpha \subset G$ для каждого $\alpha \in A$; таким образом, G содержит объединение $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. С другой стороны, для всякой пары (x, y) элементов из E по предположению существует такой индекс $\alpha \in A$, что $x \in X_\alpha$ и $y \in X_\alpha$; если $(x, y) \in G$, то необходимо $(x, y) \in G_\alpha$, откуда $G \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Таким образом, если искомый порядок на E существует, то для его графика G необходимо $G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Остается показать, что это множество удовлетворяет требуемым условиям. Так как $G_\beta \cap (X_\alpha \times X_\alpha) = G_\alpha$, когда $X_\alpha \subset X_\beta$, то $G \cap (X_\alpha \times X_\alpha) = G_\alpha$ для всякого $\alpha \in A$. С другой стороны, из предположений вытекает, что три произвольных элемента x, y, z множества E принадлежат к некоторому X_α. Из этого сразу же заключаем, что $(x, y) \in G$ — требуемое соотношение порядка на E.

Доказав лемму, покажем, что при предположениях предложения 3 каждое X_ι является отрезком множества E. В самом деле, если $x \in X_\iota$, $y \in E$ и $y \leqslant x$, то существует индекс $\varkappa$, такой, что $X_\iota \subset X_\varkappa$ и $y \in X_\varkappa$; так как по предположению X_ι есть отрезок множества $X_\varkappa$, имеем $y \in X_\iota$, откуда и следует наше утверждение. Аналогичное рассуждение доказывает, что для всякого $x \in X_\iota$ отрезок множества X_ι с концом x совпадает с интервалом $]\leftarrow, x[$ в E. Докажем далее, что E вполне упорядочено. Если H — непустая часть множества E, существует индекс $\iota \in I$, такой, что $H \cap X_\iota \neq \varnothing$; если a — наименьший элемент множества $H \cap X_\iota$ в X_ι, то a является также наименьшим элементом множества H в E; в самом деле, для всякого $x \in H$ существует $\varkappa \in I$, такой, что $X_\iota \subset X_\varkappa$ и $x \in X_\varkappa$; не может быть $x < a$, так как интервал $]\leftarrow, a[$ содержится в X_ι; следовательно, поскольку $X_\varkappa$ совершенно упорядоченно, $x \geqslant a$.

Остается, наконец, доказать, что любой отрезок множества E, отличный от E, является отрезком одного из X_ι; это тотчас же вытекает из предыдущего, так как такой отрезок имеет вид $]\leftarrow, x[$ (предложение 1), а x принадлежит некоторому X_ι.

2. Принцип трансфинитной индукции

Лемма 2. *Пусть* E — *вполне упорядоченное множество*, $\mathfrak{S}$ — *множество отрезков множества* E, *обладающее следующими свойствами*: 1° *любое объединение отрезков, принадлежащих к* $\mathfrak{S}$, *также принадлежит к* $\mathfrak{S}$; 2° *если* $S_x \in \mathfrak{S}$, *то* $S_x \cup \{x\} \in \mathfrak{S}$. *Тогда любой отрезок множества* E *принадлежит к* $\mathfrak{S}$.

В самом деле, предположим, что имеются отрезки множества E, не принадлежащие к $\mathfrak{S}$, и пусть S — наименьший из них (предложение 2). Если S не имеет наибольшего элемента, S есть объединение отрезков множества S, отличных от S; эти отрезки, по определению отрезка S, принадлежат к $\mathfrak{S}$, а тогда $S \in \mathfrak{S}$ — противоречие. Если же S имеет наибольший элемент a, то $S = S_a \cup \{a\}$; так как S_a — отрезок множества S, отличный от S, то $S_a \in \mathfrak{S}$; но тогда и $S \in \mathfrak{S}$ — противоречие.

Для большего удобства мы переместимся в теорию, в которой E — множество, *вполне упорядоченное* соотношением, обозначенным через $x \leqslant y$. Тогда имеют место следующие критерии:

C59 (принцип трансфинитной индукции). *Пусть* $R\{x\}$ — *такое соотношение теории* $\mathcal{T}$ (*в которой* x *не является константой*), *что соотношение*

$$(x \in E \text{ и } (\forall y)((y \in E \text{ и } y < x) \Rightarrow R\{y\})) \Rightarrow R\{x\}$$

является в теории $\mathcal{T}$ *теоремой. При этих условиях соотношение* $(x \in E) \Rightarrow R\{x\}$ *является теоремой теории* $\mathcal{T}$.

В самом деле, пусть $\mathfrak{S}$ — множество отрезков S множества E, таких, что $y \in S \Rightarrow R\{y\}$. Ясно, что любое объединение отрезков, принадлежащих к $\mathfrak{S}$, принадлежит к $\mathfrak{S}$. С другой стороны, если $S_x \in \mathfrak{S}$, то — по предположению критерия — $R\{x\}$; таким образом, согласно методу разделения случаев, $(y \in S_x \cup \{x\}) \Rightarrow R\{y\}$. Тогда (лемма 2) $E \in \mathfrak{S}$, что и доказывает критерий.

В применениях критерия C59 соотношение

$$x \in E \text{ и } (\forall y)((y \in E \text{ и } y < x) \Rightarrow R\{y\})$$

называется обычно „предположением индукции".

Для всякого отображения g отрезка S множества E в множество F и для всякого $x \in S$ через $g^{(x)}$ мы будем ниже обозначать отображение отрезка $S_x =]\leftarrow, x[$ множества E *на* $g(S_x)$, совпадающее в S_x с g. В этих обозначениях:

C60 (определение отображения трансфинитной индукцией). *Пусть* u — *буква*, $T\{u\}$ — *терм теории* $\mathcal{T}$. *Тогда существуют множество* U *и отображение* f *множества* E *на* U, *такие, что для любого* $x \in E$

$$f(x) = T\{f^{(x)}\}.$$

Кроме того, этими условиями множество U *и отображение* f *определены однозначно.*

Докажем сначала единственность. Предположим, что f' и U' также удовлетворяют условиям критерия. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество таких отрезков S множества E, что f и f' совпадают на S. Ясно, что любое объединение отрезков, принадлежащих к $\mathfrak{S}$, принадлежит к $\mathfrak{S}$. С другой стороны, если $S_x \in \mathfrak{S}$, f и f' совпадают на S_x, таким образом, $f^{(x)} = f'^{(x)}$ и, следовательно, $f(x) = T\{f^{(x)}\} = T\{f'^{(x)}\} = f'(x)$, откуда $S_x \cup \{x\} \in \mathfrak{S}$. Из этого вытекает, что $E \in \mathfrak{S}$ (лемма 2) и, значит, $f = f'$ и $U' = f'(E) = f(E) = U$.

Обозначим теперь через $\mathfrak{S}_1$ множество отрезков S множества E, для которых существуют множество U_S и отображение f_S множества S на U_S, такие, что для всех $x \in S$ $f_S(x) = T\{f_S^{(x)}\}$. Для всякого $S \in \mathfrak{S}_1$ f_S и U_S в силу первой части доказательства определены однозначно. В частности, если S' и S'' — два таких отрезка, принадлежащих к $\mathfrak{S}_1$, что $S' \subset S''$, то $f_{S'}$ — отображение множества S' на $f_{S''}(S')$, совпадающее на S' с $f_{S''}$. Из этого замечания вытекает, что любое объединение отрезков, принадлежащих к $\mathfrak{S}_1$, также принадлежит к $\mathfrak{S}_1$ (гл. II, § 4, предложение 7). С другой стороны, если $S_x \in \mathfrak{S}_1$, определим на $S = S_x \cup \{x\}$ функцию f_S, продолжающую f_{S_x}, положив $f_S(x) = T\{f_{S_x}\}$ (гл. II, § 4, предложение 8); так как $f_S^{(x)} = f_{S_x}$, немедленно получаем $S_x \cup \{x\} \in \mathfrak{S}_1$. Таким образом (лемма 2), $E \in \mathfrak{S}_1$, что заканчивает доказательство.

Доказанный критерий чаще всего будет применяться в ситуации, в которой существует множество F, такое, что *для всякого отображения* h *некоторого отрезка множества* E *на некоторое подмножество множества* F *имеем* $T\{h\} \in F$. Тогда множество U, полученное применением критерия C60, будет *частью* множества F. В самом деле, в предыдущих обозначениях пусть $\mathfrak{S}_2$ — часть множества $\mathfrak{S}_1$, образованная отрезками S множества E, такими, что $U_S \subset F$. Сразу же видно, что любое объединение отрезков, принадлежащих к $\mathfrak{S}_2$, принадлежит к $\mathfrak{S}_2$; с другой стороны, предположенное свойство множества F влечет, что если $S_x \in \mathfrak{S}_2$, то и $S_x \cup \{x\} \in \mathfrak{S}_2$; применение леммы 2 заканчивает доказательство.

3. Теорема Цермело

Лемма 3. *Пусть* E — *множество*, $\mathfrak{S}$ — *часть множества* $\mathfrak{P}(E)$, p — *отображение множества* $\mathfrak{S}$ *в* E, *такое, что для всякого* $X \in \mathfrak{S}$ *выполняется* $p(X) \notin X$. *Тогда существуют часть* M *множества* E *и полный порядок* Γ *на* M, *такие, что* (обозначая через $x \leqslant y$ соотношение $y \in \Gamma\langle x \rangle$ в M и через S_x отрезок $]\leftarrow, x[$):

1° *для всякого* $x \in M$ *имеем* $S_x \in \mathfrak{S}$ *и* $p(S_x) = x$;

2° $M \notin \mathfrak{S}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество частей G множества $E \times E$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) G — график полного порядка на $pr_1 G = U$;

б) если обозначить через $x \leqslant y$ соотношение $(x, y) \in G$ в U, то для всякого $x \in U$ отрезок S_x таков, что $S_x \in \mathfrak{S}$ и $p(S_x) = x$.

Покажем, что если G, G′ — два элемента из $\mathfrak{M}$, а U, U′ — их первые проекции, то одно из множеств U, U′ содержится в другом; покажем далее, что если, например $U \subset U'$, то $G = G' \cap (U \times U)$ (другими словами, соотношение порядка на U индуцировано соотношением порядка на U′) и U — *отрезок* множества U′.

Для доказательства рассмотрим множество V таких $x \in U \cap U'$, что отрезки с концом x, в U и U′ совпадают, а порядки, индуцированные на этом отрезке порядками в U и в U′, одинаковы. Ясно, что V — отрезок и в U, и в U′, а порядки, индуцированные на V, одинаковы; наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что $V = U$ или $V = U'$. Рассуждая от противного, предположим $V \neq U$ и $V \neq U'$. Пусть x — наименьший из элементов множества $U - V$ в U, а x' — наименьший из элементов $U' - V$ в U′; тогда $V = S_x$ в U и $V = S_{x'}$ в U′. Но из предположений следует $V \in \mathfrak{S}$, $x = p(S_x)$ и $x' = p(S_{x'})$, откуда $x = x'$; но тогда по определению $x \in V$ — противоречие

К множеству проекций $U = pr_1 G$ (для $G \in \mathfrak{M}$) можно, таким образом, применить предложение 3 и получить вполне упорядоченное множество $M = \bigcup_{G \in \mathfrak{M}} pr_1 G$. Легко видеть, что график порядка на M принадлежит к $\mathfrak{M}$. Если бы было $M \in \mathfrak{S}$, положив $a = p(M)$, мы получили бы $a \notin M$; тогда можно было бы, добавив к M элемент a в качестве наибольшего элемента, получить вполне упорядоченное множество $M' = M \cup \{a\}$. Так как $M = S_a$ в M′, то $S_a \in \mathfrak{S}$ и $p(S_a) = a$; а тогда график порядка на M′ принадлежит к $\mathfrak{M}$—противоречие.

Заметим, что если $\varnothing \notin \mathfrak{S}$ (и, в частности, если $\mathfrak{S}$ пустое), множество M, существование которого утверждается леммой 3, пустое, что видно из п° 1° заключения леммы.

Теорема 1 (Цермело). *На всяком множестве* E *существует полный порядок.*

Пусть $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}(E) - \{E\}$ — множество частей множества E, отличных от E. Для любого $X \in \mathfrak{S}$ положим $p(X) = \tau_x (x \in E - X)$. Так как соотношение $X \in \mathfrak{S}$ влечет $(\exists x)(x \in E - X)$, оно по определению влечет и $p(X) \in E - X$ (гл. I, § 4, п° 1), таким образом, $p(X) \notin X$. Можно применить лемму 3: на некоторой части M множества E, такой, что $M \notin \mathfrak{S}$, существует полный порядок; но единственная часть множества E, не принадлежащая к $\mathfrak{S}$, есть E, откуда и следует теорема.

4. Индуктивные множества

Определение 3. *Упорядоченное множество* E *называется индуктивным, если всякая его совершенно упорядоченная часть имеет в* E *мажоранту.*

Примеры. 1) Пусть $\mathfrak{F}$ — такое множество частей множества A, упорядоченное включением, что для всякой совершенно упорядоченной части $\mathfrak{G}$ множества $\mathfrak{F}$ объединение множеств из $\mathfrak{G}$ принадлежит к $\mathfrak{F}$; тогда $\mathfrak{F}$ индуктивно по соотношению $\subset$, так как объединение множеств из $\mathfrak{G}$ является верхней гранью множества $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{P}(A)$.

2) Важным примером индуктивного по отношению к $\subset$ множества частей является множество $\mathfrak{F}$ графиков отображений частей множества A в множество B; в самом деле, $\mathfrak{F}$ является частью множества $\mathfrak{P}(A \times B)$, а утверждение „часть $\mathfrak{G}$ множества $\mathfrak{F}$ совершенно упорядочена включением“ означает, что для любых двух графиков отображений из $\mathfrak{G}$ одно из этих отображений продолжает другое. Из этого немедленно вытекает, что объединение множеств из $\mathfrak{G}$ является элементом множества $\mathfrak{F}$ (гл. II, § 4, п° 6, предложение 7). Можно, следовательно, также сказать, что множество $\Phi(A, B)$ отображений подмножеств множества A в B индуктивно по соотношению порядка „v продолжает u“ между u и v.

3)° Из аксиомы бесконечности вытекает, что вполне упорядоченное множество натуральных целых чисел не является индуктивным по соотношеиию $\leqslant$.

Теорема 2[1]. *Всякое индуктивное упорядоченное множество имеет максимальный элемент.*

Эта теорема является частным случаем следующего результата:

Предложение 4. *Пусть* E — *упорядоченное множество, всякое вполне упорядоченное подмножество которого ограничено сверху; тогда* E *имеет максимальный элемент.*

Будем говорить, что элемент $v \in E$ является *строгой мажорантой* части X множества E, если v — мажоранта множества X и $v \notin X$. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество частей множества E, имеющих строгую мажоранту; положим для всякого $S \in \mathfrak{S}$ $p(S) = \tau_v$ (v — строгая мажоранта множества S); тогда $p(S)$ — строгая мажоранта множества S. Применяя к $\mathfrak{S}$ и p лемму 3, видим, что существует часть M

[1]) Называемая также *теоремой Цорна* (см. Рез., § 6, п° 10). — *Прим. ред.*

множества E и полный порядок Γ на M, удовлетворяющие условиям леммы; в частности, M не имеет строгой мажоранты в E. Кроме того, порядок Γ совпадает с порядком, индуцированным на M порядком множества E. В самом деле, в M соотношение «$y \in \Gamma\langle x\rangle$ и $x \neq y$» эквивалентно $x \in S_y$, а так как $p(S_y) = y$ является мажорантой множества S_y (относительно порядка в E), оно, это соотношение, влечет $x < y$ в E. Но это означает, что инъекция множества M в E является строго возрастающим отображением (когда M наделено порядком Γ), а так как M — совершенно упорядоченное множество, заключаем, что в M соотношения $y \in \Gamma\langle x\rangle$ и $x \leqslant y$ эквивалентны (§ 1, предложение 13). Теперь к M можно применить условие предложения: существует элемент m, являющийся мажорантой множества M в E. Так как M не имеет строгой мажоранты, m необходимо является максимальным элементом в E.

Следствие 1. *Пусть* E — *индуктивное упорядоченное множество,* a — *элемент множества* E. *Существует максимальный элемент* m *множества* E, *такой, что* $m \geqslant a$.

В самом деле, из определения 3 вытекает, что множество F элементов $x \geqslant a$ множества E индуктивное, а максимальный элемент множества F является также максимальным и в E.

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *множество частей множества* E, *такое, что для всякой части* $\mathfrak{S}$ *множества* $\mathfrak{F}$, *совершенно упорядоченной включением, объединение* (соответственно *пересечение*) *множеств из* $\mathfrak{S}$ *принадлежит* $\mathfrak{F}$; *тогда* $\mathfrak{F}$ *имеет максимальный* (соответственно *минимальный*) *элемент.*

5. *Изоморфизмы вполне упорядоченных множеств*

Теорема 3. *Пусть* E *и* F — *два вполне упорядоченных множества; по крайней мере одно из следующих двух высказываний истинно:*

1) *существует и единствен изоморфизм множества* E *на некоторый отрезок множества* F;

2) *существует и единствен изоморфизм множества* F *на некоторый отрезок множества* E.

Пусть $\mathfrak{J}$ — множество таких отображений частей множества E в F, каждое из которых определено на некотором отрезке множества E и является изоморфизмом этого отрезка на некоторый отрезок множества F. Множество $\mathfrak{J}$, упорядоченное соотношением „v продолжает u" между u и v, является *индуктивным.* В самом деле, пусть $\mathfrak{S}$ — совершенно упорядоченная часть множества $\mathfrak{J}$; объединение S областей определения отображений $u \in \mathfrak{S}$ является объединением отрезков множества E и, следовательно, некоторым отрезком множества E; если v — верхняя грань множества $\mathfrak{S}$ в $\Phi(E, F)$ (n° 4, пример 2), то $v(S)$ является объединением областей значения отображений $u \in \mathfrak{S}$ и, значит, некоторым отрезком множества F; наконец, для всякой пары элементов x, y множества S, таких, что $x < y$, существует отображение $u \in \mathfrak{S}$, область определения которого содержит и x и y (поскольку $\mathfrak{S}$ совершенно упорядоченно), и так как $v(x) = u(x) < u(y) = v(y)$, v является изоморфизмом отрезка S на отрезок $v(S)$, что и доказывает наше утверждение. Пусть тогда u_0 является максимальным элементом множества $\mathfrak{J}$ (теорема 2) и пусть S_0 — отрезок множества E, являющийся областью определения отображения u_0. Если мы покажем, что либо $S_0 = E$, либо $u_0(S_0) = F$, существование одного из изоморфизмов, указанных в формулировке теоремы, будет доказано. Рассуждая от противного, предположим, что $S_0 \neq E$ и $u_0(S_0) \neq F$; тогда существуют элемент $a \in E$ и элемент $b \in F$, такие, что $S_0 =]\leftarrow, a[$, $u_0(S_0) =]\leftarrow, b[$ (предложение 1); продолжим u_0 до отображения u_1 отрезка $]\leftarrow, a]$ в F, положив $u_1(a) = b$; так как u_1 является изоморфизмом отрезка $]\leftarrow, a]$ на отрезок $]\leftarrow, b]$, получим противоречие с предположением, что u_0 — максимальный элемент в $\mathfrak{J}$.

Утверждения единственности теоремы 3 вытекают из следующей леммы:

Лемма 4. Пусть E, F — *два вполне упорядоченных множества,* f *и* g — *два возрастающих отображения множества* E *в* F, *такие, что* $f(E)$ *является отрезком множества* F, *а* g *является строго возрастающим; тогда* $f(x) \leqslant g(x)$ *для любого* $x \in E$.

Рассуждая от противного, предположим, что множество таких $y \in E$, для которых $f(y) > g(y)$, не пусто. Тогда это множество имеет наименьший элемент a. Для $x < a$ имеем, по определению элемента a, $f(x) \leqslant g(x) < g(a) < f(a)$, так как g — строго возрастающее. Поскольку $f(E)$ является отрезком множества F, существует $z \in E$, такое, что $g(a) = f(z)$; так как f — возрастающее, соотношение $f(z) < f(a)$ влечет $z < a$, откуда $f(z) \leqslant g(z) < g(a) = f(z)$ — противоречие.

Следствие 1. *Единственным изоморфизмом вполне упорядоченного множества* E *на некоторый отрезок множества* E *является тождественное отображение множества* E *на себя.*

Достаточно, в самом деле, положить F = E в теореме 3.

Следствие 2. *Пусть* E *и* F — *два вполне упорядоченных множества; если существует изоморфизм* f *множества* E *на некоторый отрезок* T *множества* F *и изоморфизм* g *множества* F *на некоторый отрезок* S *множества* E, *то непременно* S = E, T = F *и* f *и* g — *обратные одно для другого отображения.*

В самом деле, $g \circ f$ — изоморфизм множества E на отрезок $g(T) \subset S$ множества E; в силу следствия 1 необходимо $g(T) = S = E$ и $g \circ f$ — тождественное отображение множества E; аналогично

усматриваем, что $f \circ g$ — тождественное отображение множества F, что и доказывает следствие.

Следствие 3. *Всякое подмножество* A *вполне упорядоченного множества* E *изоморфно некоторому отрезку множества* E.

В силу теоремы 3 достаточно доказать, что не существует изоморфизма g множества E на какой-нибудь отрезок множества A вида S_a; но g было бы тогда строго возрастающим отображением множества E в E, таким, что $g(a) \in S_a$, или, иначе говоря, $g(a) < a$; однако это неравенство противоречит лемме 4.

6. Лексикографические произведения

Пусть $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство упорядоченных множеств, множество индексов I которого *вполне упорядоченно*. Рассмотрим множество-произведение $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ и соотношение

„$x \in E$ и $y \in E$ и для наименьшего индекса $\iota \in I$, такого, что

$$\mathrm{pr}_\iota x \neq \mathrm{pr}_\iota y, \quad \mathrm{pr}_\iota x < \mathrm{pr}_\iota y“,$$

которое мы обозначим $R\{x, y\}$. Сразу же видно, что $R\{x, x\}$ эквивалентно $x \in E$, что $R\{x, y\}$ влечет ($R\{x, x\}$ и $R\{y, y\}$) и что ($R\{x, y\}$ и $R\{y, x\}$) влечет $x = y$. Кроме того, проверяется, что ($R\{x, y\}$ и $R\{y, z\}$) влечет $R\{x, z\}$ (достаточно рассмотреть наименьший индекс $\iota \in I$, для которого два из трех элементов $\mathrm{pr}_\iota x$, $\mathrm{pr}_\iota y$, $\mathrm{pr}_\iota z$ не равны); таким образом, соотношение $R\{x, y\}$ является *соотношением порядка на множестве-произведении* E. Это соотношение и порядок, им определенный, называются *соотношением лексикографического порядка* и *лексикографическим порядком* на E (полученными из данных порядков на I и на множествах E_ι); множество E, упорядоченное этим соотношением, называется *лексикографическим произведением* семейства упорядоченных множеств $(E_\iota)_{\iota \in I}$. Когда все множества E_ι — *совершенно упорядоченные*, их лексикографическое произведение также *совершенно упорядочено*.

Упражнения

¶ 1) Показать, что в множестве порядков на множестве E минимальными (по соотношению „Γ крупнее чем Γ′“ между Γ и Γ′) элементами являются совершенные порядки на E и что для любого порядка Γ на E график порядка Γ есть пересечение графиков совершенных порядков, более крупных, чем Γ (применить теорему 2). Вывести из этого, что всякое совершенно упорядоченное множество изоморфно некоторому подмножеству некоторого произведения совершенно упорядоченных множеств.

2) Пусть E — упорядоченное множество, $\mathfrak{B}$ — множество частей множества E, вполне упорядоченных индуцированным порядком. Показать, что в $\mathfrak{B}$ соотношение „X есть отрезок множества Y“ является соотношением порядка между X и Y и что по этому соотношению $\mathfrak{B}$ является индуктивным. Вывести из этого, что существуют вполне упорядоченные части множества E, не имеющие в E строгих мажорант.

3) Пусть E — упорядоченное множество. Показать, что существуют две непересекающиеся части A, B множества E, объединение которых есть E и такие, что A вполне упорядоченно, а B не имеет наименьшего элемента (взять, например, за B объединение частей множества E, не имеющих наименьшего элемента); °дать пример существования нескольких разложений множества E с теми же свойствами.$_\circ$

¶ 4) Упорядоченное множество F называется *частично вполне упорядоченным*, если всякая совершенно упорядоченная часть множества F вполне упорядоченна. Показать, что во всяком упорядоченном множестве E существует частично вполне упорядоченная часть F, конфинальная с E. (Рассмотреть на множестве $\mathfrak{F}$ частично вполне упорядоченных частей множества E соотношение порядка „$X \subset Y$ и никакой элемент множества $Y - X$ не мажорируется никаким элементом множества X“ между X и Y; показать, что $\mathfrak{F}$ индуктивно по этому соотношению.)

5) Пусть E — упорядоченное множество, $\mathfrak{J}$ — множество таких частей X множества E, что два любых различных элемента множества X не сравнимы. Пусть $\mathfrak{J}$ упорядочено соотношением, определенным в упр. 5 § 1. Показать, что если E индуктивное, то $\mathfrak{J}$ имеет наибольший элемент.

¶ 6) Пусть E — упорядоченное множество, f — отображение множества E в E, такое, что $f(x) \geqslant x$ для всякого $x \in E$.

а) Пусть $\mathfrak{G}$ — множество частей M множества E, обладающих следующими свойствами: 1° соотношение $x \in M$ влечет $f(x) \in M$; 2° если непустая часть H множества M имеет в E верхнюю грань, то эта грань принадлежит к M. Для всякого элемента $a \in E$ показать, что пересечение C_a множеств из $\mathfrak{G}$, содержащих a, принадлежит к $\mathfrak{G}$; кроме того, C_a вполне упорядочено, и если, C_a имеет в E верхнюю грань b, то $b \in C_a$ и $f(b) = b$; C_a называется *цепью* элемента a (относительно функции f). (Рассмотреть множество $\mathfrak{M}$, состоящее из пустого множества и частей X множества E, содержащих a, имеющих в E верхнюю грань m, и таких, что либо $m \notin X$, либо $f(m) > m$; применить к $\mathfrak{M}$ соответствующим образом лемму 3.) Затем, рассуждая от противного и используя тот факт, что C_a вполне упорядочено, доказать, что C_a содержится в любом $M \in \mathfrak{G}$.

б) Вывести из а), что если E индуктивно, то существует элемент $b \in E$, такой, что $f(b) = b$.

¶ 7) Пусть E — упорядоченное множество, F — множество *замыканий* (§ 1, упр. 13) в E. Упорядочим F, положив $u \leqslant v$, если $u(x) \leqslant v(x)$ для всех $x \in E$; F имеет наименьший элемент e — тождественное отображение множества E в E.

а) Показать, что $u \leqslant v$ в F тогда и только тогда, когда $I(v) \subset I(u)$, где $I(u)$ (соответственно $I(v)$) обозначает множество элементов множества E, инвариантных относительно u (соответственно v).

б) Показать, что если любые два элемента множества E имеют в E нижнюю грань, то любые два элемента множества F имеют в F нижнюю грань. Если E — полная сеть (§ 1, упр. 11), то и F таково.

в) Показать, что если E индуктивное (по соотношению $\leqslant$), то любые два элемента u, v множества F имеют в F верхнюю грань (показать, что если положить $f(x) = v(u(x))$ и обозначить через $w(x)$ наибольший элемент цепи элемента x относительно функции f (упр. 6), то w — замыкание, являющееся верхней гранью отображений u и v).

8) Чтобы ординальная сумма $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ (§ 1, упр. 3) была вполне упорядоченной, необходимо и достаточно, чтобы I и каждое E_ι были вполне упорядоченными.

9) Пусть I — упорядоченное множество, $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство упорядоченных множеств, каждое из которых равно одному и тому же упорядоченному множеству E. Показать, что ординальная сумма $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ (§ 1, упр. 3) изоморфна лексикографическому произведению семейства $(F_\lambda)_{\lambda \in \{\alpha, \beta\}}$, где множество $\{\alpha, \beta\}$ из двух различных элементов вполне упорядочено соотношением с графиком $\{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \beta)\}$ и $F_\alpha = I$, $F_\beta = E$; это произведение называется *лексикографическим произведением множества* E *на множество* I и обозначается $E \cdot I$ [1]).

¶ °10) Пусть I — вполне упорядоченное множество, $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство упорядоченных множеств, каждое из которых содержит по крайней мере два различных сравнимых элемента. Чтобы лексикографическое произведение множеств E_ι было вполне упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы каждое E_ι было вполне упорядоченным и чтобы I было *конечным* (если I бесконечно, определить в лексикографическом произведении множеств E_ι строго убывающую бесконечную последовательность).$_\circ$

¶ 11) Пусть I — совершенно упорядоченное множество индексов, $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство упорядоченных множеств с множеством индексов I. Определим на $E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$ следующее соотношение $R\{x, y\}$: „множество индексов $\iota \in I$, таких, что $pr_\iota x \neq pr_\iota y$, вполне упорядочено, и для наименьшего элемента этого множества $pr_\iota x < pr_\iota y$". Показать, что $R\{x, y\}$ есть соотношение порядка между x и y в E. Если множества E_ι совершенно упорядочены, показать, что связные компоненты множества E относительно соотношения „x и y сравнимы" (гл. II, § 6, упр. 10) также являются совершенно упорядоченными множествами. Предположим, что каждое E_ι имеет не меньше двух элементов; для того чтобы E было совершенно упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы I было вполне упорядоченным и чтобы множества E_ι были совершенно упорядоченными (использовать упр. 3); в этом случае E является лексикографическим произведением множеств E_ι.

12) а) Пусть $Is(\Gamma, \Gamma')$ есть соотношение „Γ есть порядок (на E) и Γ′ есть порядок (на E′), и существует изоморфизм множества E, упорядоченного порядком Γ, на множество E′, упорядоченное порядком Γ′".

Показать, что соотношение $Is(\Gamma, \Gamma')$ есть соотношение эквивалентности во всяком множестве, элементы которого являются порядками [2]). Терм $\tau_\Delta(Is(\Gamma, \Delta))$ есть порядок, называемый *порядковым типом* порядка Γ и обозначаемый $Ord(\Gamma)$ или, допуская вольность обозначений, $Ord(E)$. Для того чтобы два упорядоченных множества были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их порядковые типы были равны.

[1]) В подлиннике E.I. — *Прим. ред.*

[2]) Это неверно. Действительно, согласно определениям гл. II, § 6, n° 1, если $Is(\Gamma, \Gamma')$ есть соотношение эквивалентности в множестве M, то справедливо соотношение $Is(\Gamma, \Gamma) \Rightarrow \Gamma \in M$ и, следовательно, M есть множество всех порядков. Однако такого множества не существует; в противном случае множество объектов вида $pr_2 \Gamma$ для $\Gamma \in M$ было бы множеством всех множеств (см. гл. II, § 1, n° 7, замечание). Фразу, к которой делается настоящее примечание, можно исправить, например, заменив ее на следующую: „Показать, что соотношение $(Is(\Gamma, \Gamma')$ и $\Gamma \in M$ и $\Gamma' \in M)$ является соотношением эквивалентности во всяком множестве M, элементами которого служат порядки". — *Прим. ред.*

б) Пусть $R\{\lambda, \mu\}$ есть соотношение „λ есть порядковый тип и μ есть порядковый тип и существует изоморфизм множества, упорядоченного порядковым типом λ, на некоторое подмножество множества, упорядоченного порядковым типом μ".

Показать, что $R\{\lambda, \mu\}$ есть соотношение предпорядка между λ и μ; обозначим его $\lambda \prec \mu$.

в) Пусть I — упорядоченное множество, $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство порядковых типов с множеством индексов I. Назовем *ординальной суммой* порядковых типов λ_ι $(\iota \in I)$ и обозначим $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota$ порядковый тип ординальной суммы (§ 1, упр. 3) семейства множеств, упорядоченных порядковыми типами λ_ι. Если $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство упорядоченных множеств, то порядковый тип множества $\sum_{\iota \in I} E_\iota$ есть $\sum_{\iota \in I} Ord(E_\iota)$. Если I — ординальная сумма семейства множеств $(J_\varkappa)_{\varkappa \in K}$, показать, что $\sum_{\varkappa \in K} \left(\sum_{\iota \in J_\varkappa} \lambda_\iota \right) = \sum_{\iota \in I} \lambda_\iota$.

г) Пусть I — вполне упорядоченное множество индексов; назовем *ординальным произведением* семейства $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ порядковых типов и обозначим $\mathbf{P}_{\iota \in I} \lambda_\iota$ порядковый тип лексикографического произведения семейства множеств, упорядоченных порядковыми типами λ_ι. Если $(E_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство упорядоченных множеств, то порядковый тип лексикографического произведения этого семейства есть $\mathbf{P}_{\iota \in I} Ord(E_\iota)$. Если I есть ординальная сумма семейства вполне упорядоченных множеств $(J_\varkappa)_{\varkappa \in K}$, где K вполне упорядочено, показать, что $\mathbf{P}_{\varkappa \in K} \left(\mathbf{P}_{\iota \in J_\varkappa} \lambda_\iota \right) = \mathbf{P}_{\iota \in I} \lambda_\iota$.

д) Обозначим $\lambda + \mu$ (соответственно $\mu\lambda$ [1])) ординальную сумму (соответственно ординальное произведение) семейства $(\xi_\iota)_{\iota \in J}$, где $J = \{\alpha, \beta\}$ — множество из двух различных элементов, упорядоченное соотношением с графиком $\{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \beta)\}$, и где $\xi_\alpha = \lambda$, $\xi_\beta = \mu$. Показать, что если I — вполне упорядоченное множество порядкового типа λ, а $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство порядковых типов, таких, что $\mu_\iota = \mu$ для любого $\iota \in I$, то $\sum_{\iota \in I} \mu_\iota = \mu\lambda$. Имеем $(\lambda + \mu) + \nu = \lambda + (\mu + \nu)$, $(\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$ и $\lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$ (но, вообще говоря, $\lambda + \mu \neq \mu + \lambda$, $\lambda\mu \neq \mu\lambda$, $(\lambda + \mu)\nu \neq \lambda\nu + \mu\nu$).

е) Пусть $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ и $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ — два семейства порядковых типов с одним и тем же упорядоченным множеством индексов I. Показать, что если $\lambda_\iota \prec \mu_\iota$ для всякого $\iota \in I$, то $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota \prec \sum_{\iota \in I} \mu_\iota$ и (если I вполне упорядочено) $\mathbf{P}_{\iota \in I} \lambda_\iota \prec \mathbf{P}_{\iota \in I} \mu_\iota$. Если J — подмножество множества I, показать,

[1]) Вместо μλ будет также употребляться запись $\mu \cdot \lambda$ (во французском оригинале $\mu . \lambda$; ср. подстрочное примечание к гл. III, § 3, n° 3, стр. 192). — *Прим. ред.*

что $\sum_{\iota \in J} \lambda_\iota < \sum_{\iota \in I} \lambda_\iota$ и (если I вполне упорядочено и порядковые типы λ_ι не пусты) $\mathbf{P}_{\iota \in J} \lambda_\iota < \mathbf{P}_{\iota \in I} \lambda_\iota$.

ж) Обозначим через λ^* порядковый тип множества, упорядоченного порядком, противоположным порядку λ; имеем $(\lambda^*)^* = \lambda$, $\left(\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota\right)^* = \sum_{\iota \in I^*} \lambda_\iota^*$, где I^* обозначает множество I, наделенное порядком, противоположным порядку, заданному первоначально на I.

¶ 13) Назовем *ординальным числом* порядковый тип вполне упорядоченного множества (упр. 12).

а) Показать, что если $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$—семейство ординальных чисел с вполне упорядоченным I, то ординальная сумма $\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota$ есть ординальное число; °если, кроме того, I конечно, ординальное произведение $\mathbf{P}_{\iota \in I} \lambda_\iota$ — также ординальное число (упр. 10).° Обозначим (допуская вольность речи, ср. § 3) порядковый тип пустого множества через 0, порядковый тип множества из одного элемента через 1; показать, что $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ и $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ для любого ординального числа α.

б) Показать, что соотношение „λ — ординальное число и μ — ординальное число и $\lambda \prec \mu$" есть *соотношение полного порядка*; обозначим его $\lambda \leqslant \mu$ (заметить, что если λ и μ — ординальные числа, то соотношение $\lambda \prec \mu$ эквивалентно соотношению „λ равно порядковому типу некоторого сегмента ординального числа μ" (следствие 3 теоремы 3); имея семейство $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ ординальных чисел, рассмотреть на I структуру вполне упорядоченного множества и перейти к ординальной сумме семейства множеств, упорядоченных ординальными числами λ_ι; использовать, наконец, предложение 2).

в) Пусть α—ординальное число; показать, что соотношение „ξ—ординальное число и $\xi \leqslant \alpha$" является коллективизирующим по ξ и что множество O_α ординальных чисел, строго меньших α, является вполне упорядоченным множеством, таким, что $\mathrm{Ord}(O_\alpha) = \alpha$. Ординальное число α и миожество O_α часто отождествляются.

г) Показать, что для всякого семейства ординальных чисел $(\xi_\iota)_{\iota \in I}$ существует и единственно ординальное число α, такое, что соотношение „λ — ординальное число и для всякого $\iota \in I$ $\xi_\iota \leqslant \lambda$" эквивалентно $\alpha \leqslant \lambda$. Допуская вольность речи, будем говорить, что α — *верхняя грань* семейства ординальных чисел $(\xi_\iota)_{\iota \in I}$, и положим $\alpha = \sup_{\iota \in I} \xi_\iota$ (это наибольший элемент объединения множества $\{\alpha\}$ и множества ординальных чисел ξ_ι). Верхняя грань множества ординальных чисел $\xi < \alpha$ есть α или ординальное число β, такое, что $\alpha = \beta + 1$; в этом последнем случае β называют *предшественником* ординального числа α.

14) а) Пусть α и β — два ордииальных числа. Показать, что неравенство $\alpha < \beta$ эквивалентно $\alpha + 1 \leqslant \beta$ и влечет $\xi + \alpha < \xi + \beta$, $\alpha + \xi \leqslant \beta + \xi$, $\alpha\xi \leqslant \beta\xi$ для всякого ординального числа ξ и $\xi\alpha < \xi\beta$, если $\xi > 0$.

б) Вывести из а), что не существует множества, элементом которого являлось бы всякое ординальное число (использовать упр. 13).

в) Пусть α, β, μ — три ординальных числа. Показать, что каждое из соотношений $\mu + \alpha < \mu + \beta$, $\alpha + \mu < \beta + \mu$ влечет $\alpha < \beta$; то же самое для каждого из соотношений $\mu\alpha < \mu\beta$, $\alpha\mu < \beta\mu$, если $\mu > 0$.

г) Показать, что соотношение $\mu + \alpha = \mu + \beta$ влечет $\alpha = \beta$; то же самое для $\mu\alpha = \mu\beta$, если $\mu > 0$.

д) Для того чтобы для двух ординальиых чисел α, β было $\alpha \leqslant \beta$, необходимо и достаточно, чтобы существовало ординальное число ξ,

такое, что $\beta = \alpha + \xi$. Это ординальное число единственно и $\xi \leqslant \beta$; обозначим его $(-\alpha) + \beta$.

е) Пусть α, β, ζ — три ординальных числа, такие, что $\zeta < \alpha\beta$. Показать, что существуют два ординальных числа ξ, η, такие, что $\zeta = \alpha\eta + \xi$ и $\xi < \alpha$, $\eta < \beta$ (см. следствие 3 теоремы 3). Кроме того, этими условиями ординальные числа ξ и η определены однозначно.

¶ 15) Ординальное число $\rho > 0$ называется *неразложимым*, если не существует такой пары ординальных чисел ξ, η, что $\xi < \rho$, $\eta < \rho$ и $\xi + \eta = \rho$.

а) Чтобы ρ было неразложимым, необходимо и достаточно, чтобы для всякого ординального числа ξ, такого, что $\xi < \rho$, было $\xi + \rho = \rho$.

б) Показать, что если $\rho > 1$ — неразложимое ординальное число и $\alpha > 0$ — ординальное число, то $\alpha\rho$ неразложимо, и обратно (использовать упр. 14е).

в) Если ρ неразложимо и $0 < \alpha < \rho$, показать, что $\rho = \alpha\xi$, где ξ — некоторое неразложимое ординальное число (использовать упр. 14а).

г) Пусть $\alpha > 0$ — ординальное число; показать, что среди неразложимых ординальных чисел $\leqslant \alpha$ существует наибольшее неразложимое ординальное число (рассмотреть разложения $\alpha = \rho + \xi$, где ρ неразложимо).

д) Если E — какое-нибудь множество неразложимых ординальных чисел, вывести из г), что верхняя грань множества E (упр. 13г)) — иеразложимое ординальное число.

¶ 16) Пусть дано ординальное число α_0; терм $f(\xi)$ называется *ординальным функциональным символом* (*по* ξ), *определенным для* $\xi \geqslant \alpha_0$, если соотношение „ξ — ординальное число и $\xi \geqslant \alpha_0$" влечет соотношение „$f(\xi)$ — ординальное число"; символ $f(\xi)$ называется *нормальным*, если соотношение $\alpha_0 \leqslant \xi < \eta$ влечет $f(\xi) < f(\eta)$ и для всякого семейства $(\xi_\iota)_{\iota \in I}$ ординальных чисел $\geqslant \alpha_0$ имеем $\sup_{\iota \in I} f(\xi_\iota) = f\left(\sup_{\iota \in I} \xi_\iota\right)$ (см. упр. 13г)).

а) Показать, что для всякого ординального числа $\alpha > 0$, термы $\alpha + \xi$ и $\alpha\xi$ суть нормальные функциональные символы, определенные для $\xi \geqslant 0$ (использовать упр. 14е)).

б) Пусть $w(\xi)$ — ординальный функциональный символ, определенный для $\xi \geqslant \alpha_0$, такой, что $w(\xi) \geqslant \xi$ и $\alpha_0 \leqslant \xi < \eta$ влечет $w(\xi) < w(\eta)$. Пусть, с другой стороны, $g(\xi, \eta)$ — такой терм, что соотношение „ξ и η — ординальные числа $\geqslant \alpha_0$" влечет соотношение „$g(\xi, \eta)$ — такое ординальное число, что $g(\xi, \eta) > \xi$". Определить терм $f(\xi, \eta)$ со следующими двумя свойствами: 1° для всякого ординального числа $\xi \geqslant \alpha_0$ $f(\xi, 1) = w(\xi)$; 2° для всякого ординального числа $\xi \geqslant \alpha_0$ и для всякого ординального числа $\eta > 1$ $f(\xi, \eta) = \sup_{\zeta < \eta} g(f(\xi, \zeta), \xi)$ (использовать критерий C60, n° 2). Показать, что если $f_1(\xi, \eta)$ — другой терм с теми же свойствами, что и f, то $f(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta)$ для $\xi \geqslant \alpha_0$ и $\eta \geqslant 1$. Доказать, что для всякого ординального числа $\xi \geqslant \alpha_0$ $f(\xi, \eta)$ — нормальный функциональный символ по η (для $\eta \geqslant 1$). Показать, что $f(\xi, \eta) \geqslant \xi$ для $\eta \geqslant 1$ и $\xi \geqslant \alpha_0$ и $f(\xi, \eta) \geqslant \eta$ для $\xi \geqslant \sup(\alpha_0, 1)$ и $\eta \geqslant 1$. Кроме того, для всякой пары ординальных чисел (α, β), такой, что $\alpha > 0$, $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\beta \geqslant w(\alpha)$, существует и единственно ординальное число ξ, такое, что $f(\alpha, \xi) \leqslant \beta < f(\alpha, \xi + 1)$, причем $\xi \leqslant \beta$.

в) Если положить $\alpha_0 = 0$, $w(\xi) = \xi + 1$, $g(\xi, \eta) = \xi + 1$, то $f(\xi, \eta) = \xi + \eta$. Если положить $\alpha_0 = 1$, $w(\xi) = \xi$, $g(\xi, \eta) = \xi + \eta$, то $f(\xi, \eta) = \xi\eta$.

г) Показать, что если соотношения $\alpha_0 \leqslant \xi \leqslant \xi'$, $\alpha_0 \leqslant \eta \leqslant \eta'$ влекут $g(\xi, \eta) \leqslant g(\xi', \eta')$, то соотношения $\alpha_0 \leqslant \xi \leqslant \xi'$, $1 \leqslant \eta \leqslant \eta'$ влекут $f(\xi, \eta) \leqslant f(\xi', \eta')$. Если соотношения $\alpha_0 \leqslant \xi \leqslant \xi'$ и $\alpha_0 \leqslant \eta < \eta'$ влекут $g(\xi, \eta) < g(\xi, \eta')$ и $g(\xi, \eta) \leqslant g(\xi', \eta)$, то соотношения $\alpha_0 \leqslant \xi < \xi'$ и $\eta \geqslant 0$ влекут $f(\xi, \eta + 1) < f(\xi', \eta + 1)$.

д) Предположим, что $w(\xi)=\xi$ и что соотношения $\alpha_0 \leqslant \xi \leqslant \xi'$ и $\alpha_0 \leqslant \eta < \eta'$ влекут $g(\xi, \eta) < g(\xi, \eta')$ и $g(\xi, \eta) \leqslant g(\xi', \eta)$. Предположим, кроме того, что для всякого $\xi \geqslant \alpha_0$ $g(\xi, \eta)$ — нормальный функциональный символ по η (для $\eta \geqslant \alpha_0$) и что для $\xi \geqslant \alpha_0$, $\eta \geqslant \alpha_0$, $\zeta \geqslant \alpha_0$ справедливо соотношение ассоциативности $g(g(\xi, \eta), \zeta) = g(\xi, g(\eta, \zeta))$. Показать тогда, что для $\xi \geqslant \alpha_0$, $\eta \geqslant 1$, $\zeta \geqslant 1$ $g(f(\xi, \eta), f(\xi, \zeta)) = f(\xi, \eta+\zeta)$ („дистрибутивность" символа g относительно f) и $f(f(\xi, \eta), \zeta) = f(\xi, \eta\zeta)$ („ассоциативность" символа f).

¶ 17) В методе определения, описанном в упр. 16 б), возьмем $\alpha_0 = 1+1$ (допуская вольность речи, обозначим α_0 через 2), $w(\xi)=\xi$, $g(\xi, \eta) = \xi\eta$. Положим тогда $f(\xi, \eta) = \xi^\eta$. Положим, кроме того, $\alpha^0 = 1$ для всякого ординального числа α, $0^\beta = 0$ и $1^\beta = 1$ для всякого ординального числа $\beta \geqslant 1$.

а) Показать, что для $\alpha > 1$ и $\beta < \beta'$ $\alpha^\beta < \alpha^{\beta'}$ и что для всякого ординального числа $\alpha > 1$ α^ξ — нормальный функциональный символ по ξ. Кроме того, для $0 < \alpha \leqslant \alpha'$ $\alpha^\beta \leqslant \alpha'^\beta$.

б) Показать, что $\alpha^\xi \cdot \alpha^\eta = \alpha^{\xi+\eta}$ и $(\alpha^\xi)^\eta = \alpha^{\xi\eta}$.

в) Показать, что если $\alpha \geqslant 2$ и $\beta \geqslant 1$, то $\alpha^\beta \geqslant \alpha\beta$.

г) Для всякой пары ординальных чисел $\beta \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 2$ существуют три ординальных числа ξ, γ, δ, определенные однозначно, такие, что $\beta = \alpha^\xi\gamma + \delta$, $\gamma < \alpha$ и $\delta < \alpha^\xi$.

18) °Пусть α, β — два ординальных числа и пусть E и F — два вполне упорядоченных множества, таких, что $\mathrm{Ord}(E) = \alpha$, $\mathrm{Ord}(F) = \beta$. Рассмотрим в множестве E^F отображений множества F в E подмножество G таких отображений g, что $g(y)$, кроме, быть может, конечного числа значений y, равен наименьшему элементу множества E. Если F^* — множество, полученное наделением множества F противоположным порядком, показать, что G — связная компонента (относительно отношения „x и y сравнимы"; см. гл. II, § 6, упр. 10) в произведении E^{F^*}, наделенном порядком, определенным в упр. 11, и что G вполне упорядоченно; кроме того, доказать, что $\mathrm{Ord}(G) = \alpha^\beta$ (использовать свойство единственности из упр. 16б).°

19) Множество E называется *псевдоординальным*, если оно обладает следующими свойствами: 1° $\varnothing \in E$; 2° соотношение „$y \in E$ и $x \in y$" влечет $x \in E$; 3° соотношение „$x \in E$ и $y \in E$ и ($x = y$ или $x \in y$)" является соотношением полного порядка в E. Показать, что для всякого ординального числа α существует и единственно псевдоординальное множество E_α, такое, что $\mathrm{Ord}(E_\alpha) = \alpha$ (заметить, что всякий элемент псевдоординального множества E есть множество элементов, строго меньших этого элемента в E, и использовать критерий C60); в частности, псевдоординальные множества, имеющие порядковые типы 0, 1, $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, это соответственно $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

§ 3. Равномощные множества. Кардинальные числа

1. Кардинальное число множества

Определение 1. *Мы будем говорить, что множество* X *равномощно множеству* Y, *если существует биекция множества* X *на* Y. *Соотношение „*X *равномощно множеству* Y*" мы будем обозначать через* Eq(X, Y).

Ясно, что соотношения Eq(X, Y) и Eq(Y, X) эквивалентны, иначе говоря, соотношение Eq(X, Y) *симметрично*; когда это соотношение истинно, мы будем также говорить, что X и Y *равномощны*. С другой стороны, Eq(X, X) истинно[1]). Наконец, соотношение Eq(X, Y) *транзитивно*, так как композиция двух биекций является биекцией (гл. II, § 3, теорема 1); таким образом, это соотношение является *соотношением эквивалентности*, рефлексивным во всяком множестве[2]).

Из изложенного вытекает, что если X и Y равномощны, то соотношение $(\forall Z)(\mathrm{Eq}(X, Z) \Leftrightarrow \mathrm{Eq}(Y, Z))$ истинно. Но схема S7 (гл. 1, § 5, n° 1) дает следующую аксиому

$$((\forall Z)(\mathrm{Eq}(X, Z) \Leftrightarrow \mathrm{Eq}(Y, Z))) \Rightarrow (\tau_Z(\mathrm{Eq}(X, Z)) = \tau_Z(\mathrm{Eq}(Y, Z))).$$

Таким образом, если X и Y равномощны, то

$$\tau_Z(\mathrm{Eq}(X, Z)) = \tau_Z(\mathrm{Eq}(Y, Z)).$$

Введем следующее определение:

Определение 2. *Множество* $\tau_Z(\mathrm{Eq}(X, Z))$ *называется кардинальным числом множества* X (*или мощностью* множества X) *и обозначается* Card(X).

Так как Eq(X, X) истинно, Card(X) *равномощно* множеству X (гл. 1, § 4, схема S5). Таким образом, мы доказали следующий результат:

Предложение 1. *Для того чтобы два множества* X *и* Y *были равномощны, необходимо и достаточно, чтобы их кардинальные числа были равны.*

Примеры. 1) Обозначим через 0 кардинальное число Card($\varnothing$). Так как единственное множество, равномощное множеству $\varnothing$, есть $\varnothing$ (гл. II, § 3, n° 1 и n° 4), то $0 = \mathrm{Card}(\varnothing) = \varnothing$.

2) Все множества из одного элемента равномощны, ибо $\{(a, b)\}$ является графиком биекции множества $\{a\}$ на множество $\{b\}$; в частности, они равномощны множеству $\{\varnothing\}$. Обозначим через 1

---

[1]) Поскольку соотношение Eq(X, X) истинно для всякого X, оно не является коллективизирующим по X; в противном случае существовало бы множество всех объектов, что невозможно в силу замечания из гл. II, § 1, n° 7. По этой же причине Eq(X, Y) не обладает графиком (ср. замечание из гл. II, § 3, n° 1). — *Прим. ред.*

[2]) Рефлексивность соотношения Eq(X, Y) в множестве A означает, согласно гл. II, § 6, n° 1, что соотношения Eq(X, X) и X ∈ A эквивалентны. Но тогда соотношение Eq(X, X) было бы коллективизирующим по X, что, как отмечено в предыдущем подстрочном примечании, неверно. Поэтому утверждение автора, что Eq(X, Y) рефлексивно во всяком множестве, неверно. Вместе с тем верно следующее утверждение: „для всякого множества A соотношение (Eq(X, Y) и X ∈ A и Y ∈ A) рефлексивно в A". — *Прим. ред.*

кардинальное число

$$\mathrm{Card}(\{\varnothing\}) = \tau_Z(\mathrm{Eq}(\{\varnothing\}, Z))$$ [1].

3) Обозначим через 2 кардинальное число $\mathrm{Card}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$; это кардинальное число всякого двухэлементного множества, элементы которого различны.

4) °Гильбертово пространство счетного типа равномощно множеству действительных чисел.$_{\circ}$

2. *Соотношение порядка между кардинальными числами*

Соотношение „X равномощно некоторой части множества Y“ эквивалентно „существует инъекция множества X в Y“; оно эквивалентно также соотношению „Card (X) равномощно некоторой части множества Card (Y)“ (гл. II, § 3, теорема 1).

Теорема 1. *Соотношение* $R\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$:

„$\mathfrak{x}$ и $\mathfrak{y}$ — кардинальные числа и $\mathfrak{x}$ равномощно некоторой части множества $\mathfrak{y}$“ — соотношение полного порядка (§ 2, n° 1).

Так как $R\{\mathfrak{x}, \mathfrak{x}\}$ истинно для всякого кардинального числа $\mathfrak{x}$, все сводится к тому, чтобы доказать, что для любого множества E кардинальных чисел соотношение „$\mathfrak{x} \in E$ и $\mathfrak{y} \in E$ и $R\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$“ является соотношением полного порядка в E. Рассмотрим множество $A = \bigcup_{\mathfrak{x} \in E} \mathfrak{x}$; всякое кардинальное число $\mathfrak{x} \in E$ является, таким образом, частью множества A. На A существует соотношение полного порядка (§ 2, теорема 1), обозначим его $x \leqslant y$. Всякая часть множества A равномощна некоторому отрезку множества A (§ 2, следствие 3 теоремы 3). Для произвольного кардинального числа $\mathfrak{x} \in E$ рассмотрим множество отрезков множества A, равномощных множеству $\mathfrak{x}$; это множество отрезков не пусто и имеет, следовательно, наименьший элемент $\varphi(\mathfrak{x})$ (§ 2, предложение 2). Соотношение

„$\mathfrak{x} \in E$ и $\mathfrak{y} \in E$ и $\mathfrak{x}$ равномощно некоторой части множества $\mathfrak{y}$“ *эквивалентно* соотношению

$$„\mathfrak{x} \in E \ \text{ и } \ \mathfrak{y} \in E \ \text{ и } \ \varphi(\mathfrak{x}) \subset \varphi(\mathfrak{y})“.$$

В самом деле, оно, очевидно, следует из этого второго соотношения; с другой стороны, если $\mathfrak{x}$ равномощно некоторому подмножеству множества $\mathfrak{y}$, то не может быть $\varphi(\mathfrak{y}) \subset \varphi(\mathfrak{x})$ и $\varphi(\mathfrak{y}) \neq \varphi(\mathfrak{x})$, ибо тогда существовал бы отрезок множества $\varphi(\mathfrak{y})$, равномощный множеству $\mathfrak{x}$ (§ 2, следствие 3 теоремы 3), что противоречит определению множества $\varphi(\mathfrak{x})$. Так как множество отрезков множества A вполне упорядочено включением (§ 2, теорема 2), теорема доказана.

Обозначим через $\mathfrak{x} \leqslant \mathfrak{y}$ соотношение $R\{\mathfrak{x}, \mathfrak{y}\}$. Для того чтобы множество X было равномощно некоторой части множества Y, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathrm{Card}(Y)$.

Ясно, что $0 \leqslant \mathfrak{x}$ для всякого кардинального числа $\mathfrak{x}$ и $1 \leqslant \mathfrak{x}$ для всякого кардинального числа $\mathfrak{x} \neq 0$.

Следствие 1. *Из любых двух множеств одно равномощно некоторой части другого.*

Следствие 2. *Если каждое из двух множеств равномощно некоторой части другого множества, то эти множества равномощны.*

Замечание. Для любого множества A существует множество, элементами которого являются кардинальные числа Card (X) всех подмножеств X множества A; в самом деле, это множество объектов вида Card (X) для $X \in \mathfrak{P}(A)$ (гл. II, § 1, n° 6). Для всякого кардинального числа $\mathfrak{a}$ соотношение „$\mathfrak{x}$ — кардинальное число и $\mathfrak{x} \leqslant \mathfrak{a}$“ является, таким образом, коллективизирующим по $\mathfrak{x}$, ибо оно эквивалентно соотношению „$\mathfrak{x}$ имеет вид Card (X) для $X \subset \mathfrak{a}$“; множество кардинальных чисел $\mathfrak{x}$, удовлетворяющих этому соотношению, называется *множеством (всех) кардинальных чисел* $\leqslant \mathfrak{a}$.

---

[1] Разумеется, не следует смешивать математический *терм, обозначенный* (гл. I, § 1, n° 1) символом „1“, и слово „один“ обычного языка. Терм, обозначенный через „1“, равен в силу определения, данного выше, терму, обозначенному символом

$$\tau_Z((\exists u)(\exists U)(u = (U, \{\varnothing\}, Z) \text{ и } U \subset \{\varnothing\} \times Z$$
$$\text{и } (\forall x)((x \in \{\varnothing\}) \Rightarrow (\exists y)((x, y) \in U)) \text{ и } (\forall x)(\forall y)(\forall y')(((x, y) \in U$$
$$\text{и } (x, y') \in U) \Rightarrow (y = y')) \text{ и } (\forall y)((y \in Z) \Rightarrow (\exists x)((x, y) \in U))$$
$$\text{и } (\forall x)(\forall x')(\forall y)(((x, y) \in U \text{ и } (x', y) \in U) \Rightarrow (x = x')))).$$

Грубая оценка показывает, что терм, *обозначенный* таким образом, является знакосочетанием из нескольких десятков тысяч знаков (каждый из которых есть один из знаков τ, $\square$, $\vee$, $\urcorner$, $=$, $\in$, $\supset$). [В приведенном сокращенном обозначении соотношение, заключенное в самые *внешние* скобки (т. е. идущее после знака τ_Z), выражает существование биекции множества $\{\varnothing\}$ на множество Z (т. е. является соотношением $\mathrm{Eq}(\{\varnothing\}, Z)$). Именно на интуитивном уровне утверждается существование такого соответствия u с графиком U, которое и является искомой биекцией. После кванторов существования $(\exists u)$ и $(\exists U)$ записано соотношение, служащее формальной записью определения биекции $\{\varnothing\}$ на Z, согласно гл. II, § 3, n° 7. Это соотношение состоит из соединенных союзом „и“ шести соотношений, первое из которых означает, что u есть тройка $(U, \{\varnothing\}, Z)$; второе — что U есть подмножество произведения второй и третьей координаты тройки u (тем самым u оказывается соответствием между $\{\varnothing\}$ и Z); третье — что соответствие u определено для всех элементов множества $\{\varnothing\}$; четвертое — что график соответствия u функционален; пятое — что функция u сюръективна; шестое — что функция u инъективна. Это последнее, шестое, соотношение добавлено переводчиком; оно отсутствует во французском оригинале (может быть, потому, что всякая функция, определенная на $\{\varnothing\}$, инъективна). Нам представляется, однако, что, поскольку свойство инъективности участвует в определении биекции, запись этого свойства должна присутствовать в соотношении $\mathrm{Eq}(\{\varnothing\}, Z)$. — *Прим. ред.*]

Предложение 2. *Для всякого семейства* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ *кардинальных чисел существует и единственно кардинальное число* $\mathfrak{b}$, *такое, что, во-первых,* $\mathfrak{a}_\iota \leqslant \mathfrak{b}$ *для всякого* $\iota \in I$ *и, во-вторых, всякое кардинальное число* $\mathfrak{c}$, *для которого* $\mathfrak{a}_\iota \leqslant \mathfrak{c}$ *для всех* $\iota \in I$, *удовлетворяет соотношению* $\mathfrak{c} \geqslant \mathfrak{b}$.

В самом деле, существует множество E, содержащее все множества $\mathfrak{a}_\iota$ [например, сумма этих множеств (гл. II, § 4, п° 8)], откуда $\mathfrak{a}_\iota \leqslant \mathfrak{a} = \mathrm{Card}(E)$ для всякого $\iota \in I$. Так как множество F кардинальных чисел $\leqslant \mathfrak{a}$ вполне упорядочено и все $\mathfrak{a}_\iota$ принадлежат к F, семейство $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ в этом множестве имеет верхнюю грань $\mathfrak{b}$. Кроме того, пусть $\mathfrak{c}$ — кардинальное число $\geqslant \mathfrak{a}_\iota$ для всякого $\iota \in I$; если $\mathfrak{c} < \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, то $\mathfrak{c} \in F$ и неравенство $\mathfrak{a}_\iota \leqslant \mathfrak{c}$ противоречит тогда определению верхней грани семейства $(\mathfrak{a}_\iota)$ в упорядоченном множестве F; предложение доказано.

Допуская вольность речи, будем говорить, что кардинальное число $\mathfrak{b}$ есть *верхняя грань* семейства $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ кардинальных чисел, и обозначать его $\sup_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota$.

Предложение 3. *Пусть* X *и* Y — *множества. Если существует сюръекция* f *множества* X *на множество* Y, *то* Card (Y) $\leqslant$ Card (X).

В самом деле, существует иссечение s, ассоциированное с f (гл. II, § 3, предл. 8), и s является инъекцией множества Y в X.

3. Операции над кардинальными числами

Определение 3. *Пусть* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство кардинальных чисел. Кардинальное число произведения* (соответственно *суммы*) *множеств* $\mathfrak{a}_\iota$ *называется кардинальным произведением* (соответственно *кардинальной суммой*) *кардинальных чисел* $\mathfrak{a}_\iota$ *и обозначается* $\mathbf{P}_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota$ $\left(\text{соответственно } \sum_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota\right)$.

Когда нет никакой опасности смешения, говорят просто „произведение“ и „сумма“ вместо „кардинальное произведение“ и „кардинальная сумма“ и пишут $\prod_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota$ вместо $\mathbf{P}_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota$ (ср. упр. 2).

Предложение 4. *Пусть* $(E_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство множеств*, P — *его произведение*, S — *его сумма*, $\mathfrak{a}_\iota$ — *кардинальное число множества* E_ι. *Кардинальное число множества* P (соответственно S) *есть кардинальное произведение* (соответственно *кардинальная сумма*) *семейства* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$.

В самом деле, существует биекция множества P (соответственно S) на произведение множеств $\mathfrak{a}_\iota$ (соответственно на сумму множеств $\mathfrak{a}_\iota$) (гл. II, § 4, предложение 10 и § 5, следствие предложения 11).

Следствие. *Для всякого семейства* $(E_\iota)_{\iota\in I}$ *множеств кардинальное число объединения* $\bigcup_{\iota\in I} E_\iota$ *меньше или равно сумме* $\sum_{\iota\in I} \mathrm{Card}(E_\iota)$.

В самом деле, существует отображение суммы S множеств E_ι на их объединение (гл. II, § 4, п° 8); следствие вытекает, таким образом, из предложений 3 и 4.

Предложение 5. а) *Пусть* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство кардинальных чисел и пусть* f — *биекция множества* K *на множество* I; *тогда*

$$\sum_{\varkappa\in K} \mathfrak{a}_{f(\varkappa)} = \sum_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota \quad \text{и} \quad \mathbf{P}_{\varkappa\in K} \mathfrak{a}_{f(\varkappa)} = \mathbf{P}_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota.$$

б) *Пусть* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство кардинальных чисел и* $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ — *разбиение множества* I; *тогда* („ассоциативность суммы и произведения“)

$$\sum_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota = \sum_{\lambda\in L} \left(\sum_{\iota\in J_\lambda} \mathfrak{a}_\iota\right),$$

$$\mathbf{P}_{\iota\in I} \mathfrak{a}_\iota = \mathbf{P}_{\lambda\in L} \left(\mathbf{P}_{\iota\in J_\lambda} \mathfrak{a}_\iota\right).$$

в) *Пусть* $\left((\mathfrak{a}_{\lambda\iota})_{\iota\in J_\lambda}\right)_{\lambda\in L}$ — *семейство (с множеством индексов* L) *семейств кардинальных чисел. Пусть* $I = \prod_{\lambda\in L} J_\lambda$. *Тогда* („дистрибутивность произведения относительно суммы“)

$$\mathbf{P}_{\lambda\in L} \left(\sum_{\iota\in J_\lambda} \mathfrak{a}_{\lambda\iota}\right) = \sum_{f\in I} \left(\mathbf{P}_{\lambda\in L} \mathfrak{a}_{\lambda, f(\lambda)}\right).$$

Соотношения пункта а) вытекают из аналогичных формул для объединения и произведения множеств, ибо тот факт, что f — биекция, влечет, что если $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство попарно не пересекающихся множеств, то то же самое верно и для семейства $(X_{f(\varkappa)})_{\varkappa\in K}$ (см. гл. II, § 4, предложение 1 и § 5, предложение 4).

Соотношения пункта б) немедленно следуют из формул ассоциативности объединения и произведения (гл. II, § 4, предложение 2 и § 5, предложение 7) и дистрибутивности пересечения относительно объединения (гл. II, § 5, предложение 8), которая показывает, что если $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство попарно не пересекающихся множеств, то то же самое верно и для семейства $\left(\bigcup_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\right)_{\lambda\in L}$.

Наконец, в) есть следствие дистрибутивности произведения относительно объединения и пересечения (гл. II, § 5, предложение 9 и следствие 1 предложения 9).

Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два кардинальных числа. Если I — множество из двух различных элементов (например, кардинальное число 2), то существует отображение f множества I на $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$, которое определяет некоторое семейство кардинальных чисел; сумма и произведение этого семейства зависят только от $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ (в силу предложения 5a)); назовем эти кардинальные числа *суммой* и *произведением* кардинального числа $\mathfrak{a}$ и кардинального числа $\mathfrak{b}$ и обозначим их $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$[1]). Аналогично определяют и обозначают сумму и произведение нескольких кардинальных чисел. Из предложения 5 вытекает следствие:

Следствие. *Пусть* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — *кардинальные числа; тогда*

(1) $$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}, \qquad \mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\mathfrak{a};$$

(2) $$\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+\mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})=(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c};$$

(3) $$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

4. Свойства кардинальных чисел 0 и 1

Предложение 6. *Пусть* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство кардинальных чисел и* J (*соответственно* K) — *часть множества* I, *такая, что* $\mathfrak{a}_\iota=0$ *для всякого* $\iota\notin J$ (соответственно $\mathfrak{a}_\iota=1$ *для всякого* $\iota\notin K$); *тогда*

$$\sum_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota=\sum_{\iota\in J}\mathfrak{a}_\iota$$

$$\left(\text{соответственно } \prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota=\prod_{\iota\in K}\mathfrak{a}_\iota\right).$$

Для суммы это очевидно, ибо сумма S_I семейства множеств $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ равномощна объединению суммы S_J семейства $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in J}$ и пустого множества, а значит, равномощна множеству S_J. Для произведения это вытекает из того, что проекция pr_K произведения $\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota$ на частичное произведение $\prod_{\iota\in K}\mathfrak{a}_\iota$ есть биекция (гл. II, § 5, n° 5, замечание 1).

Следствие 1. *Для всякого кардинального числа* $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{a}+0=\mathfrak{a}\cdot 1=\mathfrak{a}.$$

Следствие 2. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *кардинальные числа и пусть* I — *множество, равномощное* $\mathfrak{b}$; *для всякого* $\iota\in I$ *пусть* $\mathfrak{a}_\iota=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}_\iota=1$; тогда

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\sum_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota \quad \text{и} \quad \mathfrak{b}=\sum_{\iota\in I}\mathfrak{c}_\iota,$$

[1]) Вместо $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ пишут также $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ (во французском оригинале $\mathfrak{a}\,.\,\mathfrak{b}$; вообще, как правило, точка, означающая умножение, ставится во французских текстах внизу строки, а в русских текстах — посредине). — *Прим. ред.*

Вторая формула вытекает из того, что любое множество есть объединение своих одноэлементных частей. Первая получается из второй умножением на $\mathfrak{a}$ и использованием следствия 1.

Предложение 7. *Пусть* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство кардинальных чисел; для того чтобы* $\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota\neq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{a}_\iota\neq 0$ *для всякого* $\iota\in I$.

Это просто перевод условия, что произведение не пусто (гл. II, § 5, следствие 2 предложения 5).

Предложение 8. *Если* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *кардинальные числа, такие, что* $\mathfrak{a}+1=\mathfrak{b}+1$, *то* $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$.

Пусть $X=\mathfrak{a}+1=\mathfrak{b}+1$. Существуют подмножества A, B множества X с кардинальными числами $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, такие, что каждое из дополнений $X-A$ и $X-B$ сводится к одному элементу. Пусть u и v — эти элементы. Пересечение $C=A\cap B$ имеет в качестве дополнения в X множество $\{u, v\}$. Если $u=v$, то $A=B=C$, откуда $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$. В противном случае $A=C\cup\{v\}$, $B=C\cup\{u\}$ и $\mathfrak{a}=1+\mathrm{Card}(C)=\mathfrak{b}$.

Не следует думать, что $\mathfrak{a}+\mathfrak{m}=\mathfrak{b}+\mathfrak{m}$ влечет $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ для всякого кардинального числа $\mathfrak{m}$ (см. § 6); °мы увидим однако, что это верно, когда $\mathfrak{m}$ *конечное* (§ 6, следствие 4 предложения 3 и § 6, следствие 4 теоремы 2).。

5. Возведение кардинальных чисел в степень

Определение 4. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *кардинальные числа; кардинальное число множества отображений множества* $\mathfrak{b}$ *в* $\mathfrak{a}$ *обозначим, допуская вольность обозначений, через* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$.

Вольность состоит в том, что этим символом мы обозначили уже множество функциональных графиков отображений множества $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{a}$ (гл. II, § 5, n° 2), а это последнее множество не обязательно является кардинальным числом (упр. 2). Контекст всегда ясно укажет смысл, который следует придать символу $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$.

Предложение 9. *Пусть* X *и* Y — *два множества,* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *их кардинальные числа; тогда множество* X^Y *имеет кардинальное число* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$.

В самом деле, существует биекция множества X^Y на множество отображений множества $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{a}$ (гл. II, § 5, n° 2, следствие предложения 2).

Предложение 10. *Пусть* $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — *кардинальные числа,* I — *такое множество, что* $\mathrm{Card}(I)=\mathfrak{b}$; *если* $\mathfrak{a}_\iota=\mathfrak{a}$ *для всякого* $\iota\in I$, *то* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}=\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota$.

Это вытекает из определения произведения семейства множеств как множества функциональных графиков (гл. II, § 5, n° 3).

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{a}$ — *кардинальное число*, $(\mathfrak{b}_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство кардинальных чисел. Тогда*

$$\mathfrak{a}^{\sum_{\iota\in I}\mathfrak{b}_\iota} = \prod_{\iota\in I} \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_\iota}.$$

В самом деле, пусть S — сумма множеств $\mathfrak{b}_\iota$. Положим $\mathfrak{a}_s = \mathfrak{a}$ для всякого $s\in S$. Обе части равенства, которое нужно доказать, равны тогда $\prod_{s\in S}\mathfrak{a}_s$ в силу предложения 10 и формулы ассоциативности произведения (предложение 5б)).

Следствие 2. *Пусть* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство кардинальных чисел*, $\mathfrak{b}$ — *кардинальное число; тогда*

$$\left(\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota\right)^{\mathfrak{b}} = \prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota^{\mathfrak{b}}.$$

В самом деле, положим $\mathfrak{a}_{\iota\beta} = \mathfrak{a}_\iota$ для всякой пары $(\iota, \beta)\in I\times\mathfrak{b}$. Тогда в силу ассоциативности произведения

$$\left(\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota\right)^{\mathfrak{b}} = \prod_{\beta\in\mathfrak{b}}\left(\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_{\iota\beta}\right) = \prod_{\iota\in I}\left(\prod_{\beta\in\mathfrak{b}}\mathfrak{a}_{\iota\beta}\right) = \prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota^{\mathfrak{b}}.$$

Следствие 3. *Пусть* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ — *кардинальные числа. Тогда* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}}$.

В самом деле, положим $\mathfrak{b}_\gamma = \mathfrak{b}$ для всякого $\gamma\in\mathfrak{c}$. Тогда

$$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\sum_{\gamma\in\mathfrak{c}}\mathfrak{b}_\gamma} = \prod_{\gamma\in\mathfrak{c}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_\gamma} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}}$$

в силу следствия 1.

Предложение 11. *Пусть* $\mathfrak{a}$ — *кардинальное число. Тогда* $\mathfrak{a}^0 = 1$, $\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}$, $1^{\mathfrak{a}} = 1$; *если* $\mathfrak{a}\neq 0$, *то* $0^{\mathfrak{a}} = 0$.

В самом деле, существует единственное отображение множества $\varnothing$ в произвольное множество (отображение с пустым графиком); множество отображений множества из одного элемента в произвольное множество X равномощно множеству X (гл. II, § 5, п° 3); существует и единственно отображение произвольного множества в множество из одного элемента; наконец, не существует никакого отображения непустого множества в $\varnothing$.

Заметим, в частности, что $0^0 = 1$.

Предложение 12. *Пусть* X — *множество*, $\mathfrak{a}$ — *его кардинальное число; кардинальное число множества* $\mathfrak{P}(X)$ *частей множества* X *есть* $2^{\mathfrak{a}}$.

Пусть α и β — элементы кардинального числа 2; для произвольной части Y множества X пусть f_Y — отображение множества X в 2, определенное равенствами $f_Y(x) = \alpha$ для $x\in Y$ и $f_Y(x) = \beta$ для $x\in X - Y$; пусть u — отображение $Y\to f_Y$ множества $\mathfrak{P}(X)$ в 2^X. Обратно, всякому отображению g множества X в 2 поставим в соответствие часть $\overset{-1}{g}(\alpha)$ множества X, и пусть v — отображение $g\to\overset{-1}{g}(\alpha)$ множества 2^X в $\mathfrak{P}(X)$. Ясно, что отображения $u\circ v$ и $v\circ u$ — тождественные отображения множества 2^X и множества $\mathfrak{P}(X)$. Следовательно, u и v — биекции (гл. II, § 3, следствие предложения 8), откуда и следует, что $\operatorname{Card}(\mathfrak{P}(X)) = 2^{\mathfrak{a}}$.

6. *Соотношение порядка и операции между кардинальными числами*

Предложение 13. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *кардинальные числа; для того чтобы имело место* $\mathfrak{a}\geqslant\mathfrak{b}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое кардинальное число* $\mathfrak{c}$, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}+\mathfrak{c}$.

В самом деле, соотношение $\mathfrak{a}\geqslant\mathfrak{b}$ означает, что существует часть B множества $\mathfrak{a}$, равномощная множеству $\mathfrak{b}$ (п° 2), т. е. что $\mathfrak{a}$ равномощно сумме множества $\mathfrak{b}$ и некоторого множества C.

Z Если $\mathfrak{a}\geqslant\mathfrak{b}$, то, вообще говоря, существуют различные кардинальные числа $\mathfrak{c}$, такие, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ (см. § 6); таким образом, в общем случае „разность“ $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$ двух кардинальных чисел определить невозможно (см. § 5, п° 2).

Предложение 14. *Пусть* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ *и* $(\mathfrak{b}_\iota)_{\iota\in I}$ — *два таких семейства кардинальных чисел с одним и тем же множеством индексов* I, *что* $\mathfrak{a}_\iota\geqslant\mathfrak{b}_\iota$ *для всякого* $\iota\in I$; *тогда*

$$\sum_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota \geqslant \sum_{\iota\in I}\mathfrak{b}_\iota \quad \text{и} \quad \prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota \geqslant \prod_{\iota\in I}\mathfrak{b}_\iota.$$

Второе неравенство вытекает из соотношений включения между произведениями множеств (гл. II, § 5, следствие 3 предложения 5). С другой стороны, если множество E есть объединение семейства $(A_\iota)_{\iota\in I}$ попарно пересекающихся частей и $B_\iota\subset A_\iota$ для всякого ι, то множества B_ι попарно не пересекаются и $\bigcup_\iota B_\iota\subset\bigcup_\iota A_\iota$ (гл. II, § 4, п° 2), откуда следует первое неравенство.

Следствие 1. *Пусть* $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство кардинальных чисел. Тогда для всякой части* $\mathfrak{J}$ *множества* I $\sum_{\iota\in\mathfrak{J}}\mathfrak{a}_\iota\leqslant\sum_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota$. *Если, кроме того,* $\mathfrak{a}_\iota\neq 0$ *для всякого* $\iota\in I-\mathfrak{J}$, *то* $\prod_{\iota\in\mathfrak{J}}\mathfrak{a}_\iota\leqslant\prod_{\iota\in I}\mathfrak{a}_\iota$.

Положим $\mathfrak{b}_\iota = \mathfrak{a}_\iota$ для $\iota\in\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{b}_\iota = 0$ (соответственно $\mathfrak{b}_\iota = 1$) для $\iota\in I-\mathfrak{J}$. Достаточно применить предложение 14, заметив, что соотношение $\mathfrak{a}\neq 0$ влечет $\mathfrak{a}\geqslant 1$.

Следствие 2. *Если* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ — *кардинальные числа, такие, что* $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}'$ *и* $\mathfrak{a}' > 0$, *то* $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \leqslant \mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}'}$.

В самом деле, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \leqslant \mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}}$ в силу предложений 10 и 14 и $\mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}} \leqslant \mathfrak{a}'^{\mathfrak{b}'}$ в силу предложения 10 и следствия 1 предложения 14.

Теорема 2 (Кантор). *Для всякого кардинального числа* $\mathfrak{a}$

$$2^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}.$$

В самом деле, $\mathrm{Card}(\mathfrak{P}(\mathfrak{a})) = 2^{\mathfrak{a}}$ (предложение 12). Отображение $x \to \{x\}$ $(x \in \mathfrak{a})$ есть инъекция множества $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$; значит, $\mathfrak{a} \leqslant 2^{\mathfrak{a}}$. Достаточно показать, что $\mathfrak{a} \neq 2^{\mathfrak{a}}$, т. е. что для всякого отображения f множества $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$ образ $f(\mathfrak{a})$ отличен от $\mathfrak{P}(\mathfrak{a})$. Но пусть X — множество элементов $x \in \mathfrak{a}$, таких, что $x \notin f(x)$; если $x \in X$, то $x \notin f(x)$, откуда $f(x) \neq X$; если $x \in \mathfrak{a} - X$, то $x \in f(x)$ и $x \notin X$, значит, $f(x) \neq X$. Это доказывает, что $X \notin f(\mathfrak{a})$, откуда и следует теорема.

Следствие. *Не существует множества, элементом которого было бы любое кардинальное число.*

Если бы U было таким множеством, существовало бы множество S — сумма семейства множеств $(X)_{X \in U}$ и всякое кардинальное число было бы равномощно некоторой части множества S. Пусть, в частности, $\mathfrak{s} = \mathrm{Card}(S)$; так как $2^{\mathfrak{s}}$ — кардинальное число, то $2^{\mathfrak{s}} \leqslant \mathfrak{s}$ — противоречие.

Упражнения

¶ 1) Пусть E и F — два множества, f — инъекция множества E в F, g — инъекция множества F в E. Показать, что существуют две части A, B множества E и две части A′, B′ множества F, такие, что $B = E - A$, $B' = F - A'$, $A' = f(A)$ и $B = g(B')$. (Пусть $R = E - g(F)$ и $h = g \circ f$; взять за A пересечение частей M множества E, таких, что $M \supset R \cup h(M)$.)

2) Если E и F — различные множества, показать, что $E^F \neq F^E$. Вывести из этого, что если E и F суть кардинальные числа 2 и $4 = 2 + 2$, то по крайней мере одно из множеств E^F, F^E не есть кардинальное число.

¶ 3) Пусть $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$, $(\mathfrak{b}_\iota)_{\iota \in I}$ — два семейства кардинальных чисел, такие, что $\mathfrak{b}_\iota \geqslant 2$ для всякого $\iota \in I$.

а) Показать, что если $\mathfrak{a}_\iota \leqslant \mathfrak{b}_\iota$ для всякого $\iota \in I$, то

$$\sum_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota \leqslant \prod_{\iota \in I} \mathfrak{b}_\iota.$$

б) Показать, что если $\mathfrak{a}_\iota < \mathfrak{b}_\iota$ для всякого $\iota \in I$, то

$$\sum_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota < \prod_{\iota \in I} \mathfrak{b}_\iota.$$

(Заметить, что произведение $\prod_{\iota \in I} E_\iota$ не может быть объединением семейства $(A_\iota)_{\iota \in I}$, такого, что $\mathrm{Card}(A_\iota) < \mathrm{Card}(E_\iota)$ для всякого $\iota \in I$, ввиду того, что $\mathrm{Card}(\mathrm{pr}_\iota(A_\iota)) < \mathrm{Card}(E_\iota)$.)

4) Пусть E — множество, f — отображение множества $\mathfrak{P}(E) - \{\varnothing\}$ в E, такое, что для всякого подмножества $X \neq \varnothing$ множества E выполняется $f(X) \in X$.

а) Пусть $\mathfrak{b}$ — кардинальное число $\leqslant \mathrm{Card}(E)$, и пусть A — множество элементов $x \in E$, таких, что $\mathrm{Card}(f(x)) \leqslant \mathfrak{b}$. Показать, что если $\mathfrak{a} = \mathrm{Card}(A)$, то $2^{\mathfrak{a}} \leqslant 1 + \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (заметить, что если $Y \subset A$ и $Y \neq \varnothing$, то $f(Y) \in A$).

б) Пусть B — множество элементов $x \in E$, таких, что для всякой части $X \neq \varnothing$ множества E, принадлежащей к $f(x)$, выполняется $\mathrm{Card}(X) \leqslant \mathfrak{b}$. Показать, что $\mathrm{Card}(B) \leqslant \mathfrak{b}$.

5) Пусть $(\lambda_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство порядковых типов (§ 2, упр. 12), а I — упорядоченное множество. Показать, что

$$\mathrm{Card}\Big(\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota\Big) = \sum_{\iota \in I} \mathrm{Card}(\lambda_\iota)$$

и (если I — вполне упорядоченно)

$$\mathrm{Card}\Big(\prod_{\iota \in I} \lambda_\iota\Big) = \prod_{\iota \in I} \mathrm{Card}(\lambda_\iota).$$

6) Показать, что для всякого множества E существует $X \subset E$, такое, что $X \notin E$ (использовать теорему 2).

§ 4. Натуральные целые числа. Конечные множества

1. Определение целых чисел

Определение 1. *Говорят, что кардинальное число* $\mathfrak{a}$ *конечно, если* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a} + 1$; *конечное кардинальное число называется также натуральным целым числом* (или просто *целым числом*, если можно не опасаться путаницы[1])). *Говорят, что множество* E *конечно, если* Card (E) *есть конечное кардинальное число*; *в этом случае говорят, что* Card (E) *есть число элементов множества* E.

Говорят, что семейство (гл. II, § 3, n° 4) *конечно*, если его множество индексов конечно.

Когда мы будем говорить, что число объектов некоторого типа есть целое число m, мы будем иметь в виду, что эти объекты — элементы некоторого множества, число элементов которого есть m. Множество, число элементов которого есть m, называется также *множеством из* m *элементов*.

[1]) Понятие „целого числа" будет позже обобщено в алгебре, где будут определены *рациональные целые числа* и *алгебраические целые числа*.

Предложение 1. *Для того чтобы кардинальное число* $\mathfrak{a}$ *было конечным, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{a}+1$ *было конечным.*

Известно, в самом деле, что соотношения $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}+1=\mathfrak{b}+1$ между кардинальными числами $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ эквивалентны (§ 3, предложение 8); значит, соотношения $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{a}+1$ и $\mathfrak{a}+1\neq(\mathfrak{a}+1)+1$ эквивалентны.

Ясно, что $0\neq 1$; следовательно, 0 — целое число; отсюда получается, что 1 и 2 — целые числа. Кардинальные числа $2+1$ и $(2+1)+1$ — целые числа, которые обозначают 3 и 4.

2. Неравенства между целыми числами

Предложение 2. *Пусть* n — *целое число. Всякое кардинальное число* $\mathfrak{a}$, *такое, что* $\mathfrak{a}\leqslant n$, *есть целое число. Если* $n\neq 0$, *то существует и единственно целое число* m, *такое, что* $n=m+1$, *причем соотношение* $a<n$ *эквивалентно соотношению* $a\leqslant m$.

Если $\mathfrak{a}\leqslant n$, то существует кардинальное число $\mathfrak{b}$, такое, что $n=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ (§ 3, предложение 13). Тогда $(\mathfrak{a}+1)+\mathfrak{b}=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+1=n+1$ (§ 3, следствие предложения 5), и так как $n\neq n+1$, то $(\mathfrak{a}+1)+\mathfrak{b}\neq\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$; следовательно, $\mathfrak{a}+1\neq\mathfrak{a}$, что и означает, что $\mathfrak{a}$ — целое число. Если $n\neq 0$, то $n\geqslant 1$ (§ 3, п° 2), а следовательно, существует единственное кардинальное число m, такое, что $n=m+1$ (§ 3, предложения 13 и 8); так как $m\leqslant n$, m — целое число в силу предыдущего. Наконец, если целое число a таково, что $a<n$, то $n=a+b$ с $b\neq 0$ (§ 3, предложение 13); так как b — целое число, $b=c+1$ и $n=m+1=(a+c)+1$. Из этого заключаем, что $m=a+c$ (§ 3, предложение 8), откуда $a\leqslant m$ (§ 3, предложение 13). Обратно, если $a\leqslant m$, то также $a\leqslant m+1=n$, и если бы было $a=n=m+1$, то получилось бы $a>m$, что противоречит предположению.

Следствие 1. *Всякая часть конечного множества конечна.*

Следствие 2. *Если* X — *часть конечного множества* E, *отличная от* E, *то* Card (X) < Card (E).

В самом деле, X содержится в дополнении X′ некоторой части множества E, сводящейся к единственному элементу; имеем Card (X) $\leqslant$ Card (X′) и Card (E) = Card (X′) + 1, следовательно (предложение 2), Card (X′) < Card (E) и тем более Card (X) < Card (E).

Определение 1 показывает, что и обратно: если E — такое множество, что Card (X) < Card (E) для всякой части X $\neq$ E множества E, то E конечное.

Следствие 3. *Если* f — *отображение конечного множества* E *в множество* F, *то* f(E) — *конечная часть множества* F.

В самом деле, Card (f(E)) $\leqslant$ Card (E) (§ 3, предложение 3).

Следствие 4. *Пусть* E *и* F — *два конечных множества, имеющих одинаковое число элементов, и* f — *отображение множества* E *в* F. *Тогда следующие свойства эквивалентны:*

а) f — *инъекция,*
б) f — *сюръекция,*
в) f — *биекция.*

Достаточно доказать, что а) и б) эквивалентны. Если f инъективно, то Card (f(E)) = Card (E) = Card (F), откуда f(E) = F (следствие 2). Если f не инъективно, пусть x и x' — два элемента из E, такие, что $x\neq x'$ и $f(x)=f(x')$. Тогда, положив E′ = E — $\{x\}$, имеем f(E′) = f(E), откуда Card (f(E)) $\leqslant$ Card (E′) < Card (E) в силу следствия 2. Но так как Card (F) = Card (E), то необходимо f(E) $\neq$ F.

3. Принцип индукции

C61 (принцип индукции). *Пусть* R⦃n⦄ — *соотношение в теории* $\mathcal{T}$ (*для которой* n *не является константой*). *Предположим, что соотношение*

$$R\{0\} \text{ и } (\forall n)((n \text{ — целое число и } R\{n\})\Rightarrow R\{n+1\})$$

является теоремой теории $\mathcal{T}$. *При этих условиях соотношение*

$$(\forall n)((n \text{ — целое число})\Rightarrow R\{n\})$$

есть теорема теории $\mathcal{T}$.

Рассуждая от противного, предположим, что соотношение

$$(\exists n)(n \text{ — целое число и (не } R\{n\}))$$

истинно. Пусть q — такое целое число, что „не R⦃q⦄" (метод вспомогательной константы; см. гл. I, § 3, п° 3, и § 4, п° 1). Целые числа n, такие, что „$n\leqslant q$ и (не R⦃n⦄)", образуют непустое вполне упорядоченное множество (§ 3, п° 2, замечание), которое, следовательно, имеет наименьший элемент s. Если $s=0$, то „не R⦃0⦄", что противоречит предположению. Если $s>0$, то $s=s'+1$, где s' — целое число, такое, что $s'<s$ (предложение 2). По определению числа s истинно R⦃s'⦄, но тогда предположение влечет, что R⦃s⦄ истинно, что противоречит определению числа s.

Чтобы применить принцип индукции, необходимо, в частности, доказать соотношение

$$(n \text{ — целое число и } R\{n\})\Rightarrow R\{n+1\}.$$

Для такого доказательства используют часто метод вспомогательной гипотезы (гл. I, § 3, п° 3), поэтому соотношение „n — целое число и R⦃n⦄" (или даже R⦃n⦄) называется *предположением индукции*.

Замечание. Часто под названием „принцип индукции" используют различные критерии, которые легко выводятся из критерия C61 и наиболее важные из которых мы укажем.

1) Пусть $S\{n\}$ есть соотношение

$$(\forall p)((n \text{ — целое число и } p \text{ — целое число и } p < n) \Rightarrow R\{p\}),$$

и предположим, что $S\{n\}$ *влечет* $R\{n\}$. Тогда соотношение

$$(\forall n)((n \text{ — целое число}) \Rightarrow R\{n\})$$

истинно. В самом деле, соотношение $S\{0\}$ истинно и по предположению $S\{n\}$ влечет $R\{n\}$; так как соотношение $m < n+1$ эквивалентно $m \leqslant n$ (предложение 2), соотношение $S\{n+1\}$ эквивалентно „$S\{n\}$ и $R\{n\}$"; следовательно, $S\{n\}$ влечет $S\{n+1\}$. Критерий C61 доказывает тогда, что соотношение

$$(\forall n)((n \text{ — целое число}) \Rightarrow S\{n\})$$

истинно и, поскольку $S\{n\}$ влечет $R\{n\}$, соотношение

$$(\forall n)((n \text{ — целое число}) \Rightarrow R\{n\})$$

истинно.

2) Пусть k — целое число, $R\{n\}$ — такое соотношение, что соотношение

$$R\{k\} \text{ и } (\forall n)((n \text{ — целое число} \geqslant k \text{ и } R\{n\}) \Rightarrow R\{n+1\})$$

истинно. Тогда соотношение

$$(\forall n)((n \text{ — целое число} \geqslant k) \Rightarrow R\{n\})$$

истинно („*индукция начиная с* k"). В самом деле, пусть $S\{n\}$ есть соотношение „$(n \geqslant k) \Rightarrow R\{n\}$"; тогда, используя метод разделения случаев, видим, что соотношение $S\{0\}$ истинно; с другой стороны, легко проверяется, что соотношение

$$(n \text{ — целое число и } S\{n\}) \Rightarrow S\{n+1\}$$

истинно. Из критерия C61 заключаем, что соотношение

$$(n \text{ — целое число}) \Rightarrow S(n)$$

истинно, откуда и следует наше утверждение.

3) Пусть a и b — два целых числа, такие, что $a \leqslant b$, и пусть $R\{n\}$ — такое соотношение, что выполняется

$$R\{a\} \text{ и } (\forall n)((n \text{ — целое число и } a \leqslant n < b \text{ и } R\{n\}) \Rightarrow R\{n+1\}).$$

Тогда соотношение

$$(\forall n)((n \text{ — целое число и } a \leqslant n \leqslant b) \Rightarrow R\{n\})$$

истинно. Делается, как в предыдущем случае, если взять за $S\{n\}$ соотношение „$(a \leqslant n < b) \Rightarrow R\{n\}$" („*индукция, ограниченная интервалом*").

4) Пусть a и b — два целых числа, такие, что $a \leqslant b$, и пусть $R\{n\}$ — такое соотношение, что выполняется

$$R\{b\} \text{ и } (\forall n)((n \text{ — целое число и } a \leqslant n < b \text{ и } R\{n+1\}) \Rightarrow R\{n\}).$$

Тогда соотношение

$$(\forall n)((n \text{ — целое число и } a \leqslant n \leqslant b) \Rightarrow R\{n\})$$

истинно. Имеем, в самом деле, соотношение

$$(n \text{ — целое число и } a \leqslant n < b \text{ и (не } R\{n\})) \Rightarrow (\text{не } R\{n+1\}).$$

Если бы для некоторого n, такого, что $a \leqslant n \leqslant b$, было (не $R\{n\}$), то из 3) следовало бы (не $R\{b\}$), что противоречит предположению; критерий доказан („*индукция спуска*").

4. Конечные части упорядоченных множеств

Предложение 3. *Пусть* E — *фильтрующееся вправо* (соответственно *сетчатое, совершенно упорядоченное*) *упорядоченное множество. Всякая непустая конечная часть множества* E *ограничена сверху* (соответственно *обладает верхней гранью и нижней гранью, обладает наибольшим элементом и наименьшим элементом*).

Докажем предложение индукцией по числу n элементов рассматриваемой части. Для $n = 1$ результат тривиален. Пусть X — часть из $n+1$ элементов множества E (с $n \geqslant 1$), и положим $X = Y \cup \{x\}$, где Y состоит из n элементов и, следовательно, не пусто. Из предположения индукции следует, что существует мажоранта (соответственно верхняя грань, наибольший элемент) y множества Y. Так как E — фильтрующееся вправо (соответственно сетчатое, совершенно упорядоченное), $\{x, y\}$ обладает мажорантой (соответственно верхней гранью, наибольшим элементом) z, которая, очевидно, является и мажорантой (соответственно верхней гранью, наибольшим элементом) множества X.

Следствие 1. *Всякое непустое конечное совершенно упорядоченное множество вполне упорядоченно и обладает наибольшим элементом.*

Следствие 2. *Всякое непустое конечное упорядоченное множество обладает максимальным элементом.*

В самом деле, такое множество индуктивно в силу следствия 1 (см. § 2, теорему 2).

5. Свойства конечного характера

Определение 2. *Пусть* E — *множество. Говорят, что множество* $\mathfrak{S}$ *частей множества* E *есть множество конечного характера, или имеет конечный характер, если соотношение* $X \in \mathfrak{S}$ *эквивалентно соотношению „всякая конечная часть множества* X *принадлежит* $\mathfrak{S}$".

Говорят, что свойство P⦃X⦄ части X множества E есть свойство *конечного характера*, если множество частей X множества E, для которых истинно P⦃X⦄, есть множество конечного характера.

Примеры. 1) Множество совершенно упорядоченных частей упорядоченного множества E есть множество конечного характера: в самом деле, для того чтобы часть X множества E была совершенно упорядоченной, необходимо и достаточно, чтобы всякая часть из двух элементов множества X была такой.

2) °Множество свободных частей векторного пространства есть множество конечного характера („Алгебра" гл. II, § 1). То же верно для множества алгебраически свободных частей произвольного расширения поля („Алгебра" гл. V, § 5).

3) Множество подмодулей модуля A не есть множество конечного характера, ибо, вообще говоря, конечная часть подмодуля модуля A не является подмодулем модуля A.$_\circ$

Теорема 1. *Всякое множество* $\mathfrak{S}$ *частей множества* E, *имеющее конечный характер, обладает максимальным элементом (при упорядочении включением).*

В силу теоремы 2 § 2 достаточно доказать, что $\mathfrak{S}$ индуктивно; для этого покажем, что для всякой части $\mathfrak{G}$ множества $\mathfrak{S}$, совершенно упорядоченного включением, объединение X множеств из $\mathfrak{G}$ принадлежит к $\mathfrak{S}$ (§ 2, следствие 2 теоремы 2). Так как $\mathfrak{S}$ — множество конечного характера, достаточно установить, что всякая конечная часть Y множества X принадлежит к $\mathfrak{S}$. Но для всякого $y \in Y$ существует множество $Z_y \in \mathfrak{G}$, такое, что $y \in Z_y$; поскольку множество множеств Z_y $(y \in Y)$ конечно и совершенно упорядоченно включением, оно обладает наибольшим элементом S (следствие 1 предложения 3); иначе говоря, существует такое множество $S \in \mathfrak{G}$, что $Y \subset S$. Но так как $S \in \mathfrak{S}$, Y — конечная часть множества S, а $\mathfrak{S}$ — множество конечного характера, имеем $Y \in \mathfrak{S}$, что заканчивает доказательство.

Упражнения

1) а) Пусть E — множество, $\mathfrak{F}(E)$ — множество конечных частей множества E. Показать, что $\mathfrak{F}(E)$ является наименьшим элементом среди частей $\mathfrak{G}$ множества $\mathfrak{P}(E)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1° $\varnothing \in \mathfrak{G}$; 2° соотношения $X \in \mathfrak{G}$ и $x \in E$ влекут $X \cup \{x\} \in \mathfrak{G}$.

б) Вывести из а), что объединение двух конечных частей A и B множества E конечно (рассмотреть множество таких частей X множества E, что $X \cup A$ конечно).

в) Вывести из а) и б), что для всякого конечного множества E $\mathfrak{P}(E)$ — конечное множество (рассмотреть множество таких частей X множества E, что $\mathfrak{P}(X)$ конечно).

2) Показать, что для того, чтобы множество E было конечным, необходимо и достаточно, чтобы всякая непустая часть множества $\mathfrak{P}(E)$ обладала максимальным элементом для соотношения включения (чтобы увидеть, что условие достаточно, применить его к множеству $\mathfrak{F}(E)$ конечных частей множества E).

3) Показать, что если вполне упорядоченное множество E таково, что упорядоченное множество, полученное наделением множества E противоположным порядком, также вполне упорядочено, то E конечно (рассмотреть наибольший элемент x множества E, такой, что отрезок S_x конечен).

4) Пусть E — конечное множество из $n \geqslant 2$ элементов, C — часть множества $E \times E$, такая, что для любой пары (x, y) различных элементов из E один из двух элементов (x, y), (y, x) принадлежит к C. Показать, что существует отображение f интервала $(1, n)$ на E, такое, что $(f(i), f(i+1)) \in C$ для $1 \leqslant i < n$ (рассуждать индукцией по n).

¶ 5) Пусть E — упорядоченное множество, для которого существует такое целое число k, что k есть наибольшее число среди чисел элементов свободных частей X множества E (§ 1, упр. 5). Показать, что существует разбиение множества E на k множеств, совершенно упорядоченных индуцированным порядком. Проделать это в два этапа:

а) Если E конечно и имеет n элементов, доказывать индукцией по n: пусть a — минимальный элемент множества E, и пусть $E' = E - \{a\}$. Если существует разбиение множества E' на k множеств C_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, совершенно упорядоченных индуцированным порядком, рассмотреть для каждого индекса i множество U_i элементов $x \in C_i$, мажорирующих a; показать, что существует по крайней мере один индекс i, такой, что в $E' - U_i$ имеется свободная часть, содержащая не больше $k-1$ элементов. Для этого надо рассуждать от противного, рассмотрев в каждом $E' - U_i$ свободную часть S_i из k элементов и взяв затем объединение S множеств S_i и для каждого индекса $j \leqslant k$ наименьший элемент s_j множества $S \cap C_j$; показать, что $k+1$ элементов $a, s_1, \ldots, s_k$ образуют свободную часть множества E.

б) Если E — произвольное множество, доказывать индукцией по k следующим образом. Говорят, что часть C множества E *сильно связанная* в E, если для всякой конечной части F множества E существует такое разбиение множества F на не более чем k совершенно упорядоченных множеств, что $C \cap F$ содержится в одном из них. Показать, что существует максимальная сильно связанная часть C_0 и что в $E - C_0$ всякая свободная часть имеет не больше $k-1$ элементов. (Рассуждать от противного, предположив, что существует свободная часть $\{a_1, \ldots, a_k\}$ из k элементов; рассмотреть каждое из множеств $C_0 \cup \{a_i\}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ и выразить, что оно не сильно связанное, что даст для каждого индекса i конечную часть F_i множества E. Рассмотреть, наконец, объединение F множеств F_i и использовать для получения противоречия тот факт, что C_0 — сильно связанное.)

¶ 6) а) Пусть A — множество, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ — две конечные части множества $\mathfrak{P}(A)$, имеющие соответственно m и n элементов. Пусть h — наименьшее целое число, такое, что для всякого целого числа r объединение некоторого семейства $r+h$ частей множества A, принадлежащих к $\mathfrak{F}$, пересекается по меньшей мере с r множествами, принадлежащими к $\mathfrak{G}$. Показать, что в A существует такое конечное множество B из самое большее $n+h$ элементов, что каждое множество из $\mathfrak{F}$ и каждое множесто из $\mathfrak{G}$ пересекаются с B. (Пусть

X_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ — элементы множества $\mathfrak{F}$, Y_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — элементы множества $\mathfrak{G}$; рассмотреть на $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{G}$ соотношение порядка, график которого образован парами (X_i, X_i), (Y_j, Y_j) и парами (X_i, Y_j), такими, что $X_i \cap Y_j \neq \varnothing$ и применить к этому упорядоченному множеству упражнение 5.)

б) Пусть E и F — два конечных множества, $x \to A(x)$ — отображение множества E в $\mathfrak{P}(F)$. Для того чтобы существовала инъекция f множества E в F, такая, что для всякого $x \in E$ $f(x) \in A(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для всякой части H множества E объединение $\bigcup_{x \in H} A(x)$ имело число элементов не меньшее, чем число элементов множества H (применить a) с $h = 0$.

7) Говорят, что в сетчатом множестве E элемент a *неприводим*, если соотношение $\sup(x, y) = a$ влечет $x = a$ или $y = a$.

а) Показать, что в конечном сетчатом множестве E всякий элемент a может быть записан в виде $\sup(e_1, \ldots, e_k)$, где элементы e_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ неприводимы.

б) Пусть E — конечное сетчатое множество, J — множество его неприводимых элементов. Для всякого $x \in E$ пусть $S(x)$ — множество тех $y \in J$, которые $\leqslant x$. Показать, что отображение $x \to S(x)$ является изоморфизмом множества E на некоторую часть множества $\mathfrak{P}(J)$, упорядоченного включением, и что $S(\inf(x, y)) = S(x) \cap S(y)$.

¶ 8) а) Пусть E — дистрибутивное сетчатое множество (§ 1, упр. 16). Если a неприводим в E (упр. 7), показать, что соотношение $a \leqslant \sup(x, y)$ влечет $a \leqslant x$ или $a \leqslant y$.

б) Пусть E — конечное дистрибутивное сетчатое множество, J — множество его неприводимых элементов, упорядоченное индуцированным порядком. Показать, что изоморфизм $x \to S(x)$ множества E в $\mathfrak{P}(J)$, определенный в упр. 7б), таков, что $S(\sup(x, y)) = S(x) \cup S(y)$. Вывести из этого, что если J^* — множество, полученное из J наделением множества J противоположным порядком, то E изоморфно упорядоченному множеству $\mathcal{A}(J^*, I)$ возрастающих отображений множества J^* в $I = \{0, 1\}$ (§ 1, упр. 6).

в) При предположениях пункта б) пусть P — множество элементов множества J, отличных от наименьшего элемента множества E. Для каждого $x \in E$ пусть $y_1, \ldots, y_k$ — различные минимальные элементы интервала $]x, \to[$ в E; для каждого индекса i пусть q_i — такой элемент множества P, что $q_i \notin S(x)$ и $q_i \in S(y_i)$. Показать, что элементы $q_1, \ldots, q_k$ попарно несравнимы.

г) Обратно, пусть $q_1, \ldots, q_k$ — попарно несравнимые элементы множества P. Пусть

$$u = \sup(q_1, \ldots, q_k), \quad v_i = \sup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} (q_j) \qquad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

Показать, что $v_i < u$ для $1 \leqslant i \leqslant k$. Пусть тогда

$$x = \inf(v_1, \ldots, v_k) \quad \text{и} \quad y_i = \inf_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq i}} (v_j).$$

Показать, что $x < y_i$ для каждого индекса i, и вывести из этого, что в интервале $]x, \to[$ существует по меньшей мере k различных минимальных элементов.

¶ 9) Говорят, что часть A сетчатого множества E *подсетчата*, если для всякой пары элементов (x, y) из A элементы $\sup_E(x, y)$ и $\inf_E(x, y)$ принадлежат к A.

а) Пусть $(C_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — конечное семейство совершенно упорядоченных множеств, $E = \prod_{i=1}^{n} C_i$ — их произведение, A — подсетчатое подмножество множества E. Показать, что в A не может существовать больше чем n неприводимых и попарно несравнимых элементов. (Рассуждать от противного, предположив, что в A имеется $r > n$ неприводимых и попарно несравнимых элементов a_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Рассмотреть элементы

$$u = \sup(a_1, \ldots, a_r), \quad v_i = \sup_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ j \neq i}} (a_j)$$

множества A и, проектируя их на множители, показать, что $u = v_i$ для некоторого индекса i и что это влечет сравнимость двух каких-то элементов a_i.)

б) Обратно, пусть F — конечное дистрибутивное сетчатое множество, P — множество неприводимых элементов множества F, отличных от наименьшего элемента множества F, и предположим, что наибольшее число среди чисел элементов свободных подмножеств множества P есть n. Показать, что F изоморфно некоторому подсетчатому подмножеству некоторого произведения n совершенно упорядоченных множеств. (Применить упр. 5, в силу которого P будет объединением n совершенно упорядоченных непересекающихся множеств; пусть C_i — совершенно упорядоченное множество, полученное добавлением к P_i наименьшего элемента $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Сопоставить затем каждому $x \in F$ семейство $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, где x_i — верхняя грань в C_i множества элементов из P_i, которые $\leqslant x$.)

¶ 10) а) Для того чтобы упорядоченное множество было изоморфным подмножеству некоторого произведения n совершенно упорядоченных множеств, необходимо и достаточно, чтобы график порядка на E был пересечением n графиков совершенных порядков на E. (Чтобы увидеть, что условие необходимо, показать, что график порядка на множестве $\prod_{i=1}^{n} F_i$, служащем произведением n совершенно упорядоченных множеств, есть пересечение n графиков лексикографических порядков на этом множестве.)

б) Для того чтобы упорядоченное множество E было изоморфным подмножеству некоторого произведения двух совершенно упорядоченных множеств, необходимо и достаточно, чтобы порядок Γ на E был таким, что существует второй порядок Γ′ на E, удовлетворяющий условию: два произвольных различных элемента из E сравнимы относительно одного и только одного из порядков Γ, Γ′.

в) Пусть A — конечное множество из n элементов. В $\mathfrak{P}(A)$ рассмотреть множество E, образованное $2n$ элементами $\{x\}$, $A - \{x\}$, где x пробегает A; показать, что n — наименьшее из целых чисел m, таких, что E, упорядоченное включением, изоморфно подмножеству некоторого произведения m совершенно упорядоченных множеств (использовать a)).

§ 5. Вычисления с целыми числами

1. Операции над целыми числами и конечными множествами

Предложение 1. *Пусть $(a_i)_{i \in I}$ — конечное семейство целых чисел. Тогда кардинальные числа $\sum_{i \in I} a_i$ и $\prod_{i \in I} a_i$ являются целыми числами.*

Покажем сначала, что если a и b — целые числа, то $a+b$ — целое число. Доказывать будем индукцией по b. Если $b=0$, предложение истинно, ибо $a+0=a$. Если $a+b$ — целое число, то же верно и для $(a+b)+1$ (§ 4, предложение 1); но $(a+b)+1 = a+(b+1)$ (§ 3, следствие предложения 5), значит, $a+(b+1)$ — целое число и, следовательно, $a+b$ — целое число для любого целого числа b.

Покажем теперь индукцией по $n = \operatorname{Card}(I)$, что $\sum_{i \in I} a_i$ — целое число. Это очевидно, если $n=0$, ибо тогда $I=\varnothing$ и $\sum_{i \in I} a_i = 0$. Если $\operatorname{Card}(I) = n+1$, то $I = J \cup \{k\}$ с $\operatorname{Card}(J) = n$ и $k \notin J$; тогда $\sum_{i \in I} a_i = a_k + \sum_{i \in J} a_i$ (§ 3, предложение 5). Предположение индукции состоит в том, что $\sum_{i \in J} a_i$ — целое число; значит, это верно и для $a_k + \sum_{i \in J} a_i$ в силу только что доказанного. А это доказывает, что $\sum_{i \in I} a_i$ — целое число для любого n.

Так как произведение ab двух целых чисел a и b есть сумма некоторого конечного семейства целых чисел, равных a (§ 3, следствие 2 предложения 6), ab — целое число. Покажем индукцией по $n = \operatorname{Card}(I)$, что $\prod_{i \in I} a_i$ — целое число. Это истинно для $n=0$, ибо тогда $\prod_{i \in I} a_i = 1$. С другой стороны, если $\operatorname{Card}(I) = n+1$, то (при тех же обозначениях, что и выше) $\prod_{i \in I} a_i = a_k \cdot \prod_{i \in J} a_i$ (§ 3, предложение 5); из предположения индукции следует, что $\prod_{i \in I} a_i$ — целое число. Следовательно, $\prod_{i \in I} a_i$ — целое число для любого n.

Следствие 1. *Объединение E конечного семейства $(X_i)_{i \in I}$ конечных множеств — конечное множество.*

В самом деле, сумма S семейства (X_i) конечна. Поскольку существует отображение множества S на E (гл. II, § 4, п° 8), множество E конечно (§ 4, следствие 3 предложения 2).

Следствие 2. *Произведение конечного семейства конечных множеств — конечное множество.*

Следствие 3. *Если a и b — целые числа, то a^b — целое число.*

В самом деле, a^b — произведение конечного семейства целых чисел, равных a (§ 3, предложение 10).

Следствие 4. *Множество частей конечного множества E конечно.*

В самом деле, его кардинальное число есть $2^{\operatorname{Card}(E)}$ (§ 3, предложение 12).

2. Строгие неравенства между целыми числами

Предложение 2. *Пусть a и b — два целых числа; для того чтобы было $a < b$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое целое число $c > 0$, что $b = a + c$.*

В самом деле, если $a < b$, известно, что существует кардинальное число $c \leqslant b$ (которое, таким образом, является целым числом (§ 4, предложение 2)), такое, что $b = a + c$ (§ 3, предложение 13); если $a \neq b$, то необходимо $c \neq 0$. Обратно, если $b = a + c$ и $c \neq 0$, то $c \geqslant 1$, а значит, $a < a + 1 \leqslant a + c = b$.

Предложение 3. *Пусть $(a_i)_{i \in I}$ и $(b_i)_{i \in I}$ — два конечных семейства целых чисел, такие, что $a_i \leqslant b_i$ для всякого $i \in I$ и $a_i < b_i$ по крайней мере для одного индекса i.* Тогда $\sum_{i \in I} a_i < \sum_{i \in I} b_i$. *Если, кроме того, предположить, что $b_i > 0$ для любого $i \in I$, то $\prod_{i \in I} a_i < \prod_{i \in I} b_i$.*

Пусть j — такой индекс, что $a_j < b_j$; положим $J = I - \{j\}$. Имеем $b_j = a_j + c_j$ с $c_j > 0$ (предложение 2), значит (§ 3, предложение 14),

$$\sum_{i \in I} b_i = a_j + c_j + \sum_{i \in J} b_i \geqslant c_j + a_j + \sum_{i \in J} a_i = c_j + \sum_{i \in I} a_i,$$

а так как $c_j > 0$, отсюда следует первое утверждение (предложение 2). Аналогично

$$\prod_{i \in I} b_i = (a_j + c_j) \prod_{i \in J} b_i = a_j \cdot \prod_{i \in J} b_i + c_j \cdot \prod_{i \in J} b_i \geqslant \prod_{i \in I} a_i + c_j \cdot \prod_{i \in J} b_i;$$

но, так как c_j и все $b_i \neq 0$, произведение $c_j \cdot \prod_{i \in J} b_i \neq 0$ (§ 3, предложение 7); из этого, если принять во внимание предложение 2, вытекает второе утверждение.

Следствие 1. *Пусть a, a' и b — целые числа, такие, что $a < a'$ и $b > 0$; тогда $a^b < a'^b$.*

Достаточно представить a^b и a'^b в виде произведений конечных семейств целых чисел (§ 3, предложение 10) и применить предложение 3, заметив, что соотношение $a < a'$ влечет $a' > 0$.

Следствие 2. *Пусть a, b и b' — целые числа, такие, что $a > 1$ и $b < b'$; тогда $a^b < a^{b'}$.*

В самом деле, существует целое число $c > 0$, такое, что $b' = b + c$ (предложение 2); так как $c \geqslant 1$, то $a^c \geqslant a > 1$; отсюда $a^{b'} = a^b \cdot a^c > a^b$.

Следствие 3. *Пусть a, b, b' — целые числа* (соответственно *целые числа, такие, что $a > 0$). Для того чтобы было $a + b = a + b'$* (соответственно $ab = ab'$), *необходимо и достаточно, чтобы было $b = b'$.*

В самом деле, если $b \neq b'$, имеем, например, $b < b'$ и предложение 3 показывает, что $a + b < a + b'$ и $ab < ab'$ (если $a > 0$).

Следствие 4. *Если a и b — такие целые числа, что $a \leqslant b$, то существует и единственно целое число c, такое, что $b = a + c$.*

Существование числа c вытекает из предложения 13 § 3, единственность — из только что доказанного следствия 3.

Целое число c такое, что $b = a + c$ (для $a \leqslant b$) называется *разностью* целых чисел b и a и обозначается $b - a$. Мгновенно проверяется, что если a, b, a', b' — целые числа, такие, что $a \leqslant b$ и $a' \leqslant b'$, то

$$(b - a) + (b' - a') = (b + b') - (a + a').$$

3. Интервалы в множествах целых чисел

Всякое множество целых чисел, будучи множеством кардинальных чисел, вполне упорядочено (§ 3, теорема 1); кроме того, для всякого целого числа a соотношение „x — кардинальное число и $x \leqslant a$" коллективизирующее (§ 3, замечание, следующее за теоремой 1), а множество чисел x, удовлетворяющих этому соотношению, является множеством целых чисел (§ 4, предложение 2), которое, таким образом, можно обозначить $[0, a]$.

Предложение 4. *Пусть a и b — целые числа; отображение $x \to a + x$ является строго возрастающим изоморфизмом интервала $[0, b]$ на интервал $[a, a + b]$, а $y \to y - a$ есть обратный изоморфизм.*

Ясно, что соотношения $0 \leqslant x \leqslant b$ влекут

$$a \leqslant a + x \leqslant a + b;$$

отображение $x \to a + x$ — строго возрастающее (и, следовательно, инъективное) в силу предложения 3. Наконец, соотношения $a \leqslant y \leqslant a + b$ влекут $y = a + x$ с $x \geqslant 0$ и $a + x \leqslant a + b$, откуда $x \leqslant b$ (предложение 3), чем и заканчивается доказательство.

Предложение 5. *Если a и b — целые числа, такие, что $a \leqslant b$, то интервал $[a, b]$ есть конечное множество с числом элементов $(b - a) + 1$.*

В силу предложения 4 можно ограничиться случаем $a = 0$. Докажем предложение индукцией по b. Для $b = 0$ оно очевидно. С другой стороны, соотношение $0 \leqslant x \leqslant b + 1$ эквивалентно соотношению „$0 \leqslant x < b + 1$ или $x = b + 1$", а соотношение $0 \leqslant x < b + 1$ эквивалентно соотношению $0 \leqslant x \leqslant b$ (§ 4, предложение 2); иначе говоря, интервал $[0, b + 1]$ есть объединение интервала $[0, b]$ и множества $\{b + 1\}$, причем эти два множества не пересекаются; в силу предположения индукции число элементов в $[0, b + 1]$ равно $(b + 1) + 1$, что и доказывает предложение.

Предложение 6. *Для всякого конечного совершенно упорядоченного множества* E, *имеющего n элементов ($n \geqslant 1$), существует и единствен изоморфизм множества* E *на интервал $[1, n]$.*

Так как E и $[1, n]$ вполне упорядоченны (§ 4, следствие 1 предложения 3) и имеют одинаковое число элементов (предложение 5), предложение вытекает из теоремы 3 § 2 и следствия 2 предложения 2 § 4.

4. Конечные последовательности

Назовем *конечной последовательностью* (соответственно *конечной последовательностью элементов множества* E) семейство (соответственно семейство элементов множества E), множество индексов которого есть конечное множество I целых чисел; число элементов множества I называется в этом случае *длиной* последовательности.

Пусть $(t_i)_{i \in I}$ — конечная последовательность длины n. В силу предложения 6 существует единственный изоморфизм f интервала $[1, n]$ на множество целых чисел I. Для всякого $k \in [1, n]$ говорят, что $t_{f(k)}$ есть *k-й член последовательности*; $t_{f(1)}$ (соответственно $t_{f(n)}$) называется *первым* (соответственно *последним*) членом последовательности.

Пусть $P\{i\}$ — такое соотношение, что элементы i, для которых выполняется $P\{i\}$, образуют конечное множество I целых чисел; конечная последовательность $(t_i)_{i \in I}$ обозначается тогда часто $(t_i)_{P\{i\}}$. Например, когда $I = [a, b]$, употребляют часто обозначение $(t_i)_{a \leqslant i \leqslant b}$. При тех же условиях, чтобы обозначить, например, произведение

семейства множеств $(X_i)_{i \in I}$, используют обозначения $\prod_{P\{i\}} X_i$ и $\prod_{i=a}^{b} X_i$; аналогичные обозначения применяют для объединения, пересечения, кардинального произведения, кардинальной суммы, °законов композиции в Алгебре („Алгебра", гл. I, § 1)$_o$ и т. д.

5. Характеристические функции множеств

Пусть E — непустое множество, A — часть множества E. Назовем *характеристической функцией* части A множества E отображение φ_A множества E в множество $\{0, 1\}$, определенное условиями:

$$\varphi_A(x) = 1 \quad \text{для} \quad x \in A; \qquad \varphi_A(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in E - A.$$

Очевидно, что соотношение $\varphi_A = \varphi_B$ эквивалентно соотношению $A = B$; имеем $\varphi_E(x) = 1$ для всякого $x \in E$, $\varphi_\varnothing(x) = 0$ для всякого $x \in E$, и это единственные постоянные характеристические функции в E. Кроме того, тотчас же из определений вытекает следующее предложение:

Предложение 7. *Для всякой пары подмножеств* A, B *непустого множества* E

(1) $$\varphi_{E-A}(x) = 1 - \varphi_A(x),$$

(2) $$\varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x)\varphi_B(x),$$

(3) $$\varphi_{A \cup B}(x) + \varphi_{A \cap B}(x) = \varphi_A(x) + \varphi_B(x)$$

для любого $x \in E$.

6. Эвклидово деление

Теорема 1. *Пусть a и b — целые числа, такие, что $b > 0$; существуют целые числа q и r, такие, что $a = bq + r$ и $r < b$, причем этими условиями целые числа q и r определены однозначно.*

Требуемые условия эквивалентны условиям $bq \leqslant a < b(q+1)$ и $r = a - bq$ (предложение 2). Все свелось, таким образом, к тому, чтобы найти такое q, что $bq \leqslant a < b(q+1)$; иначе говоря, q должно быть наименьшим целым числом, таким, что $a < b(q+1)$, что показывает, что q и $r = a - bq$ определены однозначно. Для того чтобы показать их существование, заметим, что существуют целые числа p, такие, что $a < bp$, хотя бы $a+1$, так как $b > 0$. Пусть m — наименьшее из этих целых чисел; $m \neq 0$, и поэтому можно написать $m = q+1$ с $q \leqslant m$ (§ 4, предложение 2); отсюда вытекает, что $bq \leqslant a < b(q+1)$.

Определение 1. *В обозначениях теоремы 1 говорят, что r — остаток от деления числа a на b. Если $r = 0$, говорят,*

что a — кратное (для) числа b, или что a делится на b, или что b — делитель числа a, или что b делит число a; число q называется в этом случае частным от деления числа a на b и обозначается $\frac{a}{b}$ или a/b.

Когда a не является кратным для b, число q называется *целой частью частного от деления числа a на b* (ср. „Общая топология", гл. IV, § 8, п° 2).

В этой главе сам факт записи a/b или $\frac{a}{b}$ будет означать, что b делит a.

Соотношения $a = bq$ и $q = a/b$ эквивалентны (если $b > 0$). Всякое кратное a' некоторого кратного a для b является кратным для b, причем $a'/b = (a'/a)(a/b)$, если $a \neq 0$. С другой стороны, если c и d — кратные для b, то $c+d$ и $c-d$ (когда $d \leqslant c$) — кратные для b, причем $\frac{c+d}{b} = \frac{c}{b} + \frac{d}{b}$ и $\frac{c-d}{b} = \frac{c}{b} - \frac{d}{b}$.

Целые числа, кратные для 2, называются *четными*, остальные — *нечетными*; эти последние ввиду теоремы 1 имеют вид $2n+1$.

7. Разложения по основанию b

Предложение 8. *Пусть b — целое число и $b > 1$. Для всякого целого числа $k > 0$ пусть E_k — лексикографическое произведение* (§ 2, п° 6) *семейства $(J_h)_{0 \leqslant h \leqslant k-1}$ интервалов, совпадающих каждый с $[0, b-1]$. Для всякого $r = (r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}) \in E_k$ пусть $f_k(r) = \sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$. Тогда отображение f_k есть изоморфизм упорядоченного множества E_k на интервал $[0, b^k - 1]$.*

Мы будем доказывать предложение индукцией по k; для $k = 1$ оно тотчас же вытекает из определений. Для всякого $r = (r_0, \ldots, r_{k-1}, r_k) \in E_{k+1}$ положим $\varphi(r) = (r_0, \ldots, r_{k-1}) \in E_k$; отображение $r \to (\varphi(r), r_k)$ есть изоморфизм множества E_{k+1} на лексикографическое произведение множества E_k и множества $J = [0, b-1]$, как это вытекает из определений. Можно записать $f_{k+1}(r) = b \cdot f_k(\varphi(r)) + r_k$; покажем, что соотношение $r < r'$ в E_{k+1} влечет $f_{k+1}(r) < f_{k+1}(r')$. В самом деле, имеем тогда либо $\varphi(r) < \varphi(r')$, либо $\varphi(r) = \varphi(r')$ и $r_k < r'_k$. В первом случае предположение индукции влечет, что $f_k(\varphi(r)) < f_k(\varphi(r'))$, значит (§ 4, предложение 2), $f_k(\varphi(r')) \geqslant f_k(\varphi(r)) + 1$; следовательно, $f_{k+1}(r') \geqslant b \cdot f_k(\varphi(r)) + b > f_{k+1}(r)$, так как $r_k \leqslant b - 1$ (предложение 3). Если же $\varphi(r) = \varphi(r')$ и $r_k < r'_k$, очевидно, что $f_{k+1}(r) < f_{k+1}(r')$. С другой стороны, предположение индукции показывает, что $f_k(\varphi(r)) \leqslant b^k - 1$, откуда $f_{k+1}(r) \leqslant b(b^k - 1) + b - 1 = b^{k+1} - 1$. Отсюда заключаем, что f_{k+1} есть изоморфизм множества E_{k+1} на некоторое подмно-

жество интервала $[0, b^{k+1}-1]$; но так как этот интервал и E_{k+1} имеют одинаковое число элементов b^{k+1} (предложение 5), f_{k+1} есть биекция (§ 4, следствие 4 предложения 2), что и заканчивает доказательство.

Заметим теперь, что для всякого целого числа a имеем $a < b^a$: достаточно применить индукцию по a, так как для $a=0$ предложение очевидно, а предположение $a < b^a$ влечет $a+1 \leqslant b^a < b \cdot b^a = b^{a+1}$ (предложение 3 и § 4, предложение 2). Таким образом существует наименьшее целое число k, для которого $a < b^k$, а предложение 8 доказывает тогда [1]), что существует и единственна такая конечная последовательность $(r_h)_{0 \leqslant h \leqslant k-1}$, что $0 \leqslant r_h \leqslant b-1$ для $0 \leqslant h \leqslant k-1$ и $a = \sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$; кроме того, необходимо $r_0 > 0$, иначе из предложения 8 следовало бы, что $a < b^{k-1}$. Говорят, что $\sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$ есть *разложение по основанию* b целого числа a [2]).

°Во всех разделах математики, где не имеются в виду численные расчеты, предложение 8 будет главным образом полезным, когда оно будет применяться к некоторому *простому* целому числу b.$_\circ$

Когда целое число b достаточно мало, чтобы это было осуществимо, каждое целое число $< b$ можно обозначить каким-нибудь отчетливым символом, называемым *цифрой*, причем цифрами, обозначающими 0 и 1, обычно бывают 0 и 1. Пусть a — целое число и $\sum_{h=0}^{k-1} r_h b^{k-h-1}$ — его разложение по основанию b; если целое число k, фигурирующее в этом разложении, достаточно мало, чтобы это было осуществимо, удобно ассоциировать с целым числом a последовательность символов, полученную записыванием слева направо $r_0 r_1 \ldots \ldots r_{k-2} r_{k-1}$ и заменой каждого целого числа r_i цифрой, которая его обозначает; так полученный символ называется *числовым символом*, ассоциированным с a. Число a в термах или соотношениях, в которых оно фигурирует, часто заменяют в этом случае на его числовой символ.

Например, если C, Q, F, D — цифры, числовые символы CQ, CQF, CQFD ассоциируются соответственно с $Cb+Q$, Cb^2+Qb+F, Cb^3+Qb^2+Fb+D.

Из предложения 8 вытекает, что числовой символ, ассоциированный с целым числом a, однозначен и что, если $a < b^k$, он содержит не более k цифр. Заметим, что числовой символ, ассоциированный с целым числом b^k, имеет вид цифры 1 с k последующими цифрами 0.

Эта система изображения целых чисел числовыми символами называется *системой счисления по основанию* b. На практике в численном анализе используют следующие системы: а) систему по основанию 2, или *двоичную систему*, где цифрами являются 0 и 1; б) *десятичную систему*, где цифрами являются 0, 1, 2, 3, 4, $5=4+1$, $6=5+1$, $7=6+1$, $8=7+1$, $9=8+1$ и где b есть целое число $9+1$ (числовым символом которого в этой системе является, таким образом, 10).

Начиная со средних веков в численном анализе по традиции используется десятичная система, и именно ею мы будем пользоваться, когда нам надо будет явно записать какое-нибудь целое число на последующих страницах этого сочинения. Для изложения методов, позволяющих получать числовые символы, ассоциированные с суммой, разностью, произведением или целой частью частного двух чисел, заданных их числовыми символами, мы отсылаем к части этого Трактата, посвященной Численному анализу.

[1]) В случае, если $k > 0$, что справедливо, коль скоро $a > 0$. — *Прим. ред.*

[2]) Заметим, что тем самым разложение определено лишь для $a > 0$. — *Прим. ред.*

8. Комбинаторный анализ

Предложение 9 (принцип пастухов). *Пусть* E *и* F — *два множества*, $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *их кардинальные числа*, f — *сюръекция множества* E *на* F, *такая, что все множества* $\overset{-1}{f}(y)$ *для* $y \in F$ *имеют одинаковое кардинальное число* $\mathfrak{c}$; *тогда* $\mathfrak{a} = \mathfrak{bc}$.

В самом деле, семейство $(\overset{-1}{f}(y))_{y \in F}$ есть разбиение множества E, каждый элемент которого есть множество с кардинальным числом $\mathfrak{c}$, откуда и следует предложение (§ 3, следствие 2 предложения 6).

Определение 2. *Пусть* n — *целое число*; *обозначим через* $n!$ (читается: „n факториал“) *произведение* $\prod_{i<n}(i+1)$.

Имеем $0! = 1$ (гл. II, § 5, n° 3) и $1! = 1$; ясно, что для всякого целого числа n справедливо соотношение $(n+1)! = n!(n+1)$. Это последнее соотношение, объединенное с соотношением $0! = 1$, характеризует, как это видно, терм $n!$ индукцией по n.

Предложение 10. *Пусть* m *и* n — *такие целые числа, что* $m \leqslant n$. *Тогда* $n!/(n-m)!$ *есть число инъективных отображений произвольного множества* A *из* m *элементов в произвольное множество* B *из* n *элементов*.

Докажем индукцией по числу $m \leqslant n$ элементов множества A. Для $m=0$ предложение очевидно. Предположим, что $m+1 \leqslant n$, и пусть A — множество из $m+1$ элементов, A′ — некоторое подмножество множества A, имеющее m элементов, и $\{a\} = A - A'$. Пусть F и F′ — множества инъективных отображений множеств A и A′ соответственно в B и пусть φ — отображение $f \to f_{A'}$, которое всякой функции $f \in F$ ставит в соответствие ее сужение на A′. Для всякой функции $f' \in F'$ элемент f из $\overset{-1}{\varphi}(f')$ своим значением $f(a)$ определяется однозначно; так как f инъективно, необходимо $f(a) \in B - f'(A')$. Отсюда вытекает, что $\overset{-1}{\varphi}(f')$ имеет то же самое число элементов $n-m$, что и $B - f'(A')$; принцип пастухов показывает

тогда, что F содержит $(n-m)\dfrac{n!}{(n-m)!}=\dfrac{n!}{(n-m-1)!}$ элементов в силу предположения индукции, а это доказывает предложение.

Следствие. *Число перестановок конечного множества из n элементов равно $n!$*

В самом деле, это число равно числу инъекций множества в себя (§ 4, следствие 4 предложения 2).

Предложение 11. *Пусть* E — *конечное множество из n элементов и $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$ — конечная последовательность целых чисел, такая, что $\sum_{i=1}^{h} p_i=n$. Тогда число покрытий $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$ множества* E *такими попарно непересекающимися множествами, что* $\mathrm{Card}(X_i)=p_i$ *для* $1\leqslant i\leqslant h$, *равно* $n!/\prod_{i=1}^{h} p_i!$.

Пусть G — множество перестановок множества E, P — множество покрытий $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$, удовлетворяющих сформулированным условиям. Так как $\sum_{i=1}^{h} p_i=n$, то P не пусто. Пусть $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$ — элемент множества P. Для всякой перестановки $f\in G$ семейство $(f(A_i))_{1\leqslant i\leqslant h}$ снова принадлежит к P; обозначим его через $\varphi(f)$. Для всякого элемента $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant h}$ множества P найдем число элементов $f\in G$, таких, что $\varphi(f)=(X_i)$. Чтобы это выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы для всякого индекса i было $f(A_i)=X_i$; таким образом, множество рассматриваемых перестановок f равномощно произведению множеств биекций множества A_i на X_i (гл. II, § 4, предложение 8); следовательно, множество $\overset{-1}{\varphi}((X_i)_{1\leqslant i\leqslant h})$ имеет $\prod_{i=1}^{h} p_i!$ элементов (следствие предложения 10). Так как G имеет $n!$ элементов, достаточно применить принцип пастухов, чтобы получить предложение 11.

Следствие 1. *Пусть* A — *множество из n элементов и p — целое число $\leqslant n$. Число частей множества* A, *имеющих p элементов, есть* $\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$.

Достаточно применить предложение 11 к случаю $h=2$, $p_1=p$, $p_2=n-p$.

Число подмножеств из p элементов множества из n элементов обозначается (если $p\leqslant n$) через $\binom{n}{p}$ и называется (по причинам, которые выясняются в Алгебре, гл. I, § 5) *биномиальным коэффициентом с индексами n и p*. Из соотношения $\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ тотчас вытекает, что $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$.

Это вытекает также из того факта, что если E — множество из n элементов, то $X\to E-X$ есть биекция множества частей множества E, имеющих p элементов, на множество частей множества E, имеющих $n-p$ элементов.

Положим $\binom{n}{p}=0$ для всякой пары натуральных целых чисел, таких, что $p>n$. При этом условии число подмножеств из p элементов произвольного множества из n элементов есть $\binom{n}{p}$ для *всякого* натурального целого числа p.

Следствие 2. *Пусть* E *и* F — *конечные совершенно упорядоченные множества, имеющие соответственно p и n элементов. Тогда число строго возрастающих отображений множества* E *в* F *есть* $\binom{n}{p}$.

В самом деле, такое отображение есть инъекция множества E в F (§ 1, предложение 13), и, поскольку E и F — вполне упорядоченные (§ 4, следствие 1 предложения 3), для всякого подмножества X из p элементов множества F существует единственное строго возрастающее отображение множества E на X (§ 2, теорема 3).

Предложение 12. *Для всякого целого числа n*

$$\sum_{p\leqslant n}\binom{n}{p}=2^n\ [1].$$

В самом деле, если E — множество из n элементов, левая часть есть число подмножеств множества E; применение предложения 12 из § 3 заканчивает доказательство.

Предложение 13. *Пусть n и p — целые числа; тогда*

$$\binom{n+1}{p+1}=\binom{n}{p+1}+\binom{n}{p}.$$

Пусть E — множество из $n+1$ элементов, P — множество частей множества E, имеющих $p+1$ элементов, a — элемент из E и $E'=E-\{a\}$. Обозначим через P' (соответственно через P'') множество частей из $p+1$ элементов множества E, содержащих a (соответственно не содержащих a). Множество P'' есть множество частей из $p+1$ элементов множества E', а значит, оно имеет

[1] В оригинале вместо $\sum_{p\leqslant n}$ стоит $\sum_{p}$, что является, по-видимому, опечаткой. (Заметим, что истолкование $\sum_{p}$ как знака суммирования по всем натуральным целым числам в данный момент невозможно, поскольку лишь в § 6 будет установлено, что натуральные целые числа образуют множество.) — *Прим. ред.*

$\binom{n}{p+1}$ элементов. Отображение $X \to X \cap E'$ есть биекция множества P' на множество частей из p элементов множества E'; P' имеет, таким образом, $\binom{n}{p}$ элементов. Предложение вытекает из того, что P есть объединение непересекающихся множеств P' и P''.

Если $p \leqslant n$, предложеине 13 может также быть доказано несложным вычислением с использоваинем формулы $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Предложение 14. *Пусть n — целое число > 0; число a_n* (соответственно b_n) *таких пар (i, j) целых чисел, что $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$* (соответственно $1 \leqslant i < j \leqslant n$), *есть* $\frac{1}{2}n(n+1)$ [1] $\left(\text{соответственно } \frac{1}{2}n(n-1)\right)$.

В самом деле, b_n есть число двухэлементных частей множества $[1, n]$; следовательно, $b_n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Отсюда получаем a_n, замечая, что множество пар (i, j), таких, что $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, есть объединение множества пар (i, j), для которых $1 \leqslant i < j \leqslant n$, и множества пар (i, i), где $1 \leqslant i \leqslant n$, откуда $a_n = n + b_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Следствие. *Для всякого целого числа $n > 0$* $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$.

В множестве A пар целых чисел (i, j), таких, что $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, обозначим через A_k множество пар (i, k), у которых $1 \leqslant i \leqslant k$ (для всякого целого числа $k \leqslant n$); число элементов множества A_k есть k; с другой стороны, $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ есть разбиение множества A, откуда и вытекает следствие.

Предложение 15. *Пусть n и h — целые числа и E — множество из h элементов. Число отображений u множества E в $[0, n]$, таких, что $\sum_{x \in E} u(x) \leqslant n$* $\left(\text{соответственно } \sum_{x \in E} u(x) = n\right.$ *для $h > 0$*), *есть* $\binom{n+h}{h}$ $\left(\text{соответственно } \binom{n+h-1}{h-1}\right)$.

Пусть $A(h, n)$ (соответственно $B(h, n)$) — число отображений u множества E в $[0, n]$, таких, что $\sum_{x \in E} u(x) \leqslant n$ (соответственно $\sum_{x \in E} u(x) = n$ для $h > 0$). Покажем сначала, что $A(h-1, h) =$

[1]) Здесь и в дальнейшем автор пишет ниогда $\frac{a}{b}c$ вместо $\frac{ac}{b}$. — *Прим. ред.*

$= B(h, n)$; в самом деле, пусть E' — часть множества E из $h-1$ элементов и пусть $\{a\} = E - E'$; если u — отображение множества E в $[0, n]$, такое, что $\sum_{x \in E} u(x) = n$, то его сужение u' на E' таково, что $\sum_{x \in E'} u'(x) \leqslant n$ и, кроме того, $u(a) = n - \sum_{x \in E'} u'(x)$. Обратно, всякое отображение u' множества E' в $[0, n]$, удовлетворяющее условию $\sum_{x \in E'} u'(x) \leqslant n$, определяет единственное отображение u множества E в $[0, n]$, для которого оно является сужением и таким, что $\sum_{x \in E} u(x) = n$.

Заметим теперь, что если $\sum_{x \in E} u(x) \leqslant n$, то либо $\sum_{x \in E} u(x) = n$, либо $\sum_{x \in E} u(x) \leqslant n-1$ — две взаимно исключающие возможности. Следовательно,

$$A(h, n) = A(h, n-1) + B(h, n) = A(h, n-1) + A(h-1, n).$$

Так как $A(0, 0) = 1 = \binom{0}{0}$, формула $A(h, n) = \binom{n+h}{h}$ вытекает из предыдущего и из предложения 13 при помощи индукции по $n+h$.

° Число одночленов с h переменными $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_h^{\alpha_h}$ общей степени $\leqslant n$, очевидно, равно числу отображений $i \to \alpha_i$ множества $[1, h]$ в $[0, n]$, таких, что $\sum_{i=1}^{h} \alpha_i \leqslant n$; оно, следовательно, равно $\binom{n+h}{h}$ в силу предложения 15; это число является также числом одночленов с $h+1$ переменными общей степени n (см. „Алгебра“, гл. IV, § 1). ₒ

Упражнения

1) Доказать формулу

$$\sum_{k=q+1}^{n-p+q+1} \binom{n-k}{p-q-1}\binom{k-1}{q} = \binom{n}{p}$$

для $p \leqslant n$ и $q < n$ (обобщить рассуждение следствия предложения 14).

2) Доказать соотиошение

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \text{ [1]}.$$

[1]) Разумеется, для понимания этого и других упражнений, в тексте которых встречается (-1), вовсе не нужно на самом деле знать отрицательные числа (а то бы эти упражнения нужно было выделять знаками ° ₒ); просто символ $(-1)^n$ должен быть введен специальным соглашением. В формулировке упражнения 2), например, символ $+(-1)^n$ означает „+“ при n четном и „—“ при n нечетном. — *Прим. ред.*

(Определить взаимно однозначное соответствие между множеством частей множества $(1, n)$, имеющих четное число элементов, и множеством частей множества $(1, n)$, имеющих нечетное число элементов; рассмотреть два случая в зависимости от четности числа n.)

3) Доказать соотиошения

$$\binom{n}{0}\binom{n}{p}+\binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{p-2}+\ldots+\binom{n}{p}\binom{n-p}{0}=2^p\binom{n}{p},$$

$$\binom{n}{0}\binom{n}{p}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{p-2}-\ldots+(-1)^p\binom{n}{p}\binom{n-p}{0}=0.$$

(Рассмотреть среди частей множества $(1, n)$, имеющих p элементов, те, которые содержат данную часть из k элементов $(0 \leqslant k \leqslant p)$, и использовать для второй формулы упражнение 2.)

4) Доказать предложение 15, определив биекцию множества отображений u интервала $(1, h)$ в $(0, n)$, для которых $\sum_{x=1}^{h} u(x) \leqslant n$, на множество строго возрастающих отображений интервала $(1, h)$ в $(1, n+h)$.

5) Доказать формулу

$$\binom{n+h}{h}=\binom{h}{1}\binom{n+h-1}{h}-\binom{h}{2}\binom{n+h-2}{h}+\ldots-(-1)^h\binom{h}{n}\binom{n}{h}.$$

(Если F — множество таких отображений u интервала $(0, h)$ в $(0, n)$, что $\sum_{x=0}^{h} u(x)=n$, рассмотреть для каждой части H интервала $(0, h)$ множество отображений $u \in$ F, у которых для каждого $x \in$ H $u(x) \geqslant 1$.)

6) а) Пусть $S_{n,p}$ — число отображеиий интервала $(1, n)$ иа $(1, p)$. Доказать формулу

$$S_{n,p}=p^n-\binom{p}{1}(p-1)^n+\binom{p}{2}(p-2)^n-\ldots+(-1)^{p-1}\binom{p}{p-1}.$$

(Заметить, что

$$p^n=S_{n,p}+\binom{p}{1}S_{n,p-1}+\binom{p}{2}S_{n,p-2}+\ldots+\binom{p}{p-1}$$

и использовать упражнение 3.)

б) Доказать формулу

$$S_{n,p}=p\,(S_{n-1,p}+S_{n-1,p-1})$$

(метод предложения 13).

в) Доказать формулы

$$S_{n+1,n}=\frac{n}{2}(n+1)!,$$

$$S_{n+2,n}=\frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$$

(рассмотреть элементы r интервала $(1, n)$, прообраз которых имеет больше одного элемеита).

г) Если $P_{n,p}$ — число таких разбиений множества из n элементов, которые содержат p подмиожеств, показать, что

$$S_{n,p}=p!\,P_{n,p}.$$

7) Пусть p_n — число таких перестановок u множества E из n элеметов, что $u(x) \neq x$ для всякого $x \in$ E; показать, что

$$p_n=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\ldots+(-1)^n$$

и, следовательио, что $p_n \sim \frac{1}{e}n!$, когда n стремится к $+\infty$ (тот же метод, что и в упражнеиии 6а)).

8) а) Пусть E — множество из qn элементов; показать, что число разбиеиий множества E на n подмиожеств из q элемеитов каждое равио $(qn)!/(n!\,(q!)^n)$.

б) Предположим, что E $=(1, qn)$. Показать, что число разбиений множества E на n подмножеств из q элементов, каждое из которых ие является интервалом, равно

$$\frac{(qn)!}{n!\,(q!)^n}-\frac{(qn-q+1)!}{1!\,(n-1)!\,(q!)^{n-1}}+\frac{(qn-2q+2)!}{2!\,(n-2)!\,(q!)^{n-2}}-\ldots+(-1)^n$$

(тот же метод, что и в упражнениях 6 и 7).

9) Пусть $q_{n,k}$ — число таких строго возрастающих отображений u интервала $(1, k)$ в $(1, n)$, что для всякого четного x (соответственио иечетного) $u(x)$ — четиое (соответственно нечетное). Показать, что $q_{n,k}=q_{n-1,k-1}+q_{n-2,k}$. Вывести из этого формулу

$$q_{n,k}=\binom{\left[\frac{n+k}{2}\right]}{k},$$

где $\left[\frac{n+k}{2}\right]$ — целая часть частного от деления числа $n+k$ на 2.

¶ 10) Пусть E — множество из n элементов, S — множество зиаков, являющееся суммой миожества E и множества, сводящегося к единственному элементу f; предположим, что f имеет вес 2, а любой элемент из E — вес 0 (гл. I, приложеиие, упр. 3).

а) Пусть M — миожество значащих слов моноида $L_0(S)$, содержащих каждый элемент из E один и только один раз. Показать, что число u_n элементов множества M удовлетворяет соотношению $u_{n+1}=(4n-2)\,u_n$, и вывести из этого, что

$$u_n=2\cdot 6\cdot\ldots\cdot(4n-6) \qquad (n \geqslant 2)$$

(„число произведений из n различных термов в случае неассоциативного закона композиции").

б) Пусть x_i — i-й из элементов миожества E, встречающихся в некотором слове из M. Показать, что число v_n слов из M, имеющих заданную последовательиость (x_i), равно $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, и доказать соотиошение

$$v_{n+1}=v_1v_n+v_2v_{n-1}+\ldots+v_{n-1}v_2+v_nv_1.$$

¶ 11) Пусть E — множество из $2m$ элементов, q — целое число, строго меньшее m, $\mathcal{F}$ — множество частей $\mathfrak{S}$ множества $\mathfrak{P}$(E),

имеющих следующее свойство: если X и Y — два различных элемента множества $\mathfrak{S}$, такие, что $X \subset Y$, то число элементов множества $Y - X$ не превосходит $2q$.

а) Пусть $\mathfrak{M} = (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ — максимальный элемент множества $\mathcal{F}$. Показать, что $m - q \leqslant \operatorname{Card}(A_i) \leqslant m + q$ для $1 \leqslant i \leqslant p$. (Рассуждать от противного, предположив, что существуют множества A_i, для которых, например, $\operatorname{Card}(A_i) < m - q$, и рассмотреть те A_i, у которых $\operatorname{Card}(A_i)$ имеет наименьшее возможное значение $m - q - s$ (с $s \geqslant 1$); пусть, например, $A_1, \ldots, A_r$ — эти множества. Пусть $\mathfrak{G}$ — множество частей множества E, каждая из которых есть объединение некоторого A_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ и некоторой части из $2q+1$ элементов, содержащихся в $E - A_i$; показать, что $\mathfrak{G}$ содержит не меньше $r+1$ элементов и что если $B_1, \ldots, B_{r+1}$ — $r+1$ элементов множества $\mathfrak{G}$, то множество, образованное частями B_j $(1 \leqslant j \leqslant r+1)$ и A_i $(r+1 \leqslant i \leqslant p)$, принадлежит к $\mathcal{F}$, что противоречит предположению.)

б) Вывести из а), что число p элементов любого множества $\mathfrak{G} \in \mathcal{F}$ удовлетворяет неравенству

$$p \leqslant \sum_{k=0}^{2q} \binom{2m}{m-q+k}.$$

в) Установить результаты, аналогичные результатам пунктов а) и б), когда $2m$ или $2q$ заменено нечетным числом.

¶ 12) Пусть E — множество из n элементов, A_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ суть m попарно различных частей множества E, отличных от $\varnothing$ и от E.

а) Предположим, что всякое множество $\{x, y\}$ из двух различных элементов множества E содержится в одном и только одном из множеств A_i. Пусть a_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — элементы множества E; для всякого индекса j пусть k_j — число таких частей A_i, что $a_j \in A_i$; для всякого индекса i пусть s_i — число элементов множества A_i. Тогда $\sum_{j=1}^{n} k_j = \sum_{i=1}^{m} s_i$. Показать, что если $a_j \notin A_i$, то $s_i \leqslant k_j$.

б) Вывести из предыдущих свойств, что $m \geqslant n$. (Пусть k_n — наименьшее из чисел k_j; показать, что можно предположить, что для $i \leqslant k_n$, $j \leqslant k_n$ и $i \neq j$ выполняется $a_j \notin A_i$, а для $j > k_n$ выполняется $a_n \notin A_j$.)

в) Показать, что для того, чтобы было $m = n$, необходимо и достаточно, чтобы имел место один из двух следующих случаев: 1° $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, $A_i = \{a_{i-1}, a_n\}$ для $2 \leqslant i \leqslant n$; 2° $n = k(k-1)+1$; всякое A_i есть множество из k элементов, и всякий элемент множества E принадлежит ровно k множествам A_i.

¶ 13) Пусть i, h, k — три целых числа, такие, что $i \geqslant 1$, $h \geqslant i$, $k \geqslant i$. Показать, что существует целое число $m_i(h, k)$, имеющее следующее свойство: для всякого конечного множества E, имеющего не меньше $m_i(h, k)$ элементов, и всякого разбиения $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ множества $\mathfrak{F}_i(E)$ частей множества E, имеющих i элементов, невозможно, чтобы всякая часть из h элементов множества E содержала некоторую часть $X \in \mathfrak{X}$ и всякая часть из k элементов множества E содержала некоторую часть $Y \in \mathfrak{Y}$; другими словами, если всякая часть из h элементов множества E содержит некоторое $X \in \mathfrak{X}$, то существует часть A из k элементов множества E, такая, что всякая часть из i элементов множества A принадлежит к $\mathfrak{X}$. (Рассуждать по индукции: показать, что можно взять $m_1(h, k) = h + k - 1$, $m_i(i, k) = k$ и $m_i(h, i) = h$ и, наконец, $m_i(h, k) = m_{i-1}(m_i(h-1, k), m_i(h, k-1)) + 1$; если E — множество, имеющее $m_i(h, k)$ элементов, a — элемент множества E и $E' = E - \{a\}$, показать, что если бы предложение было неверным, то, во-первых, всякая часть из $m_i(h-1, k)$ элементов множества E′ содержала бы часть X′ из $i-1$ элементов, такую, что $X' \cup \{a\} \in \mathfrak{X}$, и, во-вторых, всякая часть из $m_i(h, k-1)$ элементов множества E′ содержала бы часть Y′ из $i-1$ элементов, такую, что $Y' \cup \{a\} \in \mathfrak{Y}$.)

¶ 14) Пусть h и k — два целых числа $\geqslant 1$ и пусть

$$r(h, k) = (h-1)(k-1) + 1,$$

$I(h, k)$ — интервал $(1, r(h, k))$. Показать, что для всякой конечной последовательности $(x_i)_{i \in I(h,k)}$ элементов совершенно упорядоченного множества E существует либо часть H из h элементов интервала $I(h, k)$, такая, что последовательность $(x_i)_{i \in H}$ возрастающая, либо часть K из k элементов интервала $I(h, k)$, такая, что последовательность $(x_i)_{i \in K}$ убывающая. (Рассуждать индукцией по $k \geqslant 2$, применив предположение индукции к каждому из множеств $(1, r(h, k) - 1) \cup \{m\}$ для $r(h, k) \leqslant m \leqslant r(h, k) + h - 1$.) Показать, что в этой формулировке $r(h, k)$ не может быть заменено строго меньшим целым числом.

§ 6. Бесконечные множества

1. *Множество натуральных целых чисел*

Определение 1. *Говорят, что множество бесконечное, если оно не является конечным.*

В частности, кардинальное число бесконечное, если оно не является целым числом.

Заметим, что из соотношения „существует бесконечное множество“ вытекает, что соотношение „x — целое число“ является *коллективизирующим* (гл. II, § 1, п° 4); в самом деле, если $\mathfrak{a}$ — бесконечное кардинальное число и n — какое-нибудь целое число, то не может быть $\mathfrak{a} \leqslant n$ (§ 4, предложение 2); таким образом, для всякого целого числа n имеем $n < \mathfrak{a}$; это доказывает, что множество целых чисел, строго меньших $\mathfrak{a}$ (§ 3, п° 2, замечание, следующее за теоремой 1), содержит все целые числа. Обратно, если соотношение „x — целое число“ коллективизирующее, множество целых чисел E — *бесконечное* множество: в самом деле, для всякого целого числа n интервал $(0, n)$ есть часть множества E, имеющая $n+1$ элементов (§ 5, предложение 5), таким образом, $\operatorname{Card}(E) \geqslant n+1 > n$) но то, что $\operatorname{Card}(E) \neq n$ для всякого целого числа n означает, что E бесконечно.

Введем следующую аксиому:

А5 (аксиома бесконечности). *Существует бесконечное множество.*

Не известен вывод этой аксиомы из до сих пор введенных аксиом и схем аксиом, и, хотя вопрос окончательно не решен, предполагается, что она независима от них.

Предыдущие замечания доказывают, таким образом, следующую теорему:

Теорема 1. *Соотношение „x — целое число" является коллективизирующим.*

Обозначим через N множество целых чисел (когда хотят предохранить от смешения, говорят также „множество натуральных целых чисел"). Кардинальное число множества N обозначается через $\aleph_0$.

Определение 2. *Назовем последовательностью* (соответственно *последовательностью элементов множества* E) *всякое семейство* (соответственно *семейство элементов множества* E), *множество индексов которого есть часть множества* N; *последовательность называется бесконечной, если ее множество индексов есть бесконечная часть множества* N.

Пусть P{n} — соотношение; обозначим через I множество таких целых чисел n, что P{n} истинно; множество I является, таким образом, частью множества N; последовательность $(x_n)_{n \in I}$ обозначается часто $(x_n)_{P\{n\}}$; говорят, что x_n — *член последовательности с индексом* n. Последовательность, множество индексов которой есть множество целых чисел $n \geqslant k$, обозначается часто $(x_n)_{k \leqslant n}$ или $(x_n)_{n \geqslant k}$ или даже (x_n), когда $k = 0$ или $k = 1$. При тех же условиях, чтобы обозначить, например, произведение последовательности множеств $(X_n)_{n \in I}$, используют обозначения $\prod_{P\{n\}} X_n$ и $\prod_{n=k}^{\infty} X_n$; аналогичные обозначения употребляют для объединения, пересечения, кардинальной суммы и кардинального произведения.

Всякое подсемейство какой-либо последовательности есть последовательность; ее называют *подпоследовательностью* рассматриваемой последовательности.

Говорят, что две последовательности $(x_n)_{n \in I}$, $(y_n)_{n \in I}$, имеющие одинаковое множество индексов, *отличаются только порядком членов*, если существует перестановка f множества индексов I, такая, что $x_{f(n)} = y_n$ для любого $n \in I$.

Кратной последовательностью назовем семейство, множество индексов которого есть часть некоторого произведения N^p (где p — целое число[1])) (еще говорят „p-кратная последовательность", „двойная последовательность" для $p = 2$, «тройная последовательность» для $p = 3$ и т. д.).

[1]) Согласно гл. II, § 5, п° 3, множество N^p равно произведению $\prod_{\iota \in p} X_\iota$, где сомножители X_ι равны N. Не исключено, впрочем, что понятие натурального числа употреблено здесь в метаматематическом смысле (см. авторское подстрочное примечание к гл. IV, § 1, п° 1) и что $N^p = \underbrace{N \times \ldots \times N}_{p \text{ раз}}$ (ср. Рез., § 3, п° 12). — *Прим. ред.*

Пусть I — множество, равномощное множеству N, а f — биекция множества N на I. Для всякого семейства $(x_\iota)_{\iota \in I}$ с множеством индексов I про последовательность $n \to x_{f(n)}$ говорят, что она получена *расположением семейства* $(x_\iota)_{\iota \in I}$ *в порядке, определенном отображением* f. Последовательности, соответствующие, таким образом, двум различным биекциям множества N на I, отличаются только порядком членов. Для конечного семейства с множеством индексов I из n элементов аналогично определяют конечную последовательность с множеством индексов $[1, n]$ или $[0, n-1]$, располагая семейство в порядке, определенном некоторой биекцией множества I на один из указанных интервалов.

2. Определение отображений индукцией

Так как множество N вполне упорядочено, к нему можно применить критерий C60 (§ 2, п° 2), который здесь принимает вид (в тех же обозначениях):

C62. *Пусть u — буква, T{u} — терм. Тогда существуют множество U и отображение f множества N на U, такие, что для любого целого числа n*

$$f(n) = T\{f^{(n)}\},$$

где через $f^{(n)}$ обозначено отображение интервала $[0, n[$ на $f([0, n[)$, совпадающее на $[0, n[$ с f. Кроме того, этими условиями множество U и отображение f определены однозначно.

Выведем сейчас из этого критерия следующий критерий.

C63. *Пусть S{v} и a — два терма. Тогда существуют множество V и отображение f множества N на V, такие, что $f(0) = a$ и для любого целого числа $n \geqslant 1$*

$$f(n) = S\{f(n-1)\}.$$

Кроме того, этими условиями множество V и отображение f определены однозначно.

Чтобы вывести C63 из C62[1]), положим для всякой буквы u

$$D(u) = \mathcal{E}_x(x \in N \text{ и } (\exists y)((x, y) \in pr_1(pr_1(u)))).$$

[1]) Критерий C63 можно было бы доказать также и непосредственно рассуждением, аналогичным доказательству критерия C60 (§ 2, п° 2).

Когда u — отображение некоторого подмножества множества $\mathbf{N}$ в некоторое множество, $D(u)$ есть не что иное, как область определения отображения u (гл. II; § 3, п° 1). Пусть $M(u)$ — верхняя грань множества $D(u)$ в $\mathbf{N}$[1]. Пусть φ — пустое отображение (с $\varnothing$ в качестве области отправления и области прибытия, иначе говоря (гл. II, § 3, п° 1 и 4), тройка $(\varnothing, \varnothing, \varnothing)$); рассмотрим соотношение

$$(u = \varphi \text{ и } y = a) \quad \text{или} \quad (u \neq \varphi \text{ и } y = S\{u(M(u))\}),$$

которое мы обозначим через $R\{y, u\}$; наконец, пусть $T\{u\}$ — терм $\tau_y(R\{y, u\})$. Применим критерий C62 к терму $T\{u\}$; так как $f^{(0)}$ равно φ, $T\{f^{(0)}\} = a$, таким образом, $f(0) = a$; если же $n > 0$, то $D(f^{(n)}) = [0, n-1]$ и $M(f^{(n)}) = n-1$, откуда $T\{f^{(n)}\} = S\{f^{(n)}(n-1)\} = S\{f(n-1)\}$.

Примеры. 1) Предположим, что a — элемент множества E, $S\{u\}$ — терм $g(u)$, где g — отображение множества E в себя[2]. Тогда индукция по n тотчас же показывает, что для всякого $n \in \mathbf{N}$ имеем $f(n) \in E$; таким образом, f — это такое отображение множества $\mathbf{N}$ в E, что $f(0) = a$ и $f(n+1) = g(f(n))$ для всякого целого числа n.

Аналогично пусть h — отображение множества $\mathbf{N} \times E$ в E и пусть ψ — отображение множества $\mathbf{N} \times E$ в себя, определенное равенством $\psi(n, x) = (n+1, h(n, x))$. На основании предыдущего существует единственное отображение g множества $\mathbf{N}$ в $\mathbf{N} \times E$, такое, что $g(0) = (0, a)$ и $g(n+1) = \psi(g(n))$ для всякого n; отсюда заключаем о существовании и единственности такого отображения f множества $\mathbf{N}$ в E, что $f(0) = a$ и $f(n+1) = h(n, f(n))$ для всякого целого числа n.

2) Пусть X — множество, E — множество отображений множества X в себя; пусть e — тождественное отображение множества X в себя и f — какой-нибудь элемент из E. Возьмем за $S\{u\}$ терм $f \circ u$[3]. Применяя C63, видим, что существует и единственно отображение множества $\mathbf{N}$ в E (обозначим его $n \to f^n$), такое, что $f^0 = e$ и $f^{n+1} = f \circ f^n$. Отображение f^n называется ***n-й итерацией*** отображения f.

---

[1]) Определеиие верхией грани (§ 1, п° 7, 8 и 9) может быть сформулироваио таким образом, чтобы оио сохраняло смысл и для миожества, не являющегося ограниченным сверху (оио указывает некоторый терм формализованного языка вида $\tau_x(R\{x\})$, который читатель выявит без труда).

[2]) Если $g = (G, E, E)$, терм $g(u)$ есть терм, обозначенный через $\tau_y((u, y) \in G)$.

[3]) Речь идет здесь о терме, обозначаемом через (T, X, X), где T — терм, обозначаемый через

$$\mathscr{E}_z(z \text{ есть пара и } (\exists y)((\mathrm{pr}_1 z, y) \in \mathrm{pr}_1(\mathrm{pr}_1(u)) \text{ и } (y, \mathrm{pr}_2 z) \in \mathrm{pr}_2(\mathrm{pr}_1(f)))).$$

3) Если в качестве $S\{u\}$ взять терм $\mathfrak{P}(u)$, а в качестве a — множество E, аналогично видно, что существует такое отображеиие (обозиачим его $n \to \mathfrak{P}^n(E)$) множества $\mathbf{N}$ в множество $V(E)$, что $\mathfrak{P}^0(E) = E$, $\mathfrak{P}^1(E) = \mathfrak{P}(E)$ и $\mathfrak{P}^{n+1}(E) = \mathfrak{P}(\mathfrak{P}^n(E))$ для всякого целого числа n.

Замечание. Пусть E — множество, A — часть миожества E, g — отображение множества A в E, a — элемент множества A. Возьмем за $S\{u\}$ терм $g(u)$. Можно применить критерий C63, который докажет существование такого отображения f множества $\mathbf{N}$ на множество V, что $f(0) = a$ и $f(n+1) = g(f(n))$ для всякого целого числа n. Может случиться, что $V \subset A$, в противном случае пусть p — иаибольшее целое число, такое, что $f([0, p]) \subset A$; тогда $f(p+1) = g(f(p)) \notin A$ и $g(g(f(p)))$ есть терм, о котором ничего нельзя сказать. Поэтому в этом случае считают также, что f определено только на интервале $[0, p+1]$ („ограниченная индукция").

3. Вычисления с бесконечными кардинальными числами

Теорема 2. *Для всякого бесконечного кардинального числа* $\mathfrak{a}$ *имеет место равенство* $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$.

Нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Всякое бесконечное множество* E *содержит подмножество, равномощное множеству* $\mathbf{N}$.

На E существует соотношение полного порядка (§ 2, теорема 1), которое мы обозначим $x \leqslant y$. В силу условия вполне упорядоченное множество E не может быть изоморфным никакому отрезку множества $\mathbf{N}$, отличному от $\mathbf{N}$, ибо такой отрезок имеет вид $[0, n]$ (§ 2, предложение 1) и, следовательно, конечен (§ 5, предложение 5). Отсюда вытекает, что $\mathbf{N}$ изоморфно некоторому отрезку множества E (§ 2, теорема 3), что и доказывает лемму.

Лемма 2. Множество $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *равномощно множеству* $\mathbf{N}$.

Так как $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ содержит множество $\{0\} \times \mathbf{N}$, равномощное множеству $\mathbf{N}$, $\mathrm{Card}(\mathbf{N}) \leqslant \mathrm{Card}(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$. С другой стороны, определим инъекцию f множества $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$. Для этого заметим, что существует инъекция φ множества $\mathbf{N}$ в множество отображений множества $\mathbf{N}$ в $I = \{0, 1\}$, получающаяся следующим образом: если r — наименьшее целое число, такое, что $n < 2^r$, и $\sum_{k=0}^{r-1} \varepsilon_k 2^{r-k-1}$ — двоичное разложение числа n (§ 5, п° 7), то $\varphi(n)$ есть последовательность $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$, в которой $u_m = \varepsilon_{r-m-1}$ для $m < r$ и $u_m = 0$ для $m \geqslant r$; предложение 8 § 5 показывает, что φ инъективно. Установив это, для всякой пары $(n, n') \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ определим $f(n, n')$ следующим образом: если $\varphi(n) = (u_m)$ и $\varphi(n') = (v_m)$, то пусть $f(n, n')$ будет таким целым числом s, что $\varphi(s) = (w_m)$, где $w_{2m} = u_m$ и $w_{2m+1} = v_m$ для всякого $m \in \mathbf{N}$. Ясно, что соотношение $f(n, n') = f(n_1, n'_1)$ влечет $\varphi(n) = \varphi(n_1)$ и $\varphi(n') = \varphi(n'_1)$, следовательно, $(n, n') = (n_1, n'_1)$, что

и доказывает инъективность отображения f. Значит, $\mathrm{Card}(\mathrm{N}\times\mathrm{N})\leqslant\mathrm{Card}(\mathrm{N})$; это заканчивает доказательство леммы.

После того как эти леммы доказаны, пусть E — такое множество, что $\mathrm{Card}(\mathrm{E})=\mathfrak{a}$. Пусть D — часть множества E, равномощная множеству N (лемма 1); существует биективное отображение ψ_0 множества D на $\mathrm{D}\times\mathrm{D}$ (лемма 2). Пусть $\mathfrak{M}$ — множество пар (X, ψ), где X — подмножество множества E, содержащее D, а ψ — биективное отображение множества X на $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$, являющееся продолжением отображения ψ_0. Упорядочим множество $\mathfrak{M}$ соотношением

„$\mathrm{X}\subset\mathrm{X}'$ и ψ' — продолжение отображения ψ"

между (X, ψ) и (X', ψ'); тотчас же проверяется, что $\mathfrak{M}$ — *индуктивное* множество (см. § 2, п° 4, пример 2). Таким образом, в силу теоремы 2 § 2 $\mathfrak{M}$ имеет максимальный элемент (F, f). Покажем, что $\mathrm{Card}(\mathrm{F})=\mathfrak{a}$, чем теорема и будет доказана. В противном случае, так как $\mathfrak{b}=\mathrm{Card}(\mathrm{F})$ таково, что $\mathfrak{b}^2=\mathfrak{b}$, и бесконечно, имеем $\mathfrak{b}\leqslant 2\mathfrak{b}\leqslant 3\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{b}^2=\mathfrak{b}$ (§ 3, предложение 14), а значит, $2\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$ и $3\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$. Из предположения $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ вытекает, что $\mathrm{Card}(\mathrm{E}-\mathrm{F})>\mathfrak{b}$, ибо в противном случае мы бы имели $\mathrm{Card}(\mathrm{E})\leqslant 2\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$, а мы предположили, что $\mathfrak{b}<\mathrm{Card}(\mathrm{E})$. Таким образом, существует часть $\mathrm{Y}\subset\mathrm{E}-\mathrm{F}$, равномощная множеству F; положим $\mathrm{Z}=\mathrm{F}\cup\mathrm{Y}$ и покажем, что существует биекция g множества Z на $\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}$, продолжающая отображение f. В самом деле,

$$\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}=(\mathrm{F}\times\mathrm{F})\cup(\mathrm{F}\times\mathrm{Y})\cup(\mathrm{Y}\times\mathrm{F})\cup(\mathrm{Y}\times\mathrm{Y})$$

и четыре множества, объединением которых является правая часть, не пересекаются; так как F и Y равномощны,

$$\mathrm{Card}(\mathrm{F}\times\mathrm{Y})=\mathrm{Card}(\mathrm{Y}\times\mathrm{F})=\mathrm{Card}(\mathrm{Y}\times\mathrm{Y})=\mathfrak{b}^2=\mathfrak{b},$$

откуда

$$\mathrm{Card}((\mathrm{F}\times\mathrm{Y})\cup(\mathrm{Y}\times\mathrm{F})\cup(\mathrm{Y}\times\mathrm{Y}))=3\mathfrak{b}=\mathfrak{b}.$$

Таким образом, существует биективное отображение f_1 множества Y на множество $(\mathrm{F}\times\mathrm{Y})\cup(\mathrm{Y}\times\mathrm{F})\cup(\mathrm{Y}\times\mathrm{Y})$; отображение g множества Z в $\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}$, равное отображению f в F и отображению f_1 в Y, является тогда биекцией, продолжающей отображение f, что противоречит определению отображения f.

Следствие 1. *Если $\mathfrak{a}$ — бесконечное кардинальное число, то $\mathfrak{a}^n=\mathfrak{a}$ для всякого целого числа $n\geqslant 1$.*

Очевидно ввиду индукции по n.

Следствие 2. *Произведение конечного семейства $(\mathfrak{a}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ неравных нулю кардинальных чисел, наибольшее из которых есть бесконечное кардинальное число $\mathfrak{a}$, равно $\mathfrak{a}$.*

Пусть $\mathfrak{b}$ — это произведение и пусть n — число элементов множества I; имеем $\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}^n=\mathfrak{a}$ (§ 3, предложение 14); с другой стороны, так как $\mathfrak{a}_i\geqslant 1$ для всякого i, имеем $\mathfrak{b}\geqslant\mathfrak{a}$ (§ 3, предложение 14).

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{a}$ — бесконечное кардинальное число и $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$ — семейство кардинальных чисел $\leqslant\mathfrak{a}$, множество индексов I которого имеет кардинальное число $\leqslant\mathfrak{a}$. Тогда $\sum_{\iota\in\mathrm{I}}\mathfrak{a}_\iota\leqslant\mathfrak{a}$; кроме того, если $\mathfrak{a}_\iota=\mathfrak{a}$ хотя бы для одного индекса ι, то $\sum_{\iota\in\mathrm{I}}\mathfrak{a}_\iota=\mathfrak{a}$.*

Пусть $\mathfrak{b}$ — кардинальное число множества I; тогда $\sum_{\iota\in\mathrm{I}}\mathfrak{a}_\iota\leqslant\mathfrak{a}\mathfrak{b}\leqslant\mathfrak{a}^2=\mathfrak{a}$ (§ 3, предложение 14) и $\sum_{\iota\in\mathrm{I}}\mathfrak{a}_\iota\geqslant\mathfrak{a}_\varkappa$ для всякого $\varkappa\in\mathrm{I}$.

Следствие 4. *Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два неравных нулю кардинальных числа, по крайней мере одно из которых бесконечно, то $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\sup(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$.*

Это тотчас же вытекает из следствий 2 и 3.

4. Счетные множества

Определение 3. *Множество называется счетным, если оно равномощно некоторому подмножеству множества N целых чисел*[1]).

Предложение 1. *Всякое подмножество счетного множества счетно. Произведение конечного семейства счетных множеств счетно. Объединение последовательности счетных множеств счетно.*

Первое утверждение очевидно. Остальные вытекают из следствий теоремы 2.

Мы уже видели (лемма 1), что для всякого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{a}$ справедливо $\mathrm{Card}(\mathrm{N})\leqslant\mathfrak{a}$. Отсюда вытекают следствия:

Предложение 2. *Всякое бесконечное счетное множество E равномощно множеству N.*

В самом деле, $\mathrm{Card}(\mathrm{E})\leqslant\mathrm{Card}(\mathrm{N})$ по определению и, так как E бесконечное, $\mathrm{Card}(\mathrm{N})\leqslant\mathrm{Card}(\mathrm{E})$.

Предложение 3. *Всякое бесконечное множество E допускает разбиение $(\mathrm{X}_\iota)_{\iota\in\mathrm{I}}$, образованное бесконечными счетными множествами X_ι, множество индексов I которого равномощно множеству E.*

[1]) Относительно термина „счетный" см. подстрочное примечание к п° 7 § 7 сводки результатов (стр. 394). — *Прим. ред.*

В самом деле, Card (E) = Card (E) Card (N) (следствие 4 теоремы 2).

Предложение 4. *Пусть f — отображение множества* E *на бесконечное множество* F, *такое, что для всякого* $y \in F$ $\overset{-1}{f}(y)$ *счетно. Тогда* F *равномощно множеству* E.

В самом деле, множества $\overset{-1}{f}(y)$ $(y \in F)$ образуют разбиение множества E, следовательно, Card (E) $\leqslant$ Card (F) Card (N) = Card (F); с другой стороны, известно, что Card (F) $\leqslant$ Card (E) (§ 3, предложение 3).

Предложение 5. *Множество* $\mathfrak{F}$(E) *конечных частей бесконечного множества* E *равномощно множеству* E.

Для всякого целого числа n обозначим через $\mathfrak{F}_n$ множество частей множества E, имеющих n элементов. Для всякого $X \in \mathfrak{F}_n$ существует биекция интервала $[1, n]$ на X; следовательно, кардинальное число множества $\mathfrak{F}_n$ меньше или равно кардинальному числу множества отображений интервала $[1, n]$ в E, т. е. Card (E^n) = Card (E) (следствие 1 теоремы 2). Значит,

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{F}(E)) = \sum_{n \in N} \mathrm{Card}(\mathfrak{F}_n) \leqslant \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(N) = \mathrm{Card}(E).$$

С другой стороны, так как $x \to \{x\}$ есть инъективное отображение множества E в $\mathfrak{F}$(E), то Card (E) $\leqslant$ Card ($\mathfrak{F}$(E)).

Следствие. *Множество* S *конечных последовательностей элементов бесконечного множества* E *равномощно множеству* E.

В самом деле, S есть объединение множеств E^I, где I пробегает множество $\mathfrak{F}$(N) конечных подмножеств множества N. Но, когда $I \in \mathfrak{F}(N)$ и $I \neq \varnothing$, E^I равномощно множеству E, а $\mathfrak{F}$(N) счетно в силу предложения 5. Следовательно,

$$\mathrm{Card}(E) \leqslant \mathrm{Card}(S) \leqslant \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(N) = \mathrm{Card}(E).$$

Определение 4. *Говорят, что множество имеет мощность континуума, если оно равномощно множеству частей множества* N.

Множество мощности континуума не счетно (§ 3, теорема 2).

°Термин „мощность континуума" происходит от того, что множество действительных чисел равномощно множеству $\mathfrak{P}$(N) („Общая топология", гл. IV, § 8).° *Гипотеза континуума* есть утверждение, что всякое несчетное множество содержит часть, имеющую мощность континуума; *обобщенная гипотеза континуума* есть утверждение, что для всякого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{a}$ любое кардинальное число, которое $> \mathfrak{a}$, является кардинальным числом $\geqslant 2^{\mathfrak{a}}$. В настоящее время доказательства этих утверждений неизвестны [1]).

[1]) И невозможны: см. подстрочное примечание на стр. 344. — *Прим. ред.*

5. Стационарные последовательности

Определение 5. *Последовательность* $(x_n)_{n \in N}$ *элементов множества* E *называется стационарной, если существует целое число* m, *такое, что* $x_n = x_m$ *для всякого целого числа* $n \geqslant m$.

Предложение 6. *Пусть* E — *упорядоченное множество. Следующие предложения эквивалентны*:

а) *всякая непустая часть множества* E *имеет максимальный элемент*;

б) *всякая возрастающая последовательность* (x_n) *элементов множества* E *стационарна.*

Покажем сначала, что а) влечет б); в самом деле, пусть X — множество элементов последовательности (x_n) и пусть x_m — максимальный элемент множества X; для $n \geqslant m$ по предположению $x_n \geqslant x_m$, откуда по определению элемента x_m $x_n = x_m$. Обратно, предположим, что существует непустая часть A множества E, не имеющая максимального элемента; для всякого $x \in A$ пусть T_x — множество таких элементов $y \in A$, что $y > x$. По предположению $T_x \neq \varnothing$ для всякого $x \in A$; следовательно, существует отображение f множества A в A, такое, что $f(x) > x$ для всякого $x \in A$ (гл. II, § 5, предложение 6); если $a \in A$ и последовательность $(x_n)_{n \in N}$ определена индукцией при помощи условий $x_0 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$, то ясно, что эта последовательность возрастающая и нестационарная.

Следствие 1. *Для того чтобы совершенно упорядоченное множество* E *было вполне упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы всякая убывающая последовательность элементов множества* E *была стационарной.*

В самом деле, сказать, что E вполне упорядоченное, это все равно, что сказать: всякое непустое подмножество множества E обладает минимальным элементом (§ 1, предложение 9), и, значит, наше утверждение вытекает из предложения 6.

Следствие 2. *Всякая возрастающая последовательность элементов конечного упорядоченного множества* E *стационарна.*

В самом деле, всякое конечное упорядоченное множество обладает максимальным элементом (§ 4, следствие 2 предложения 3).

Упражнения

1) Чтобы множество E было бесконечным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого отображения f множества E в E существовала непустая часть S множества E, для которой $S \neq E$ и $f(S) \subset S$.

2) Показать, что если $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ — такие четыре кардинальных числа, что $\mathfrak{a} < \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$, то $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} < \mathfrak{c} + \mathfrak{d}$ и $\mathfrak{a}\mathfrak{b} < \mathfrak{c}\mathfrak{d}$ (ср. упр. 22).

3) Если E — бесконечное множество, множество частей множества E, равномощных множеству E, равномощно множеству $\mathfrak{P}$(E) (использовать предложение 3).

4) Если E — бесконечное множество, то множество разбиений множества E равномощно множеству $\mathfrak{P}(E)$ (всякому разбиению $(X_\iota)_{\iota \in I}$ соотнести множество $\bigcup_{\iota \in I} (X_\iota \times X_\iota)$ в $E \times E$).

5) Если E — бесконечное множество, то множество перестановок множества E равномощно множеству $\mathfrak{P}(E)$ (использовав предложение 3, показать, что для всякой части A множества E, дополнение к которой не сводится к единственному элементу, существует такая перестановка f множества E, что A является множеством элементов, инвариантных относительно f).

6) Пусть E и F — два бесконечных множества, такие, что

$$\operatorname{Card}(F) \leqslant \operatorname{Card}(E).$$

Показать, что множество отображений множества E на F, множество отображений множества E в F и множество отображений частей множества E в F равномощны множеству $\mathfrak{P}(E)$.

7) Пусть E и F — два бесконечных множества, такие, что

$$\operatorname{Card}(E) < \operatorname{Card}(F).$$

Показать, что множество частей множества F, равномощных множеству E, и множество инъекций множества E в F равномощны каждое множеству F^E отображений множества E в F (для каждого отображения f множества E в F рассмотреть инъекцию $x \to (x, f(x))$ множества E в $E \times F$).

8) Показать, что множество структур[1]) вполне упорядоченного множества (и *тем более* множество порядков) на бесконечном множестве E равномощно множеству $\mathfrak{P}(E)$ (использовать упражнение 5).

9) Показать, что если в непустом вполне упорядоченном множестве E всякий элемент x, отличный от наименьшего элемента множества E, обладает *предшественником* (наибольшим элементом интервала $]\leftarrow, x[$), то E изоморфно либо множеству N, либо некоторому интервалу $[0, n[$ множества N (используя предложение 6, заметить, что всякий отрезок $\neq$ E конечен, затем применить теорему 3 § 2).

¶ 10) Через ω или ω_0 обозначают ординальное число Ord (N) (§ 2, упр. 13); таким образом, множество целых чисел есть вполне упорядоченное множество, изоморфное множеству ординальных чисел $< \omega$; для всякого целого числа n ординальное число Ord $([0, n[)$ обозначим (допуская вольность речи) снова через n.

а) Показать, что для всякого кардинального числа $\mathfrak{a}$ соотношение „ξ — ординальное число и $\operatorname{Card}(\xi) < \mathfrak{a}$" является коллективизирующим (использовать теорему Цермело). Обозначим через $W(\mathfrak{a})$ множество ординальных чисел ξ, таких, что $\operatorname{Card}(\xi) < \mathfrak{a}$.

б) Для всякого ординального числа $\alpha > 0$ во вполне упорядоченном множестве $O'(\alpha)$ ординальных чисел $\leqslant \alpha$ определим трансфинитной индукцией функцию f_α при помощи следующих условий: $f_\alpha(0) = \omega_0 = \omega$, и для всякого ξ, такого, что $0 < \xi \leqslant \alpha$, $f_\alpha(\xi)$ есть верхняя грань (§ 2, упр. 13г)) множества таких ординальных чисел ζ, что $\operatorname{Card}(\zeta) \leqslant \operatorname{Card}(f_\alpha(\eta))$ по крайней мере для одного ординального числа $\eta < \xi$. Показать, что если $0 \leqslant \eta < \xi \leqslant \alpha$, то $\operatorname{Card} f_\alpha(\eta) < \operatorname{Card} f_\alpha(\xi)$, и что если $\xi \leqslant \alpha \leqslant \beta$, то $f_\alpha(\xi) = f_\beta(\xi)$; положим $\omega_\alpha = f_\alpha(\alpha)$ и скажем, что ω_α — *начальное ординальное число* индекса α; имеем $\omega_\alpha \geqslant \alpha$. Положим

[1]) О понятии „структура" см. гл. IV. — *Прим. ред.*

$\aleph_\alpha = \operatorname{Card}(\omega_\alpha)$ и скажем, что $\aleph_\alpha$ — *алеф индекса* α; в частности, $\aleph_0 = \operatorname{Card}(N)$.

в) Показать, что для всякого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{a}$ верхняя грань λ множества ординальных чисел $W(\mathfrak{a})$ есть некоторое начальное ординальное число ω_α и что $\mathfrak{a} = \aleph_\alpha$ (рассмотреть наименьшее из ординальных чисел μ, таких, что $\omega_\mu \geqslant \lambda$); иначе говоря, ω_α есть наименьшее ординальное число ξ, такое, что $\operatorname{Card}(\xi) = \aleph_\alpha$. Для всякого ординального числа α отображение $\xi \to \aleph_\xi$, определенное в $O'(\alpha)$, есть изоморфизм вполне упорядоченного множества $O'(\alpha)$ на вполне упорядоченное множество кардинальных чисел $\leqslant \aleph_\alpha$; в частности, $\aleph_{\alpha+1}$ есть наименьшее из кардинальных чисел $> \aleph_\alpha$. Показать, что если α не имеет предшественника, то для всякого строго возрастающего отображения $\xi \to \sigma_\xi$ ординального числа β в α, для которого $\alpha = \sup_{\xi < \beta} \sigma_\xi$ имеем $\sum_{\xi < \beta} \aleph_{\sigma_\xi} = \aleph_\alpha$.

г) Вывести из в), что ω_ξ есть нормальный ординальный функциональный символ (§ 2, упр. 16).

¶ 11) а) Показать, что ординальное число ω является наименьшим ординальным числом > 0, не имеющим предшественника, что ω неразложимо (§ 2, упр., 15) и что для всякого ординального числа $\alpha > 0$ ординальное число $\alpha\omega$ есть наименьшее неразложимое ординальное число $> \alpha$ (заметить, что $n\omega = \omega$ для всякого целого числа n). Вывести из этого, что $(\alpha + 1)\omega = \alpha\omega$ для всякого $\alpha > 0$.

б) Вывести из а), что для того, чтобы ординальное число было неразложимым, необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид ω^β (использовать упр. 17г) из § 2).

¶ 12) а) Показать, что для всякого ординального числа α и всякого ординального числа $\gamma > 1$ существуют две конечные последовательности ординальных чисел (λ_i) и (μ_i) $(1 \leqslant i \leqslant k)$, такие, что

$$\alpha = \gamma^{\lambda_1}\mu_1 + \gamma^{\lambda_2}\mu_2 + \ldots + \gamma^{\lambda_k}\mu_k,$$

$0 < \mu_i < \gamma$ для всякого i и $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ для $1 \leqslant i \leqslant k-1$ (использовать упр. 17г) § 2 и упр. 3 § 4). Кроме того, этими условиями последовательности (λ_i) и (μ_i) определены однозначно. В частности, существует и единственна конечная убывающая последовательность $(\beta_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$, такая, что

$$\alpha = \omega^{\beta_1} + \omega^{\beta_2} + \ldots + \omega^{\beta_m}.$$

Обозначим через $\varphi(\alpha)$ наибольшее ординальное число ω^{β_1} этого разложения.

б) Для всякого целого числа n пусть $f(n) \leqslant n!$ — наибольшее число элементов в множестве ординальных чисел вида

$$\alpha_{\sigma(1)} + \alpha_{\sigma(2)} + \ldots + \alpha_{\sigma(n)},$$

где $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — последовательность из n каких-нибудь ординальных чисел, а σ пробегает множество перестановок интервала $[1, n]$. Показать, что

$$f(n) = \sup_{k \leqslant n-1} (k2^{k-1} + 1) f(n-k). \tag{1}$$

(Рассмотреть сначала случай, когда все $\varphi(\alpha_i)$ равны между собой, и показать, что тогда наибольшее возможное число различных ординальных чисел требуемого вида равно n; для этого использовать

упр. 15а) § 2. Затем рассуждать индукцией по числу ординальных чисел α_i, для которых $\varphi(\alpha_i)$ принимает наименьшее возможное значение в множестве чисел $\varphi(\alpha_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.)

Вывести из (1), что для $n \geqslant 21$ $f(n) = 81 f(n-5)$.

в) Показать, что все $n!$ ординальных чисел $(\omega + \sigma(1))(\omega + \sigma(2)) \ldots \ldots (\omega + \sigma(n))$, где σ пробегает множество перестановок интервала $(1, n)$, различны.

¶ 13) а) Пусть $w(\xi)$ — такой ординальный функциональный символ, определенный для $\xi \geqslant \alpha_0$, что соотношение $\alpha_0 \leqslant \xi < \xi'$ влечет $w(\xi) < w(\xi')$. Показать, что если $\xi \geqslant \alpha_0$, то $w(\xi + \eta) \geqslant w(\xi) + \eta$ для всякого ординального числа η (рассуждать от противного). Вывести из этого, что существует такое α, что $w(\xi) \geqslant \xi$ для всякого $\xi \geqslant \alpha$ (взять за α наименьшее ординальное неразложимое число $\geqslant \alpha_0$; см. упр. 11а)).

б) Пусть $f(\xi, \eta)$ — ординальный функциональный символ, определенный в упр. 16б) § 2; предположим, что соотношения $\alpha_0 \leqslant \xi \leqslant \xi'$ и $\alpha_0 \leqslant \eta \leqslant \eta'$ влекут $g(\xi, \eta) \leqslant g(\xi', \eta')$, тогда соотношения $\alpha_0 \leqslant \xi \leqslant \xi'$ и $1 \leqslant \eta \leqslant \eta'$ влекут $f(\xi, \eta) \leqslant f(\xi', \eta')$ (§ 2, упр. 16г)). Показать, что для всякого ординального числа β существует только конечное число ординальных чисел η, для которых уравнение $f(\xi, \eta) = \beta$ имеет хотя бы одно решение (заметить, что если ξ_1 — наименьшее решение уравнения $f(\xi, \eta_1) = \beta$ и ξ_2 — наименьшее решение уравнения $f(\xi, \eta_2) = \beta$, то соотношение $\eta_1 < \eta_2$ влечет $\xi_1 > \xi_2$).

в) *Ординальным числом, критическим* для f, назовем всякое бесконечное ординальное число $\gamma \geqslant \alpha_0$, такое, что $f(\xi, \gamma) = \gamma$ для всякого ξ, для которого $\alpha_0 \leqslant \xi < \gamma$. Показать, что ординальное число, критическое для f, не имеет предшественника. Если существует такое множество ординальных чисел A, что $f(\xi, \gamma) = \gamma$ для всякого $\xi \in A$, и если γ — верхняя грань множества A, показать, что γ — критическое ординальное число.

г) Пусть $h(\xi) = f(\xi, \xi)$ определено для $\xi \geqslant \alpha_0$). Определим индукцией $\alpha_1 = \alpha_0 + 2$, $\alpha_{n+1} = h(\alpha_n)$ для $n \geqslant 1$. Показать, что верхняя грань последовательности (α_n) есть ординальное число, критическое для f.

д) Показать, что верхняя грань всякого множества ординальных чисел, критических для f, снова является критическим ординальным числом и что всякое критическое ординальное число неразложимо (заметить, что

$$f(\xi, \eta + 1) \geqslant w(\xi) + \eta \geqslant \xi + \eta$$

для $\xi \geqslant \alpha_0$).

¶ 14) а) Показать, что если $\alpha \geqslant 2$ и если β не имеет предшественника, то α^β — неразложимое ординальное число (см. § 2, упр. 15а)); если α конечно и $\beta = \omega\gamma$, то $\alpha^\beta = \omega^\gamma$; если α бесконечно и π — наибольшее неразложимое ординальное число $\leqslant \alpha$, показать, что $\alpha^\beta = \pi^\beta$ (использовать упр. 11).

б) Для того чтобы ординальное число δ было критическим для функционального символа $f(\xi, \eta) = \xi\eta$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого α, для которого $1 < \alpha \leqslant \delta$, уравнение $\delta = \alpha^\xi$ обладало хотя бы одним решением; всякое решение ξ этого уравнения является тогда неразложимым (использовать упр. 13д) и упр. 17г) § 2). Обратно, для всякого $\alpha > 1$ и всякого неразложимого ординального числа $\pi\alpha^\pi$ является ординальным числом, критическим для $\xi\eta$ (использовать упр. 13в)). Вывести из этого, что для того, чтобы δ было ординальным числом, критическим для $\xi\eta$, необходимо и достаточно, чтобы δ имело вид ω^{ω^μ} (см. упр. 11б)).

в) Для того чтобы ординальное число ε было критическим для функционального символа $f(\xi, \eta) = \xi^\eta$, т. е. чтобы для всякого γ, для которого $2 \leqslant \gamma < \varepsilon$, выполнялось $\gamma^\varepsilon = \varepsilon$, достаточно, чтобы было $2^\varepsilon = \varepsilon$. Показать, что наименьшее ординальное число ε_0, критическое для ξ^η, счетно (см. упр. 13г)).

¶ 15) Пусть γ — ординальное число > 1; для всякого ординального числа α обозначим через $L(\alpha)$ множество показателей степени λ_i в представлении числа α, данном в упр. 12а).

а) Показать, что $\lambda_i \leqslant \alpha$ для всякого $\lambda_i \in L(\alpha)$ и что равенство $\lambda_i = \alpha$ может выполняться для одного из этих ординальных чисел, только если $\alpha = 0$ или если α — ординальное число, критическое для ξ^η (упр. 14в)).

б) Определим $L_n(\alpha)$ индукцией по n так, что $L_1(\alpha) = L(\alpha)$, а $L_n(\alpha)$ есть объединение множеств $L(\beta)$, когда β пробегает $L_{n-1}(\alpha)$. Показать, что существует целое число n_0, такое, что $L_{n+1}(\alpha) = L_n(\alpha)$ для $n \geqslant n_0$, и что элементами множества $L_n(\alpha)$ являются тогда 0 или ординальные числа, критические для ξ^η. (Рассуждать от противного, рассмотрев для каждого n множество $M_n(\alpha)$, таких $\beta \in L_n(\alpha)$, что $\beta \notin L(\beta)$, и предположив, что $M_n(\alpha)$ не пусто для любого n; для получения противоречия использовать а).)

16) Любое совершенно упорядоченное множество E обладает конфинальной ему вполне упорядоченной частью (§ 2, упр. 2). Наименьшее из ординальных чисел $\mathrm{Ord}(M)$ всех вполне упорядоченных частей M множества E, конфинальных множеству E, называется *финальным характером* множества E.

а) Ординальное число ξ называется *регулярным*, если оно равно своему финальному характеру, и *сингулярным* в противном случае. Показать, что всякое бесконечное регулярное ординальное число есть некоторое начальное ординальное число ω_α (упр. 10). Обратно, всякое начальное ординальное число ω_α, индекс которого равен 0 или обладает предшественником, есть регулярное ординальное число. Начальное ординальное число ω_α, индекс которого не равен нулю и не обладает предшественником, сингулярно, если $\alpha < \omega_\alpha$; в частности, ω_ω является наименьшим бесконечным сингулярным начальным ординальным числом.

б) Начальное ординальное число ω_α называется *недостижимым*, если оно регулярно и если его индекс α не имеет предшественника. Показать, что если $\alpha > 0$, то $\omega_\alpha = \alpha$, иначе говоря, α является ординальным числом, критическим для нормального функционального символа ω_η (упр. 10г) и 13в)). Пусть $\varkappa$ — наименьшее ординальное число, критическое для этого функционального символа; показать, что $\omega_\varkappa$ сингулярно и его финальный характер равен ω (см. упр. 13г)). Иначе говоря, не существует никакого недостижимого ординального числа ω_α, такого, что $0 < \alpha \leqslant \varkappa$ [1]).

в) Показать, что существует только одно регулярное ординальное число, конфинальное совершенно упорядоченному множеству E; это ординальное число равно финальному характеру множества E и, если E не имеет наибольшего элемента, является начальным ординальным числом. Если $\omega_{\bar\alpha}$ есть финальный характер числа ω_α, то $\bar\alpha \leqslant \alpha$; чтобы ω_α было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы $\bar\alpha = \alpha$.

---

[1]) В настоящее время неизвестно доказательство существования недостижимых ординальных чисел, отличных от ω.

г) Пусть ω_α — бесконечное регулярное ординальное число, I — такое вполне упорядоченное множество индексов, что Ord (I) $< \omega_\alpha$. Показать, что для всякого семейства $(\xi_\iota)_{\iota \in I}$ ординальных чисел, такого, что $\xi_\iota < \omega_\alpha$ для всякого $\iota \in I$, имеем $\sum_{\iota \in I} \xi_\iota < \omega_\alpha$.

17) Кардинальное число $\aleph_\alpha$ называется *регулярным* (соответственно *сингулярным*), если начальное ординальное число ω_α регулярно (соответственно сингулярно). Чтобы $\aleph_\alpha$ было регулярным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого семейства $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ кардинальных чисел, такого, что Card (I) $< \aleph_\alpha$ и $\mathfrak{a}_\iota < \aleph_\alpha$ для всякого $\iota \in I$, было $\sum_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota < \aleph_\alpha$; $\aleph_\omega$ является наименьшим сингулярным кардинальным числом.

¶ 18) а) Для всякого ординального числа α и всякого кардинального числа $\mathfrak{m}$, неравного нулю, имеет место соотношение $\aleph_{\alpha+1}^{\mathfrak{m}} = \aleph_\alpha^{\mathfrak{m}} \cdot \aleph_{\alpha+1}$ (ограничиться случаем $\mathfrak{m} < \aleph_{\alpha+1}$ и рассмотреть отображения кардинального числа $\mathfrak{m}$ в ординальное число $\omega_{\alpha+1}$).

б) Вывести из а), что для всякого ординального числа γ, у которого Card $(\gamma) \leqslant \mathfrak{m}$, выполняется

$$\aleph_{\alpha+\gamma}^{\mathfrak{m}} = \aleph_\alpha^{\mathfrak{m}} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{\mathrm{Card}\,(\gamma)}$$

(рассуждать трансфинитной индукцией по γ).

в) Вывести из б), что для всякого ординального числа α, у которого Card $(\alpha) \leqslant \mathfrak{m}$, выполняется

$$\aleph_\alpha^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{m}} \aleph_\alpha^{\mathrm{Card}\,(\alpha)}.$$

¶ 19) а) Пусть α и β — два ординальных числа, причем α не имеет предшественника, и пусть $\xi \to \sigma_\xi$ — такое строго возрастающее отображение ординального числа ω_β в ординальное число α, что $\sup_{\xi < \omega_\beta} \sigma_\xi = \alpha$. Показать, что $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \prod_{\xi < \omega_\beta} \aleph_{\sigma_\xi}$. (Произвольному отображению f ординального числа ω_β в ординальное число ω_α поставить в соответствие инъективное отображение $\overline{f}$ числа ω_β в множество чисел ω_{σ_ξ} $(\xi < \omega_\beta)$, такое, что $f(\zeta) \leqslant \overline{f}(\zeta)$ для всякого $\zeta < \omega_\beta$; оценить кардинальное число множества отображений f, которые соответствуют одному и тому же отображению $\overline{f}$, и заметить, что $\mathfrak{m} = \prod_{\xi < \omega_\beta} \aleph_{\sigma_\xi} \geqslant 2^{\mathrm{Card}\,(\omega_\beta)}$ и $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_\alpha$ (см. § 3, упр. 3).)

б) Пусть $\overline{\alpha}$ — такое ординальное число, что $\omega_{\overline{\alpha}}$ является финальным характером числа ω_α; показать, что

$$\aleph_\alpha^{\aleph_{\overline{\alpha}}} > \aleph_\alpha$$

и что если существует такое $\mathfrak{n}$, для которого $\aleph_\alpha = \mathfrak{n}^{\aleph_\gamma}$, то $\gamma < \overline{\alpha}$ (использовать а) и упр. 3 § 3).

в) Показать, что если $\lambda < \overline{\alpha}$, то

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\lambda} = \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\lambda}$$

(рассуждать, как в упр. 18а)).

¶ 20) а) Чтобы кардинальное число $\mathfrak{a}$ было регулярным (упр. 17), необходимо и достаточно, чтобы для всякого кардинального числа $\mathfrak{b}$ было $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a} \cdot \sum_{\mathfrak{m} < \mathfrak{a}} \mathfrak{m}^{\mathfrak{b}}$ (использовать упр. 19 и упр. 3 § 3).

б) Показать, что если кардинальное число $\mathfrak{a}$ таково, что для всякого кардинального числа $\mathfrak{m}$, у которого $0 < \mathfrak{m} < \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{a}$, то $\mathfrak{a}$ регулярно (использовать упр. 3 § 3).

в) Показать, что предложение „для всякого регулярного кардинального числа $\mathfrak{a}$ и всякого кардинального числа $\mathfrak{m}$, у которого $0 < \mathfrak{m} < \mathfrak{a}$, выполняется $\mathfrak{a}^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{a}$“ эквивалентно обобщенной гипотезе континуума (использовать а)).

¶ 21) Бесконечное кардинальное число $\mathfrak{a}$ называется *доминантным*, если $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} < \mathfrak{a}$ для всякой пары кардинальных чисел $\mathfrak{m} < \mathfrak{a}$, $\mathfrak{n} < \mathfrak{a}$.

а) Для того чтобы $\mathfrak{a}$ было доминантным, достаточно, чтобы для всякого кардинального числа $\mathfrak{m} < \mathfrak{a}$ было $2^{\mathfrak{m}} < \mathfrak{a}$.

б) Определим индукцией последовательность $(\mathfrak{a}_n)$ кардинальных чисел следующим образом: $\mathfrak{a}_0 = \aleph_0$, $\mathfrak{a}_{n+1} = 2^{\mathfrak{a}_n}$. Показать, что сумма $\mathfrak{d}$ последовательности $(\mathfrak{a}_n)$ есть доминантное кардинальное число; $\aleph_0$ и $\mathfrak{d}$ — два наименьших доминантных кардинальных числа.

в) Показать, что $\mathfrak{d}^{\aleph_0} = \aleph_0^{\mathfrak{d}} = 2^{\mathfrak{d}}$ (заметить, что $2^{\mathfrak{d}} \leqslant \mathfrak{d}^{\aleph_0}$); вывести из этого, что $\mathfrak{d}^{\aleph_0} = (2^{\mathfrak{d}})^{\mathfrak{d}}$, хотя $\mathfrak{d} < 2^{\mathfrak{d}}$ и $\aleph_0 < \mathfrak{d}$.

¶ 22) Кардинальное число $\aleph_\alpha$ называется *недостижимым*, если ординальное число ω_α является недостижимым (упр. 16б)); тогда $\omega_\alpha = \alpha$, если $\omega_\alpha \neq \omega_0$. Кардинальное число $\mathfrak{a}$ называется *сильно недостижимым*, если оно является недостижимым и доминантным (упр. 21).

а) Обобщенная гипотеза континуума влечет, что всякое недостижимое кардинальное число является сильно недостижимым.

б) Кардинальное число $\mathfrak{a}$ тогда и только тогда сильно недостижимо, когда для всякого семейства $(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ кардинальных чисел, такого, что Card (I) $< \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}_\iota < \mathfrak{a}$ для всякого $\iota \in I$, выполнялось $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota < \mathfrak{a}$.

в) Для того чтобы бесконечное кардинальное число $\mathfrak{a}$ было сильно недостижимым, необходимо и достаточно, чтобы оно было доминантным (упр. 21) и удовлетворяло одному из следующих условий: α) для всякого кардинального числа $\mathfrak{b}$, такого, что $0 < \mathfrak{b} < \mathfrak{a}$, выполняется $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}$; β) для всякого кардинального числа $\mathfrak{b} > 0$ выполняется $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a} \cdot 2^{\mathfrak{b}}$. (Использовать упр. 20 и 21.)

¶ 23) Пусть α — ординальное число > 0; отображение f ординального числа α в себя называется *сходящимся*, если для всякого ординального числа $\lambda_0 < \alpha$ существует ординальное число $\mu_0 < \alpha$, такое, что соотношение $\mu_0 \leqslant \xi < \alpha$ влечет $\lambda_0 \leqslant f(\xi) < \alpha$ [1]).

а) Пусть φ — строго возрастающее отображение ординального числа β в α, такое, что $\varphi(\sup_{\zeta < \gamma} \zeta) = \sup_{\zeta < \gamma} \varphi(\zeta)$ для всякого $\gamma < \beta$ и

[1]) Если вполне упорядоченное множество O'_α ординальных чисел $\leqslant \alpha$ наделено топологией $\mathfrak{G}_-(O'_\alpha)$ („Общая топология“, гл. I, § 1, упр. 3), это условие может быть также записано так: $\lim_{\xi \to \alpha,\, \xi < \alpha} f(\xi) = \alpha$. [В оригинале вместо „сходящееся“ (convergente) напечатано „расходящееся“ (divergente), что, по-видимому, является опечаткой. — *Прим. перев.*]

$\sup\limits_{\zeta<\beta} \varphi(\zeta) = \alpha$[1]). Для того чтобы существовало такое расходящееся отображение f числа α в себя, что $f(\xi) < \xi$ для всякого ξ, для которого $0 \leqslant \xi < \alpha$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое же отображение числа β в себя.

б) Вывести из а), что для существования расходящегося отображения f числа ω_α в себя, обладающего свойством: $f(\xi) < \xi$ для $0 \leqslant \xi < \omega_\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы финальный характер числа ω_α был равен ω_0 (если ω_α — регулярное ординальное число $> \omega_0$, определить индукцией строго возрастающую последовательность (η_n) при помощи условий: $\eta_1 = 1$, η_{n+1} — наименьшее ординальное число ζ, такое, что для $\xi \geqslant \zeta$ $f(\xi) > \eta_n$).

в) Пусть $\omega_{\bar{\alpha}}$ — финальный характер числа ω_α (упр. 16); показать, что если $\bar{\alpha} > 0$ и f — такое отображение числа ω_α в себя, что $f(\xi) < \xi$ для всякого ξ, для которого $0 < \xi < \omega_\alpha$, то существует λ_0, такое, что множество решений уравнения $f(\xi) = \lambda_0$ имеет кардинальное число, равное $\aleph_{\bar{\alpha}}$.

¶ 24) а) Пусть $\mathfrak{F}$ — такое множество частей множества E, что для всякой части $A \in \mathfrak{F}$ выполняется $\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{a} \geqslant \aleph_0$. Показать, что в E существует часть P, такая, что $\operatorname{Card}(P) = \mathfrak{a}$ и никакое множество из $\mathfrak{F}$ не содержится в P. (Если $\mathfrak{a} = \aleph_\alpha$, определить трансфинитной индукцией два инъективных отображения $\xi \to f(\xi)$, $\xi \to g(\xi)$ числа ω_α в E, такие, что множества $P = f(\omega_\alpha)$ и $Q = g(\omega_\alpha)$ не пересекаются, но каждое из них пересекается с каждой частью $A \in \mathfrak{F}$.)

б) Предположим, кроме того, что для всякого подмножества $\mathfrak{G}$ множества $\mathfrak{F}$, такого, что $\operatorname{Card}(\mathfrak{G}) < \mathfrak{a}$, дополнение в E объединения множеств $A \in \mathfrak{G}$ имеет кардинальное число $\geqslant \mathfrak{a}$; показать тогда, что в E существует такая часть P, что $\operatorname{Card}(P) = \mathfrak{a}$ и для всякого $A \in \mathfrak{F}$ $\operatorname{Card}(P \cap A) < \mathfrak{a}$ (метод аналогичен).

¶ 25) а) Пусть $\mathfrak{F}$ — покрытие бесконечного множества E; *степенью разделения* покрытия $\mathfrak{F}$ назовем наименьшее кардинальное число $\mathfrak{c}$, такое, что $\mathfrak{c}$ *строго превышает* кардинальные числа $\operatorname{Card}(X \cap Y)$ для всякой пары различных множеств $X \in \mathfrak{F}$ и $Y \in \mathfrak{F}$. Если $\operatorname{Card}(E) = \mathfrak{a}$, $\operatorname{Card}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{b}$, показать, что $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$ (заметить, что часть множества E, имеющая кардинальное число $\mathfrak{c}$, не может содержаться более чем в одном множестве из $\mathfrak{F}$).

б) Пусть ω_α — начальное ординальное число, F — такое множество, что $2 \leqslant \mathfrak{p} = \operatorname{Card}(\mathfrak{F}) < \aleph_\alpha$; пусть E — множество отображений отрезков числа ω_α, отличных от ω_α, в F; тогда $\operatorname{Card}(E) \leqslant \mathfrak{p}^{\aleph_\alpha}$. Для всякого отображения f числа ω_α в F пусть K_f — часть множества E, образованная сужениями отображения f на отрезки числа ω_α, отличные от ω_α. Показать, что множество $\mathfrak{F}$ частей K_f есть такое покрытие множества E, что $\operatorname{Card}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{p}^{\aleph_\alpha}$, и степень разделения его равна $\aleph_\alpha$.

в) Пусть E — бесконечное множество с кардинальным числом $\mathfrak{a}$ и пусть $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{p}$ — два таких кардинальных числа > 1, что $\mathfrak{p} < \mathfrak{c}$, $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}} < \mathfrak{a}$ для всякого $\mathfrak{m} < \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{a} = \sum\limits_{\mathfrak{m}<\mathfrak{c}} \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}$. Вывести из б), что существует покрытие $\mathfrak{F}$ множества E, образованное множествами с кардинальным

[1]) Если φ продолжить на O'_β условием $\varphi(\beta) = \alpha$, предыдущие условия будут означать, что φ непрерывно, когда O'_α и O'_β наделены топологиями $\mathfrak{G}_-(O'_\alpha)$ и $\mathfrak{G}_-(O'_\beta)$ („Общая топология“, гл. I, § 1, упр. 3).

числом $\mathfrak{c}$, степень разделения которого равна $\mathfrak{c}$, и такое, что $\operatorname{Card}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{p}^{\mathfrak{c}}$. В частности, если E счетно и бесконечно, существует покрытие $\mathfrak{F}$ множества E, образованное бесконечными множествами, такое, что $\operatorname{Card}(\mathfrak{F}) = 2^{\aleph_0}$, и пересечение двух произвольных множеств из $\mathfrak{F}$ *конечно*.

¶ 26) Пусть E — бесконечное множество, $(\mathfrak{X}_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ — конечное разбиение множества $\mathfrak{F}_n(E)$ частей множества E, имеющих n элементов. Показать, что существует индекс i и бесконечная часть F множества E, такие, что всякая часть множества F, имеющая n элементов, принадлежит к $\mathfrak{X}_i$. (Рассуждать индукцией по n: для всякого $a \in E$ показать, что существуют индекс j и бесконечная часть M множества $E - \{a\}$, такие, что для всякой части A множества M, имеющего $n-1$ элементов, $\{a\} \cup A$ принадлежит к $\mathfrak{X}_j$.)

27) Говорят, что упорядоченное множество E *удовлетворяет условию минимальности*, если всякое непустое подмножество множества E обладает минимальным элементом.

а) Показать, что если A и B — две части множества E, удовлетворяющие условию минимальности, то $A \cup B$ также удовлетворяет условию минимальности.

б) Для того чтобы упорядоченное множество E удовлетворяло условию минимальности, необходимо и достаточно, чтобы всякий интервал $]\leftarrow, a[$ множества E удовлетворял условию минимальности.

в) Предположим, что E удовлетворяет условию минимальности. Пусть u — буква, $T\{u\}$ — терм. Показать, что существуют множество U и отображение f множества E на U, такие, что для всякого $x \in E$ выполняется $f(x) = T\{f^{(x)}\}$, где через $f^{(x)}$ обозначено отображение интервала $]\leftarrow, x[$, на $f(]\leftarrow, x[)$, совпадающее на этом интервале с f; кроме того, этим условием U и f определены однозначно.

г) Предположим, что E удовлетворяет условию минимальности и что всякая конечная часть множества E обладает в E нижней гранью. Показать, что если E обладает наибольшим элементом, E есть полное сетчатое множество (§ 1, упр. 11); если же E не обладает наибольшим элементом, то полным сетчатым будет множество E′, полученное добавлением к E наибольшего элемента (§ 1, предложение 2).

28) Пусть E — сетчатое множество, удовлетворяющее условию минимальности (упр. 27). Показать, что всякий элемент a множества E может быть представлен в виде $\sup(e_1, \ldots, e_n)$, где элементы e_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ неприводимы (§ 4, упр. 7; показать сначала, что существует неприводимый элемент e, такой, что $a = \sup(e, b)$, если a неприводимо). Обобщить на E упр. 7б) § 4. Обобщить также упр. 8б) и 9б) § 4 на дистрибутивные сетчатые множества, удовлетворяющие условию минимальности.

¶ 29) Пусть I — фильтрующееся вправо множество $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство сетчатых множеств, удовлетворяющих условию минимальности (упр. 27). Для всякой пары (α, β) индексов из I, такой, что $\alpha \leqslant \beta$, пусть $f_{\alpha\beta}$ — *возрастающее* отображение множества E_β в E_α и пусть эти отображения удовлетворяют условию (LP) из § 1, n° 12. Для всякого $\alpha \in I$ пусть G_α — непустая часть множества E_α, удовлетворяющая следующим условиям:

1° два различных элемента из G_α не сравнимы;

2° для $\alpha \leqslant \beta$ справедливо $f_{\alpha\beta}(G_\beta) = G_\alpha$;

3° для $\alpha \leqslant \beta$ и для всякого $x_\alpha \in G_\alpha$ полный прообраз $\overset{-1}{f_{\alpha\beta}}(x_\alpha)$ имеет в E_β наибольший элемент $M_{\alpha\beta}(x_\alpha)$;

4° для $\alpha \leqslant \beta$, если h_β — такой элемент множества E_β, что существует $y_\beta \in G_\beta$, для которого $y_\beta \leqslant h_\beta$, то для всякого $x_\alpha \in G_\beta$, такого, что $x_\alpha \leqslant f_{\alpha\beta}(h_\beta)$ существует $x_\beta \in G_\beta$, такой, что $x_\beta \leqslant h_\beta$ и $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$.

При этих условиях показать, что проективный предел семейства $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ для сужений отображений $f_{\alpha\beta}$ на G_β *не пуст* (см. § 1, упр. 32). Это можно проделать следующим образом:

а) Пусть J — конечная часть множества I; семейство $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$, где $x_\alpha \in G_\alpha$ для всякого $\alpha \in J$, называется *когерентным*, если оно удовлетворяет двум следующим условиям: 1) если $\alpha \in J, \beta \in J, \alpha \leqslant \beta, x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$; 2) для всякого элемента γ множества I, мажорирующего J, существует $x_\gamma \in G_\gamma$, такой, что $x_\alpha = f_{\alpha\gamma}(x_\gamma)$ для всякого $\alpha \in J$. Показать, что для всякого элемента $\gamma \in I$, мажорирующего J, множество $\bigcap_{\alpha \in J} \overset{-1}{f}_{\alpha\gamma}(x_\alpha)$ обладает наибольшим элементом, равным $\inf_{\alpha \in J}(M_{\alpha\gamma}(x_\alpha))$; кроме того, пересечение множества G_γ и $\bigcap_{\alpha \in J} \overset{-1}{f}_{\alpha\gamma}(x_\alpha)$ есть множество (по предположению непустое) тех $y_\gamma \in G_\gamma$, которые мажорированы элементом $\inf_{\alpha \in J}(M_{\alpha\gamma}(x_\alpha))$ (использовать условие 1°).

б) Пусть J — произвольная часть множества I; семейство $x_J = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$, где $x_\alpha \in G_\alpha$ для $\alpha \in J$, называется *когерентным*, если всякое конечное подсемейство семейства x_J когерентно. Если $J \neq I$ и $\beta \in I - J$, показать, что существует $x_\beta \in G_\beta$, такой, что семейство $x_{J \cup \{\beta\}} = (x_\alpha)_{\alpha \in J \cup \{\beta\}}$ когерентно. (Для всякой конечной части F множества J показать, используя а) и условие 4°, что если γ является мажорантой множества $F \cup \{\beta\}$, то $f_{\beta\gamma}\left(G_\gamma \cap \bigcap_{\alpha \in F} \overset{-1}{f}_{\alpha\gamma}(x_\alpha)\right)$ есть (не пустое) множество тех $y_\beta \in G_\beta$, которые мажорируются элементом $f_{\beta\gamma}\left(\inf_{\alpha \in F}(M_{\alpha\gamma}(x_\alpha))\right)$. Используя тот факт, что E_γ удовлетворяет условию минимальности, показать затем, что существуют конечная часть F_0 множества J и мажоранта γ_0 множества $F_0 \cup \{\beta\}$, такие, что для всякой конечной части F множества J и всякой мажоранты γ множества $F \cup \{\beta\}$ выполняется $\inf_{\alpha \in F}(M_{\alpha\gamma}(x_\alpha)) \geqslant \inf_{\alpha \in F_0}\left(M_{\alpha\gamma_0}(x_\alpha)\right)$. Доказать тогда, что всякий элемент $x_\beta \in G_\beta$, мажорированный элементом $f_{\beta\gamma_0}\left(\inf_{\alpha \in F_0}\left(M_{\alpha\gamma_0}(x_\alpha)\right)\right)$, является искомым.)

в) Закончить доказательство, показав, что существует когерентное семейство, множеством индексов которого является любое целое число. (Упорядочить множество когерентных семейств x_J соотношением „x_J есть подсемейство семейства x_K" и применить б) и теорему Цорна [1]).)

¶ °30) Пусть (M_n), (P_n) — две последовательности конечных попарно непересекающихся множеств (не все из которых пусты), имеющие в качестве множества индексов множество **Z** рациональных целых чисел; положим $\alpha_n = \operatorname{Card}(M_n)$, $\beta_n = \operatorname{Card}(P_n)$. Предположим, что существует такое целое число $k > 0$, что для всякого $n \in \mathbf{Z}$ и всякого $l \geqslant 1$ выполняется

$$\alpha_n + \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+l} \leqslant \beta_{n-k} + \beta_{n-k+1} + \ldots + \beta_{n+l+k}$$

и

$$\beta_n + \beta_{n+1} + \ldots + \beta_{n+l} \leqslant \alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1} + \ldots + \alpha_{n+l+k}.$$

Пусть M — объединение семейства (M_n), P — семейства (P_n). Показать, что существует биекция φ множества M на P, такая, что $\varphi(M_n) \subset \bigcup_{l=n-k-1}^{n+k+1} P_l$ и $\overset{-1}{\varphi}(P_n) \subset \bigcup_{i=n-k-1}^{n+k+1} M_i$ для всякого индекса $n \in \mathbf{Z}$. (Рассмотреть на каждом M_n (соответственно P_n) совершенный порядок и взять за M (соответственно P) ординальную сумму (§ 1, упр. 3) семейства $(M_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ (соответственно $(P_n)_{n \in \mathbf{Z}}$); если n_0 — такой индекс, что $M_{n_0} \neq \varnothing$, рассмотреть изоморфизмы множества M на P, преобразующие наименьший элемент множества M_{n_0} в один из элементов множества $\bigcup_{j=n_0-k}^{n_0+k} P_j$, и показать, что один из этих изоморфизмов искомый.)

[1]) То есть теорему 2 из § 2. — *Прим. ред.*

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК [1]

К § 5 ГЛАВЫ III

(Римские цифры отсылают к библиографии, помещенной в конце настоящего очерка.)

Эволюция идей, касающихся понятий целого числа и кардинального числа, неотделима от истории теории множеств и математической логики; читатель найдет ее изложение в историческом очерке, следующем за гл. IV. Мы ограничимся здесь краткими указаниями на наиболее выдающиеся факты из истории счисления и „Комбинаторного анализа".

История и археология знакомят нас с большим числом „систем счисления"; их первоначальная цель — сопоставить каждому индивидуальному целому числу (в пределах, зависящих от потребностей практики) название и письменное изображение, образованное (по более или менее регулярным правилам) комбинацией ограниченного числа знаков. Наиболее употребительный прием состоит в разложении целых чисел в суммы „последовательных единиц" b_1, $b_2, \ldots, b_n, \ldots$, каждая из которых кратна предыдущей, и, хотя обычно b_n/b_{n-1} берется равным одному и тому же числу b („основание" системы, чаще всего 10), наблюдаются неоднократные исключения из этого правила, как, например, у вавилонян, где b_n/b_{n-1} равно то 10, то 6 [I], и в системе хронологии майя, где b_n/b_{n-1} равно 20, если $n \neq 2$, и $b_2/b_1 = 18$ [II]. Что касается соответствующей записи, то она должна указывать число „единиц" b_i каждого порядка i; во многих системах (как, например, у египтян, греков, римлян) последовательные кратные $k \cdot b_i$ [где k изменяется от 1 до $(b_{i+1}/b_i) - 1$] обозначаются символами, которые зависят одновременно от k и от i. Первый и важный прогресс состоит в обозначении всех чисел $k \cdot b_i$ (для одного и того же значения k) одним и тем же знаком: это принцип позиционности, „numeration de position", когда индекс i указывается тем фактом, что символ, изображающий $k \cdot b_i$, помещается на i-е место в последовательности „кусков", составляющих изображаемое число. Первая система этого рода встречается у вавилонян, которые, несомненно, за 2000 лет до н. э. обозначали одним и тем же знаком все кратные $k \cdot 60^{\pm i}$, соответствующие произвольным значениям показателя i ([I], стр. 93—109). Неудобство такой системы состоит, разумеется, в неоднозначности употребляемых символов, поскольку ничто не указывает на то, что единицы некоторого порядка могут отсутствовать, другими словами поскольку система не пополнена введением „нуля". Однако мы видим, что вавилоняне обходились без такого знака на протяжении большей части своей истории; в самом деле, они употребляли „нуль" только в двух последних веках до н. э. и вдобавок исключительно внутри числа; до тех пор лишь контекст давал возможность уточнить значение рассматриваемого числа. Только две системы используют систематически „нуль": система майя (употреблявшаяся, по-видимому, с самого начала христианской эры [II]) и наша современная десятичная система, которая (через арабов)

[1]) Другой перевод этого очерка (выполненный И. Г. Башмаковой под ред. К. А. Рыбникова) см. (под названием „Счисление. Комбинаторный анализ") на стр. 61—63 книги Бурбаки Н., Очерки по истории математики, ИЛ, М, 1963.— *Прим. ред.*

пришла из индийской математики, где ее употребление отмечено в первых веках нашей эры. Следует, кроме того, заметить, что понятие нуля как числа (а не как просто разделительного знака) и его введение в вычисления также считаются принадлежащими к оригинальным вкладам индийцев [III]. Разумеется, усвоив однажды принцип позиционности, легко было распространить его на любое основание; обсуждение достоинств различных „оснований", предложенных начиная с XVII века, относится к технике Численного анализа и не может быть начато здесь. Ограничимся замечанием, что операция, лежащая в основе этих систем, так называемое „эвклидово" деление, не встречалась до греков и восходит, несомненно, к первым пифагорейцам, которые сделали ее существенным орудием в своей Теоретической арифметике (см. исторический очерк к гл. VI—VII „Алгебры").

Общие проблемы пересчета, собранные под именем „Комбинаторного анализа", не рассматривались до последних веков классической Античности: только формула $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ засвидетельствована в III веке н. э. Индийский математик Бхаскара (XII век) знал общую формулу для $\binom{n}{p}$. Более систематическое исследование находится в манускрипте Леви бен Герсона, в начале XIII века: он получает рекуррентную (по p) формулу, позволяющую вычислить число V_n^p размещений из n элементов по p и, в частности, число перестановок из n элементов; он формулирует также правила, эквивалентные соотношениям $\binom{n}{p} = V_n^p/p!$ и $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ ([IV], стр. 64—65). Но этот манускрипт, по-видимому, остался неизвестным современникам, и его результаты только мало-помалу переоткрывались математиками следующих веков. Среди дальнейших успехов отметим следующее: Кардан доказал, что число непустых частей множества из n элементов есть $2^n - 1$; Паскаль и Ферма, занимаясь исчислением вероятностей, переоткрыли выражение для $\binom{n}{p}$, и Паскаль первый заметил связь между этими числами и формулой бинома: эта последняя, по-видимому, была известна арабам в XIII веке, китайцам в XIV веке и была переоткрыта на Востоке в начале XVI века так же, как и метод рекуррентного вычисления, так называемый „арифметический треугольник", приписываемый обычно Паскалю ([IV], стр. 35—38). Наконец, Лейбниц около 1676 года получил (не опубликовав) общую формулу „полиномиальных коэффициентов", переоткрытую независимо и опубликованную 20 годами позже Муавром.

ЛИТЕРАТУРА

[I] Neugebauer O., *Vorlesungen über die Geschichte der antiken Mathematik*, Bd. I: Vorgrieschische Mathematik, Berlin (Springer), 1934 (русский перевод: Нейгебауэр Отто, Лекции по истории античных математических наук, т. I, Догреческая математика, перевод с немецкого, М — Л, ОНТИ, 1937).

[II] Morley S. G., *The ancient Maya*, Stanford University Press, 1946.

[III] Datta B., Singh A. N., *History of Hindu Mathematics*, t. I, Lahore (Motilal Banarsi Das), 1935.

[IV] Tropfke J. *Geschichte der Elementar-Mathematik*, t. VI: Analysis, Analitische Geometrie, Berlin — Leipzig (de Gruyter), 1924.

ГЛАВА IV

СТРУКТУРЫ

Цель этой главы — описать раз и навсегда некоторое число формативных конструкций и доказательств (см. гл. I, § 1, п° 3 и § 3, п° 2), встречающихся очень часто в математике.

§ 1. Структуры и изоморфизмы

1. Ступени

Схема конструкции ступени есть последовательность c_1, c_2, ..., c_m пар натуральных целых чисел[1]) $c_i = (a_i, b_i)$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) если $b_i = 0$, то $1 \leqslant a_i \leqslant i-1$;

б) если $a_i \neq 0$ и $b_i \neq 0$, то $1 \leqslant a_i \leqslant i-1$ и $1 \leqslant b_i \leqslant i-1$.

Из этих условий вытекает, что $c_1 = (0, b_1)$, где $b_1 > 0$. Если n — наибольшее из чисел b_i, встречающихся в парах $(0, b_i)$, то говорят, что c_1, c_2, ..., c_m есть схема конструкции ступени *над n термами.*

Если даны схема $S = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ конструкции ступени над n термами и n термов $E_1, \ldots, E_n$ теории $\mathcal{T}$ более сильной, чем теория множеств, назовем *конструкцией ступени над* $E_1, \ldots, E_n$ *по схеме* S последовательность $A_1, A_2, \ldots, A_m$ из m термов теории $\mathcal{T}$, определенную последовательно следующими условиями:

а) если $c_i = (0, b_i)$, то A_i есть терм E_{b_i};

б) если $c_i = (a_i, 0)$, то A_i есть терм $\mathfrak{P}(A_{a_i})$;

в) если $c_i = (a_i, b_i)$, причем $a_i \neq 0$ и $b_i \neq 0$, то A_i есть терм $A_{a_i} \times A_{b_i}$.

Мы будем говорить, что последний член A_m конструкции ступени над $E_1, \ldots, E_n$ по схеме S есть *ступень над базисными множествами* $E_1, \ldots, E_n$, *построенная по схеме* S, или *ступень схемы* S *над базисными множествами* $E_1, \ldots, E_n$, и в дальнейших общих рассуждениях будем обозначать его через $S(E_1, \ldots, E_n)$.

---

[1]) Мы используем понятие „целого числа“ тем же образом, что и в гл. I, т. е. в метаматематическом смысле отметок, упорядочивающих в некотором порядке; это употребление не имеет ничего общего с математической теорией целых чисел, развитой в гл. III.

Пример. Если даны два множества E и F, то множество $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E)) \times \mathfrak{P}(F)$ есть ступень над E и F, построенная по схеме

$$(0, 1), (0, 2), (1, 0), (3, 0), (2, 0), (4, 5).$$

Это множество является также ступенью над E и F, построенной по схеме

$$(0, 2), (0, 1), (1, 0), (2, 0), (4, 0), (5, 3).$$

Таким образом, несколько различных схем могут давать одну и ту же ступень над одними и теми же множествами.

2. Канонические распространения отображений

Пусть $S = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — схема конструкции ступени над n термами. Пусть $E_1, \ldots, E_n$, $E'_1, \ldots, E'_n$ — множества (термы теории $\mathcal{T}$), и пусть $f_1, \ldots, f_n$ — такие термы теории $\mathcal{T}$, что соотношения

„f_i есть отображение множества E_i в E'_i“

для $1 \leqslant i \leqslant n$ являются теоремами теории $\mathcal{T}$. Пусть $A_1, \ldots, A_m$ (соответственно $A'_1, \ldots, A'_m$) — конструкция ступени над $E_1, \ldots, E_n$ (соответственно $E'_1, \ldots, E'_m$) по схеме S. Определим последовательность из m термов $g_1, \ldots, g_m$, такую, чтобы g_i (для $1 \leqslant i \leqslant m$) было *отображением множества* A_i *в* A'_i, при помощи следующих условий:

а) если $c_i = (0, b_i)$ и, следовательно, $A_i = E_{b_i}$, $A'_i = E'_{b_i}$, то g_i есть отображение f_{b_i};

б) если $c_i = (a_i, 0)$ и, следовательно, $A_i = \mathfrak{P}(A_{a_i})$, $A'_i = \mathfrak{P}(A'_{a_i})$, то g_i есть *каноническое распространение* $\hat{g}_{a_i}$ отображения g_{a_i} на множества частей (гл. II, § 5, п° 1);

в) если $c_i = (a_i, b_i)$ с $a_i \neq 0$ и $b_i \neq 0$ и, следовательно, $A_i = A_{a_i} \times A_{b_i}$ и $A'_i = A'_{a_i} \times A'_{b_i}$, то g_i есть *каноническое распространение* $g_{a_i} \times g_{b_i}$ отображений g_{a_i} и g_{b_i} на $A_{a_i} \times A_{b_i}$ (гл. II, § 3, п° 9).

Мы будем говорить, что последний член g_m этой последовательности есть *каноническое распространение отображений* $f_1, \ldots, f_n$ *по схеме* S, и будем обозначать его через $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle^S$.

Шаг за шагом проверяются следующие критерии:

CST1. *Если f_i — отображение множества E_i в E'_i, f'_i — отображение множества E'_i в E''_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то для любой схемы конструкции ступени* S *над n термами*

$$\langle f'_1 \circ f_1, f'_2 \circ f_2, \ldots, f'_n \circ f_n \rangle^S = \langle f'_1, f'_2, \ldots, f'_n \rangle^S \circ \langle f_1, \ldots, f_n \rangle^S.$$

CST2. *Если f_i инъективно* (соответственно *сюръективно*) *для* $1 \leqslant i \leqslant n$, *то* $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle^S$ *инъективно* (соответственно *сюръективно*).

Этот критерий вытекает из соответствующих свойств распространения $\hat{g}$ (гл. II, § 5, п° 1, предложение 1) и распространения $g \times h$ (гл. II, § 3, п° 9).

CST3. *Если f_i — биекция множества E_i на E'_i, а $\overset{-1}{f_i}$ — обратная биекция*[1]), *то* $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle^S$ *есть биекция, а* $\langle \overset{-1}{f_1}, \ldots, \overset{-1}{f_n} \rangle^S$ — *обратная биекция; иначе говоря,* $(\langle f_1, \ldots, f_n \rangle^S)^{-1} = \langle \overset{-1}{f_1}, \ldots \ldots, \overset{-1}{f_n} \rangle^S$.

Этот критерий тотчас же вытекает из CST1 и CST2.

3. Переносимые соотношения

Пусть $\mathcal{T}$ — теория, более сильная, чем теория множеств, $x_1, \ldots \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p$ — буквы, различные между собой и отличающиеся от констант теории $\mathcal{T}$, а $A_1, \ldots, A_m$ — термы теории $\mathcal{T}$, в которых не встречается ни одна из букв $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ и $s_j (1 \leqslant j \leqslant p)$. Пусть $S_1, \ldots, S_p$ — схемы конструкции ступени над $n+m$ термами; мы будем говорить, что соотношение $T \{ x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p \}$:

$$„s_1 \in S_1(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m) \text{ и } s_2 \in S_2(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m) \text{ и } \ldots \text{ и } s_p \in S_p(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m)“$$

есть *типизация* букв $s_1, \ldots, s_p$.

Пусть $R \{ x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p \}$ — соотношение теории $\mathcal{T}$, содержащее некоторые из букв x_i, s_j (и, возможно, другие буквы). Мы будем говорить, что R *переносимо* (*в* $\mathcal{T}$) *при типизации* T, *в которой буквы $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ рассматриваются как основные базисные множества, а термы $A_h (1 \leqslant h \leqslant m)$ — как вспомогательные базисные множества*, если выполняется следующее условие:

Пусть $y_1, \ldots, y_n, f_1, \ldots, f_n$ — буквы, различные между собой и отличающиеся от $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, $s_j (1 \leqslant j \leqslant p)$, констант теории $\mathcal{T}$ и всех букв, встречающихся в соотношении R или в термах $A_h (1 \leqslant h \leqslant m)$. Пусть, с другой стороны, $I_h (1 \leqslant h \leqslant m)$ — тождественное отображение множества A_h на себя. Тогда соотношение

$$„T \{ x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p \} \text{ и } (f_1 \text{ есть биекция множества } x_1 \text{ на } y_1) \text{ и } \ldots \text{ и } (f_n \text{ есть биекция множества } x_n \text{ на } y_n)“ \quad (1)$$

влечет в $\mathcal{T}$ соотношение

$$R \{ x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p \} \Leftrightarrow R \{ y_1, \ldots, y_n, s'_1, \ldots, s'_p \}, \quad (2)$$

[1]) По причинам типографского удобства мы пишем f^{-1} вместо $\overset{-1}{f}$.

где

$$s'_j = \langle f_1, \ldots, f_n, I_1, \ldots, I_m \rangle^{S_j}(s_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant p). \quad (3)$$

Аналогичное, но более простое определение имеем, когда вспомогательных множеств нет.

Например, если $n = p = 2$ и типизация T есть

$$„s_2 \in x_1 \text{ и } s_2 \in x_1“,$$

то соотношение $s_1 = s_2$ переносимо. Напротив, соотношение $x_1 = x_2$ не переносимо. В приложении мы дадим критерии, позволяющие в обычных случаях легко узнавать, переносимо ли данное соотношение (при некоторой типизации).

4. Роды структуры

Пусть $\mathcal{T}$ — теория, более сильная, чем теория множеств. *Род структуры* в $\mathcal{T}$ есть текст Σ, образованный следующими выражениями:

1° Некоторое число букв $x_1, \ldots, x_n, s$, различных между собой и отличающихся от констант теории $\mathcal{T}$; при этом $x_1, \ldots, x_n$ называются *основными базисными множествами* рода структуры Σ.

2° Некоторое число термов $A_1, \ldots, A_m$ теории $\mathcal{T}$, в которых не встречается ни одна из букв x_i, s; эти термы называются *вспомогательными базисными множествами* рода структуры Σ. Текст Σ может и не содержать никакого вспомогательного базисного множества (но он всегда должен иметь по крайней мере одно основное базисное множество).

3° Типизация $T \{ x_1, \ldots, x_n, s \}$:

$$s \in S(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m),$$

где S — схема конструкции ступени над $n+m$ термами (п° 1). Говорят, что $T \{ x_1, \ldots, x_n, s \}$ есть *типовая характеристика* рода структуры Σ.

4° Соотношение $R \{ x_1, \ldots, x_n, s \}$, *переносимое* (в $\mathcal{T}$) при типизации T, в которой буквы x_i рассматриваются как основные базисные множества, а термы A_h — как вспомогательные базисные множества (п° 3). R называется *аксиомой* рода структуры Σ.

Теорией рода структуры Σ назовем теорию $\mathcal{T}_\Sigma$, у которой схемы аксиом те же, что и в $\mathcal{T}$, а явными аксиомами являются явные аксиомы теории $\mathcal{T}$ и аксиома „T и R“; таким образом, константы теории $\mathcal{T}_\Sigma$ — это константы теории $\mathcal{T}$ и буквы, встречающиеся в T или в R.

Пусть теперь $\mathcal{T}'$ — теория, более сильная, чем теория $\mathcal{T}$, и пусть $E_1, \ldots, E_n$, U — термы теории $\mathcal{T}'$. Мы будем говорить, что (в теории $\mathcal{T}'$) терм U есть *структура рода Σ на основных базисных множествах $E_1, \ldots, E_n$ с множествами $A_1, \ldots, A_m$ в качестве*

вспомогательных базисных множеств, если соотношение

$$„T \S E_1, \ldots, E_n, U \S \text{ и } R \S E_1, \ldots, E_n, U \S“$$

есть *теорема теории* $\mathcal{T}'$. Когда это имеет место, то для любой теоремы $B \S x_1, \ldots, x_n, s \S$ теории $\mathcal{T}_\Sigma$ соотношение $B \S E_1, \ldots, E_n, U \S$ есть *теорема теории* $\mathcal{T}'$ (гл. I, § 2, n° 3). В $\mathcal{T}_\Sigma$ константа s называется *общей, или родовой, структурой рода* Σ.

Мы будем также говорить, что (в теории $\mathcal{T}'$) основные базисные множества $E_1, \ldots, E_n$ *наделены структурой* U. Ясно, что U есть элемент множества $S(E_1, \ldots, E_n, A_1, \ldots, A_m)$. Таким образом, множество элементов V множества $S(E_1, \ldots, E_n, A_1, \ldots, A_m)$, удовлетворяющих соотношению $R \S E_1, \ldots, E_n, V \S$, есть *множество структур рода* Σ *на* $E_1, \ldots, E_n$; оно может быть и пустым.

Примеры: 1) Возьмем в качестве $\mathcal{T}$ теорию множеств и рассмотрим род структуры, не имеющий вспомогательных базисных множеств и состоящий из основного базисного множества A, типовой характеристики $s \in \mathfrak{P}(A \times A)$ и аксиомы

$$s \circ s = s \quad \text{и} \quad s \cap \overset{-1}{s} = \Delta_A$$

(Δ_A — диагональ в $A \times A$), которая, как легко проверяется, является соотношением, переносимым при типизации $s \in \mathfrak{P}(A \times A)$. Ясно, что теория этого рода структуры есть не что иное, как теория *упорядоченных множеств* (гл. III, § 1, n° 3); говорят также, что таким образом определенный род структуры есть *род структуры порядка* на A. В гл. III мы встречали многочисленные примеры множеств, наделенных структурой этого рода.

2) Возьмем в качестве $\mathcal{T}$ теорию множеств и рассмотрим род структуры, не имеющий вспомогательных базисных множеств и состоящий из основного базисного множества A, типовой характеристики $F \in \mathfrak{P}((A \times A) \times A)$ и аксиомы — переносимого соотношения

„F есть функциональный график с областью определения $A \times A$“.

Структуры этого рода — частный случай того, что называется *алгебраическими структурами*, а функция, графиком которой является F (отображение множества $A \times A$ в A), — это так называемый *всюду определенный внутренний закон композиции* такой структуры („Алгебра“, гл. I).

3) Взяв в качестве $\mathcal{T}$ по-прежнему теорию множеств, рассмотрим род структуры, не имеющий вспомогательных базисных множеств и состоящий из основного базисного множества A, типовой характеристики $V \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))$ и аксиомы — переносимого соотношения

$$(\forall V')\left((V' \subset V) \Rightarrow \left(\left(\bigcup_{X \in V'} X\right) \in V\right)\right) \quad \text{и} \quad A \in V$$
$$\text{и } (\forall X)(\forall Y)((X \in V \quad \text{и} \quad Y \in V) \Rightarrow ((X \cap Y) \in V)).$$

Этот род структуры называется *родом топологической структуры*. Структура этого рода называется также *топологией*, а соотношение $X \in V$ выражают словами: множество X — *открытое* в топологии V („Общая топология“, гл. I, § 1).

4)° Возьмем за $\mathcal{T}$ теорию рода структуры тела, содержащую среди прочего константу K в качестве единственного базисного множества (основного). Род структуры *левого векторного пространства над* K содержит K, как вспомогательное базисное множество, основное базисное множество E и в качестве типовой характеристики соотношение

$$V \in \mathfrak{P}((E \times E) \times E) \times \mathfrak{P}((K \times E) \times E)$$

($\mathrm{pr}_1 V$ является графиком сложения в E, $\mathrm{pr}_2 V$ — графиком умножения на скаляр; см. „Алгебра“, гл. II); мы не будем здесь формулировать аксиому этого рода структуры (см. „Алгебра“, гл. II).

5) Снова возьмем за $\mathcal{T}$ теорию множеств; в этой теории тело C комплексных чисел есть терм, не содержащий никакой буквы. Род структуры *комплексного аналитического многообразия размерности* n состоит из C в качестве вспомогательного базисного множества и основного базисного множества V; мы не будем здесь указывать ни типовую характеристику, ни аксиому этого рода структуры.°

Замечания. 1) В приложениях (как, например, в примере 4 выше) часто случается, что ступень $S(E_1, \ldots, E_n, A, \ldots, A_m)$ есть произведение ступеней

$$S_1(E_1, \ldots, A_m) \times \ldots \times S_p(E_1, \ldots, A_m).$$

В этом случае в определении рода структуры Σ букву s часто заменяют на „кортеж“ $(s_1, \ldots, s_p)$ (ср. гл. II, § 2, n° 2).

С другой стороны, аксиома рода структуры Σ чаще всего записывается как конъюнкция нескольких переносимых соотношений (как в примере 3 выше); эти соотношения называются *аксиомами* рода Σ.

2) Родам структуры, очень часто используемым в математике, и множествам, наделенным структурами этих родов, дают имя; так, например, *упорядоченное множество* (гл. III, § 1) есть множество, наделенное структурой порядка[1]) (пример 1); °в дальнейшем в этом Трактате мы определим понятия *группы, тела, топологического пространства, дифференцируемого многообразия* и т. д. — все это означает множества, наделенные некоторыми структурами.°

3) Допуская вольность речи, в теории множеств $\mathcal{T}$ задание n различных между собой букв $x_1, \ldots, x_n$ (без типовой характеристики и без аксиомы) также рассматривают как род структуры Σ_0, называемый родом *структуры множества* на n основных базисных множествах $x_1, \ldots, x_n$.

5. Изоморфизмы и перенос структур

Пусть Σ — род структуры в теории $\mathcal{T}$ на n основных базисных множествах $x_1, \ldots, x_n$ с m вспомогательными базисными множествами $A_1, \ldots, A_m$; пусть S — схема конструкции ступени над $n+m$ термами, входящая в типовую характеристику рода структуры Σ, и пусть R — аксиома рода структуры Σ. В теории $\mathcal{T}'$, более сильной, чем $\mathcal{T}$, пусть U — структура рода Σ на множествах $E_1, \ldots, E_n$ (как основных базисных множествах) и пусть U′ — структура *того же рода* на множествах $E'_1, \ldots, E'_n$. Пусть, наконец (в $\mathcal{T}'$)

---

[1]) Это вольность речи; полностью надо было бы сказать „наделенное структурой рода структуры порядка“. — *Прим. ред.*

f_i — *биекция* множества E_i на E'_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Мы будем говорить, что $(f_1, \ldots, f_n)$ есть *изоморфизм* множеств $E_1, \ldots, E_n$, наделенных структурой U, на множества $E'_1, \ldots, E'_n$, наделенные структурой U′, если (в $\mathcal{T}'$)

$$\langle f_1, \ldots, f_n, I_1, \ldots, I_m\rangle^S (U) = U', \tag{4}$$

где I_h обозначает тождественное отображение множества A_h на себя.

Пусть f'_i — биекция, обратная к f_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Из (4) и критерия CST3 (n° 2) тотчас вытекает, что

$$\langle f'_1, \ldots, f'_n, I_1, \ldots, I_m\rangle^S (U') = U \tag{5}$$

и, следовательно, что $(f'_1, \ldots, f'_n)$ есть изоморфизм множеств $E'_1, \ldots, E'_n$, наделенных структурой U′, на множества $E_1, \ldots, E_n$, наделенные структурой U; говорят, что изоморфизмы $(f_1, \ldots, f_n)$ и $(f'_1, \ldots, f'_n)$ *обратны* один для другого.

Мы будем говорить, что множества $E'_1, \ldots, E'_n$, наделенные структурой U′, *изоморфны* множествам $E_1, \ldots, E_n$, наделенным структурой U, если существует изоморфизм множеств $E_1, \ldots, E_n$ на $E'_1, \ldots, E'_n$; в этом случае говорят также, что структуры U и U′ *изоморфны*.

В силу критерия CST1 предыдущие определения влекут следующий критерий:

CST4. *Пусть* U, U′, U″ — *три структуры одного и того же рода* Σ *на основных базисных множествах* $E_1, \ldots, E_n$, $E'_1, \ldots, E'_n$ *и* $E''_1, \ldots, E''_n$ *соответственно. Пусть* f_i — *биекция множества* E_i *на* E'_i, а g_i — *биекция множества* E'_i *на* E''_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *Если* $(f_1, \ldots, f_n)$ *и* $(g_1, \ldots, g_n)$ — *изоморфизмы, то то же верно и для* $(g_1 \circ f_1, \ldots, g_n \circ f_n)$.

Изоморфизм множеств $E_1, \ldots, E_n$ на множества $E_1, \ldots, E_n$ (*с той же самой* структурой) называется *автоморфизмом* множеств $E_1, \ldots, E_n$. Композиция двух автоморфизмов множеств $E_1, \ldots, E_n$ является автоморфизмом. То же верно для изоморфизма, обратного к автоморфизму; °другими словами, автоморфизмы множеств $E_1, \ldots, E_n$ образуют *группу* („Алгебра“, гл. I, § 6, 7).。

Замечание. Когда f_i — произвольная биекция множества E_i на E'_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, мы будем, допуская вольность речи, говорить, что $(f_1, \ldots, f_n)$ есть изоморфизм множеств $(E_1, \ldots, E_n)$ на $(E'_1, \ldots, E'_n)$ относительно рода структуры множества (n° 4, замечание 3).

CST5. *В теории* $\mathcal{T}'$, *более сильной, чем* $\mathcal{T}$, *пусть* U — *структура рода* Σ *на* $E_1, \ldots, E_n$ *и пусть* f_i — *биекция множества* E_i *на множество* E'_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *Тогда на* $E'_1, \ldots, E'_n$ *существует и единственна структура рода* Σ, *такая, что* $(f_1, \ldots, f_n)$ *является изоморфизмом множеств* $E_1, \ldots, E_n$ *на* $E'_1, \ldots, E'_n$.

В самом деле, эта структура не может не совпадать с термом U′, определенным соотношением (4); остается проверить, что этот терм действительно является структурой рода Σ, т. е. что соотношение R{$E'_1, \ldots, E'_n$, U′} истинно в $\mathcal{T}'$. Но это вытекает из того, что R{$x_1, \ldots, x_n, s$} *переносимо*, ибо R{$E'_1, \ldots, E'_n$, U′} эквивалентно в $\mathcal{T}'$ соотношению R{$E, \ldots, E_n$, U} (n° 3), которое истинно в $\mathcal{T}'$ по условию.

Мы будем говорить, что структура U′ получена *переносом* ⟨*en transportant*⟩ *структуры* U *на множества* $E'_1, \ldots, E'_n$ *посредством биективных отображений* $f_1, \ldots, f_n$. Таким образом, сказать, что две структуры одного и того же рода изоморфны или что одна получается из другой переносом, означает одно и то же.

Может случиться, что две *произвольные* структуры рода Σ *необходимо изоморфны*; в этом случае говорят, что род структуры Σ *однозначен*. °Так обстоит дело со структурой бесконечной циклической группы (изоморфной **Z**), со структурой простого тела характеристики 0 (изоморфной **Q**), со структурой полного и архимедовски упорядоченного тела (изоморфной **R**), со структурой алгебраически замкнутого, коммутативного, локально компактного, связного тела (изоморфной **C**), наконец, со структурой некоммутативного, локально компактного, связного тела (изоморфной телу кватернионов **K**). Для некоторых из этих родов структуры, как, например, для структуры простого тела характеристики 0 или для структуры полного и архимедовски упорядоченного тела, не существует даже никакого автоморфизма, отличного от тождественного отображения; для других же примеров, данных выше, такие автоморфизмы существуют (например, симметрия $x \to -x$ в **Z**).。

Заметим, что указанные только что роды структуры являются как раз теми родами, которые лежат в основе Классической математики. Напротив, °род структуры группы, род структуры упорядоченного множества, род топологической структуры не являются однозначными.。

6. *Вывод структур*

Пусть Σ — род структуры в теории $\mathcal{T}$ на n основных базисных множествах $x_1, \ldots, x_n$ с m вспомогательными базисными множествами $A_1, \ldots, A_m$; пусть s — общая структура рода Σ. Пусть T — некоторая схема конструкции ступени над $n+m$ термами. Терм V{$x_1, \ldots, x_n, s$}, не содержащий никаких букв, отличных от констант теории $\mathcal{T}_\Sigma$, называется *внутренним* для s, типа $T(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m)$, если он удовлетворяет следующим условиям:

1° Соотношение

$$V\{x_1, \ldots, x_n, s\} \in T(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m)$$

есть теорема теории $\mathcal{T}_\Sigma$.

2° Пусть $\mathcal{T}'_\Sigma$ — теория, полученная добавлением к аксиомам теории $\mathcal{T}_\Sigma$ аксиом „f_i есть биекция множества x_i на y_i" $(1 \leqslant i \leqslant n)$ (буквы y_i и f_i, для $1 \leqslant i \leqslant n$, отличны от констант теории $\mathcal{T}_\Sigma$ и различны между собой); если s' — структура, полученная переносом структуры s посредством $(f_1, \ldots, f_n)$ (n° 5), то

$$\mathrm{V}\{y_1, \ldots, y_n, s'\} = \langle f_1, \ldots, f_n, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_m\rangle^{\tau} (\mathrm{V}\{x_1, \ldots, x_n, s\})$$

есть теорема теории $\mathcal{T}'_\Sigma$.

В приложении мы увидим, почему большей частью термы, которые приходится определять в теории рода структуры, являются внутренними термами.

Пусть теперь Θ — другой род структуры в теории $\mathcal{T}$ на r основных базисных множествах $u_1, \ldots, u_r$ с p вспомогательными базисными множествами $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_p$; пусть

$$t \in \mathrm{T}(u_1, \ldots, u_r, \mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_p)$$

— типовая характеристика рода Θ (n° 4). Система из $r+1$ термов P, $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_r$, *внутренних для* s, такая, что P является *структурой рода* Θ *на* $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_r$ *в теории* $\mathcal{T}_\Sigma$, называется *способом вывода структуры рода* Θ *из структуры рода* Σ. Допуская вольность речи, мы часто будем один терм P называть способом вывода.

Пусть $\mathcal{T}'$ — теория, более сильная, чем $\mathcal{T}$. Если в $\mathcal{T}'$ объект $\mathscr{S}$ является структурой рода Σ на $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$, то $\mathrm{P}\{\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n, \mathscr{S}\}$ является структурой рода Θ на r множествах $\mathrm{F}_j = \mathrm{U}_j\{\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n, \mathscr{S}\}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$; эта структура называется структурой, *выведенной из* $\mathscr{S}$ *способом* P, или структурой, *подчиненной структуре* $\mathscr{S}$. Предположение, что термы P, $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_r$ являются внутренними для s, влечет, кроме того, следующий критерий:

CST6. *Пусть* $(g_1, \ldots, g_n)$ — *изоморфизм множеств* $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$, *наделенных структурой* $\mathscr{S}$ *рода* Σ, *на множества* $\mathrm{E}'_1, \ldots, \mathrm{E}'_n$, *наделенные структурой* $\mathscr{S}'$ *того же рода*. Если U_j — *типа* $\mathfrak{P}(\mathrm{T}_j)$[1], *положим* $h_j = \langle g_1, \ldots, g_n, \mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_m\rangle^{\mathrm{T}_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, *и пусть* $\mathrm{F}'_j = \mathrm{U}_j\{\mathrm{E}'_1, \ldots, \mathrm{E}'_n, \mathscr{S}'\}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$; *тогда* $(h_1, \ldots, h_r)$ *является изоморфизмом множеств* $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_r$ *на множества* $\mathrm{F}'_1, \ldots, \mathrm{F}'_r$, *если эти системы множеств наделены соответственно структурами рода* Θ, *выведенными из* $\mathscr{S}$ *и* $\mathscr{S}'$ *способом* P.

[1]) Символ $\mathfrak{P}(S)$, где S — схема конструкции ступени, определяется в приложении к этой главе (n° 1, подстрочное примечание). — *Прим. ред.*

Ясно, что термы $x_1, \ldots, x_n$ являются внутренними для s; во многих случаях термы $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_r$ являются некоторыми из букв $x_1, \ldots, x_n$; тогда говорят, что структура рода Θ, выведенная из s способом P, лежит ниже, чем s.

Примеры. ° 1) Род структуры *топологической группы* содержит одно основное базисное множество A, не содержит никаких вспомогательных базисных множеств, а соответствующая общая структура есть пара (s_1, s_2) (s_1 есть график закона композиции на A, а s_2 — множество открытых множеств топологии в A; см. „Общая топология", гл. III, § 1). Каждый из термов s_1, s_2 есть способ вывода, дающий соответственно *структуру группы* и *топологию*, лежащие ниже, чем структура топологической группы (s_1, s_2).

Аналогично из структуры векторного пространства выводится нижележащая структура абелевой группы. Из структуры кольца выводятся нижележащие структура абелевой группы и структура (мультипликативного) моноида. Из структуры дифференцируемого многообразия выводится нижележащая топология и т. д.

2) Род структуры векторного пространства над **C** (соответственно **R**) содержит основное базисное множество E, вспомогательное базисное множество, равное множеству **C** (соответственно **R**), и типовую характеристику

$$s_1 \in \mathfrak{P}((\mathrm{E} \times \mathrm{E}) \times \mathrm{E}) \text{ и } s_2 \in \mathfrak{P}((\mathbf{C} \times \mathrm{E}) \times \mathrm{E})$$

(соответственно

$$s_1 \in \mathfrak{P}((\mathrm{E} \times \mathrm{E}) \times \mathrm{E}) \text{ и } s_2 \in \mathfrak{P}((\mathbf{R} \times \mathrm{E}) \times \mathrm{E})).$$

Пара $(s_1, s_2 \cap ((\mathbf{R} \times \mathrm{E}) \times \mathrm{E}))$ есть способ вывода структуры векторного пространства над **R** из структуры векторного пространства над **C** („сужение тела скаляров до **R**", см. „Алгебра, гл. II). ₒ

3) Предположим, что Θ имеет *те же самые* множества базы (основные и вспомогательные), что и Σ, и *ту же самую* типовую характеристику. Если, кроме того, аксиома рода Σ *влечет* (в $\mathcal{T}$) аксиому рода Θ, то ясно, что терм s есть способ вывода структуры рода Θ из структуры рода Σ. В этом случае говорят, что Θ *беднее*, чем Σ, или что Σ *богаче*, чем Θ. Всякая структура рода Σ в теории $\mathcal{T}'$, более сильной, чем $\mathcal{T}$, является в этом случае также и структурой рода Θ. Например, род структуры *совершенно упорядоченного* множества (получающийся, если в качестве аксиомы взять конъюнкцию аксиомы структур порядка (n° 4, пример 1) и соотношения $s \cup \overset{-1}{s} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}$) богаче, чем род структуры порядка. ° Род структуры абелевой группы богаче, чем род структуры группы. Род структуры компактного пространства богаче, чем род топологической структуры, и т. д. ₒ

° 4) Для случая, когда Σ и Θ оба являются родами структуры группы (соответственно кольца), в алгебре („Алгебра", гл. I) определяют способ вывода, ассоциирующий каждой структуре группы (соответственно кольца) структуру группы (соответственно кольца) над ее (его) *центром*. Для случая, когда Σ есть род структуры векторного пространства над полем K, Θ — род структуры алгебры над K, в „Алгебре", гл. III, определяют способы вывода, ассоциирующие каждому векторному пространству над K его *тензорную алгебру* или его *внешнюю алгебру*. В дальнейшем нам встретятся также много других примеров. ₒ

Замечание. Если P есть „кортеж" $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_q)$, говорят также, что термы $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_q$ составляют способ вывода структуры рода Θ из структуры рода Σ.

7. Эквивалентные роды структуры

Пусть Σ и Θ — два рода структуры в одной и той же теории $\mathcal{T}$, имеющие *одни и те же* основные множества базы $x_1, \ldots, x_n$. Пусть s и t — общие структуры родов Σ и Θ. Предположим, что выполняются следующие условия:

1° Имеется способ вывода $P \S x_1, \ldots, x_n, s \S$ структуры рода Θ на $x_1, \ldots, x_n$ из структуры рода Σ на $x_1 \ldots x_n$.

2° Имеется способ вывода $Q \S x_1, \ldots, x_n, t \S$ структуры рода Σ на $x_1, \ldots, x_n$ из структуры рода Θ на $x_1, \ldots, x_n$.

3° Соотношение

$$Q \S x_1, \ldots, x_n, P \S x_1, \ldots, x_n, s \S \S = s$$

есть теорема теории $\mathcal{T}_\Sigma$, а соотношение

$$P \S x_1, \ldots, x_n, Q \S x_1, \ldots, x_n, t \S \S = t$$

есть теорема теории $\mathcal{T}_\Theta$.

Тогда говорят, что роды структуры Σ и Θ *эквивалентны посредством способов вывода* P *и* Q. В этом случае для всякой теоремы $B \S x_1, \ldots, x_n, s \S$ теории $\mathcal{T}_\Sigma$ соотношение $B \S x_1, \ldots, x_n, Q \S$ есть теорема теории $\mathcal{T}_\Theta$ (гл. I, § 2, п° 4); и обратно, для всякой теоремы $C \S x_1, \ldots, x_n, t \S$ теории $\mathcal{T}_\Theta$ соотношение $C \S x_1, \ldots, x_n, P \S$ есть теорема теории $\mathcal{T}_\Sigma$.

Если U есть структура рода Σ, говорят, что структура, полученная из U методом P, *эквивалентна* структуре U. Из критерия CST6 вытекает следующий критерий:

CST7. *Пусть $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ — две структуры рода Σ на основных базисных множествах $(E_1, \ldots, E_n)$ и $(E'_1, \ldots, E'_n)$ соответственно. Пусть $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}'_0$ — структуры рода Θ, эквивалентные соответственно структурам $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$. Для того чтобы $(g_1, \ldots, g_n)$ было изоморфизмом для структур $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}'_0$, необходимо и достаточно, чтобы $(g_1, \ldots, g_n)$ было изоморфизмом для структур $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$.*

На практике теории $\mathcal{T}_\Sigma$ и $\mathcal{T}_\Theta$ двух эквивалентных родов структуры не различают.

Примеры. 1)° Пусть Σ — род структуры абелевой группы („Алгебра", гл. I, § 6, п°7); он содержит одно (основное) базисное множество A, а его общая структура есть одна буква F; типовая характеристика рода Σ есть $F \in \mathfrak{P}((A \times A) \times A)$; обозначим аксиому рода Σ через $R \S A, F \S$. Из этой аксиомы следует, в частности, что F есть функциональный график („закон композиции" группы, см. п° 4, пример 2). Определим тогда в $\mathcal{T}_\Sigma$ (где $\mathcal{T}$ обозначает теорию множеств) терм $M \S A, F \S$, являющийся функциональным графиком в $\mathfrak{P}((\mathbf{Z} \times A) \times A)$

и удовлетворяющий следующему соотношению $B \S M, A, F \S$:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall n)((x \in A \text{ и } y \in A \text{ и } n \in \mathbf{Z}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (M(n, F(x, y)) = F(M(n, x), M(n, y))))$$
$$\text{и } (\forall x)(\forall m)(\forall n)((x \in A \text{ и } m \in \mathbf{Z} \text{ и } n \in \mathbf{Z}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (M(m+n, x) = F(M(m, x), M(n, x))))$$
$$\text{и } (\forall x)(\forall m)(\forall n)((x \in A \text{ и } m \in \mathbf{Z} \text{ и } n \in \mathbf{Z}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (M(m, M(n, x)) = M(mn, x)))$$
$$\text{и } (\forall x)((x \in A) \Rightarrow (M(1, x) = x))$$

(„умножение элемента из A на целое число"; см. „Алгебра", гл. I, § 2, п° 9).

Рассмотрим теперь род структуры Θ *унитарного* **Z**-*модуля* („Алгебра", гл. II, § 1, п° 2), имеющий одно основное множество базы A, с **Z** в качестве вспомогательного множества, с общей структурой, содержащей две буквы G, L, с типовой характеристикой

$$G \in \mathfrak{P}((A \times A) \times A) \text{ и } L \in \mathfrak{P}((\mathbf{Z} \times A) \times A)$$

и с аксиомой
„$R \S A, G \S$ и (L есть функциональный график) и $B \S L, A, G \S$".

Тотчас же проверяется, что термы F, M составляют способ вывода структуры рода Θ из структуры рода Σ, а терм G есть способ вывода структуры рода Σ из структуры рода Θ; кроме того, вышеуказанное условие 3° проверяется тривиально. Таким образом, можно сказать, что род структуры абелевой группы и род структуры унитарного **Z**-модуля эквивалентны.

2) Пусть Σ — род топологической структуры (п° 4, пример 3), A — множество базы и V — общая структура рода Σ. Рассмотрим соотношение

$x \in A$ и $X \subset A$ и $(\forall U)((U \in V \text{ и } x \in U) \Rightarrow (X \cap U \neq \varnothing))$. Оно обладает графиком $P \subset \mathfrak{P}(A) \times A$ по паре (X, x); $P \S A, V \S$ есть терм, называемый „множество пар (X, x), таких, что x есть *точка прикосновения* множества X относительно топологии V". Доказывается (см. „Общая топология", гл. I, § 1), что следующие соотношения являются теоремами теории $\mathcal{T}_\Sigma$:

$$P(\varnothing) = \varnothing,$$
$$(\forall Y)((Y \subset A) \Rightarrow (Y \subset P(Y))),$$
$$(\forall Y)((Y \subset A) \Rightarrow (P(P(Y)) = P(Y))),$$
$$(\forall Y)(\forall Z)((Y \subset A \text{ и } Z \subset A) \Rightarrow (P(Y \cup Z) = P(Y) \cup P(Z))).$$

Рассмотрим теперь род структуры Θ, имеющий одно (основное) множество базы A, с общей структурой, содержащей одну букву W, с типовой характеристикой $W \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A) \times A)$ и с аксиомой

$$W(\varnothing) = \varnothing \text{ и } (\forall Y)((Y \subset A) \Rightarrow (Y \subset W(Y)))$$
$$\text{и } (\forall Y)((Y \subset A) \Rightarrow (W(W(Y)) = W(Y)))$$
$$\text{и } (\forall Y)(\forall Z)((Y \subset A \text{ и } Z \subset A) \Rightarrow (W(Y \cup Z) = W(Y) \cup W(Z))).$$

Рассмотрим, с другой стороны, соотношение

$$U \subset A \text{ и } (\forall x)\big((x\in U)\Rightarrow(x \notin W(A-U))\big).$$

Множество элементов $U \in \mathfrak{P}(A)$, удовлетворяющих этому соотношению, есть часть $Q\{A, W\}$ множества $\mathfrak{P}(A)$. Тогда доказывается („Общая топология", гл. 1, 2 издание, § 1, упр. 10), что следующие соотношения являются теоремами теории $\mathcal{T}_\Theta$:

$$A \in Q,$$

$$(\forall M)\Big((M\subset Q)\Rightarrow\Big(\Big(\bigcup_{X\in M} X\Big)\in Q\Big)\Big),$$

$$(\forall X)(\forall Y)((X\in Q \text{ и } Y\in Q)\Rightarrow((X\cap Y)\in Q)).$$

Это показывает, что термы $P\{A, V\}$ и $Q\{A, W\}$ удовлетворяют вышеуказанным условиям 1° и 2°; видно также, что они удовлетворяют условию 3°. Таким образом, роды структуры Σ и Θ эквивалентны; всякую структуру рода Θ также рассматривают как топологию, а именно как топологию, которая соответствует ей согласно способу вывода $Q\{A, W\}$.

Упражнение

Рассмотрим теорию $\mathcal{T}$, более сильную, чем теория множеств, в которой P есть субстантивный знак веса 1, X — субстантивный знак веса 2 (гл. 1, § 1, п° 3). Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — различные буквы, которым приписывается вес 0. Пусть T — равновесное выражение (гл. I, приложение, п° 1) из знаков P, X, $x_1, \ldots, x_n$; такое выражение будет называться *типом ступени* над $x_1, \ldots, x_n$.

Пусть теперь $E_1, \ldots, E_n$ суть n термов теории, более сильной, чем теория множеств. Для всякого типа ступени T на $x_1, \ldots, x_n$ определим терм $T(E_1, \ldots, E_n)$ следующим образом:

1° если T есть буква x_i, то $T(E_1, \ldots, E_n)$ есть множество E_i;

2° если T имеет вид PU, где U — выражение, антецедентное к T (гл. I, приложение, п° 4), то $T(E_1, \ldots, E_n)$ есть выражение $\mathfrak{P}(U(E_1, \ldots, E_n))$;

3° если T имеет вид XUV, где U и V — выражения, антецедентные к T, то $T(E_1, \ldots, E_n)$ есть множество

$$U(E_1, \ldots, E_n)\times V(E_1, \ldots, E_n).$$

Показать, что для всякого типа ступени T над $x_1, \ldots, x_n$ терм $T(E_1, \ldots, E_n)$ есть ступень над термами $E_1, \ldots, E_n$ и обратно (рассуждать индукцией по длине типа ступени или по длине схемы конструкции ступени); $T(E_1, \ldots, E_n)$ называется *реализацией* на термах $E_1, \ldots, E_n$ типа ступени T. Более точно, всякая ступень на n различных буквах может, причем единственным образом, быть записана в виде $T(x_1, \ldots, x_n)$, где T — тип ступени.

Показать также, как можно типу ступени T над n буквами и n отображениями $f_1, \ldots, f_n$ сопоставить каноническое распространение этих отображений. Вывести из этого, что если две схемы конструкции ступени S и S' над n буквами таковы, что $S(x_1, \ldots, x_n) = S'(x_1, \ldots, x_n)$ (где $x_1, \ldots, x_n$ — различные буквы), то

$$\langle f_1, \ldots, f_n\rangle^{S} = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle^{S'}.$$

§ 2. Морфизмы и производные структуры

1. Морфизмы

Для простоты в этом параграфе и дальше мы будем предполагать, что рассматриваемые роды структуры содержат только *одно* базисное множество (необходимым образом основное); читатель без труда распространит определения и результаты на общий случай.

Пусть Σ — род структуры в теории $\mathcal{T}$, более сильной, чем теория множеств, x, y, s, t — четыре буквы, различные между собой и отличающиеся от констант теории $\mathcal{T}_\Sigma$; напомним, что символ $\mathcal{F}(x, y)$ обозначает множество отображений множества x в y (гл. II, § 5, п° 2). Предположим, что дан терм $\sigma\{x, y, s, t\}$ теории $\mathcal{T}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(MO_I) *Соотношение*
„s есть структура рода Σ на x и t есть структура рода Σ на y" *влечет в $\mathcal{T}$ соотношение* $\sigma\{x, y, s, t\}\subset\mathcal{F}(x, y)$.

(MO_{II}). *Если в теории $\mathcal{T}'$, более сильной, чем $\mathcal{T}$, E, E', E'' суть три множества, наделенные структурами $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}''$ рода Σ, то соотношения* $f\in\sigma\{E, E', \mathcal{S}, \mathcal{S}'\}$ *и* $g\in\sigma\{E', E'', \mathcal{S}', \mathcal{S}''\}$ *влекут соотношение* $g\circ f\in\sigma\{E, E'', \mathcal{S}, \mathcal{S}''\}$.

(MO_{III}). *Если в теории $\mathcal{T}'$, более сильной, чем $\mathcal{T}$, E и E' — два множества, наделенные структурами $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ рода Σ, то биекция f множества E на E' будет изоморфизмом тогда и только тогда, когда* $f\in\sigma\{E, E', \mathcal{S}, \mathcal{S}'\}$ *и* $\overset{-1}{f}\in\sigma\{E', E, \mathcal{S}', \mathcal{S}\}$.

Когда Σ и σ даны, соотношение $f\in\sigma\{x, y, s, t\}$ выражают словами: f есть *морфизм* (или *σ-морфизм*) *множества x, наделенного структурой s, в множество y, наделенное структурой t*; если (в теории $\mathcal{T}'$ более сильной, чем $\mathcal{T}$) E, E' — два множества, наделенные структурами $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ рода Σ, терм $\sigma\{E, E', \mathcal{S}, \mathcal{S}'\}$ называется *множеством σ-морфизмов множества* E *в* E'.

Примеры. 1) Возьмем за Σ род структуры порядка, а за $\sigma\{x, y, s, t\}$ множество таких отображений f множества x в множество y, что соотношение $(u, v)\in s$ влечет $(f(u), f(v))\in t$. В обозначениях § 1 гл. III это также означает, что $u\leqslant v$ влечет $f(u)\leqslant f(v)$, т. е. что f *возрастающее*. Проверка аксиом (MO_I), (MO_{II}) и (MO_{III}) легка.

2) Возьмем за Σ некоторый род алгебраической структуры, содержащий один всюду определенный (внутренний) закон композиции (§ 1, п° 4, пример 2). Пусть A, A' — два множества, наделенные структурами рода Σ, и пусть p, p' — законы композиции этих структур. Рассмотрим такие отображения f множества A в A', что $p'(f(x), f(y)) = f(p(x, y))$ для $x\in A$ и $y\in A$; эти отображения удовлетворяют аксиомам (MO_I), (MO_{II}) и (MO_{III}); они называются *представлениями* или *гомоморфизмами* множества A в A'.

3) Возьмем за Σ род топологической структуры (§ 1, п° 4, пример 3). Пусть A, A' — два множества, наделенные топологиями V, V'

соответственно; рассмотрим такие отображения f множества A в A′, что соотношение $X' \in V'$ влечет $\overset{-1}{f}(X') \in V$ (иначе говоря, полный прообраз относительно f всякого множества, открытого в V′, должен быть открытым в V); эти отображения, удовлетворяющие аксиомам (MO_I), (MO_{II}) и (MO_{III}), называются *непрерывными отображениями* множества A в A′ (для топологий V и V′) (см. „Общая топология", гл. I, § 4).

Замечание. Для заданного рода структуры Σ часто имеется возможность определения различных термов $\sigma\{x, y, s, t\}$, удовлетворяющих условиям (MO_I), (MO_{II}) и (MO_{III}). Например, для рода Σ топологической структуры назовем (в обозначениях предыдущего примера) отображение f множества A в A′ *открытым*, если соотношение $X \in V$ влечет $f(X) \in V'$ (иначе говоря, если образ при отображении f всякого открытого множества есть открытое множество). Легко устанавливается, что открытые отображения также удовлетворяют условиям (MO_I), (MO_{II}) и (MO_{III}) для рода Σ; °кроме того, можно показать, что непрерывное отображение не обязательно является открытым, а открытое отображение — не обязательно непрерывным.° *Таким образом,* задание рода структуры *не влечет* вполне определенное понятие морфизма.

Для структур порядка, алгебраических структур и топологических структур, если противное не оговорено, под морфизмами будут подразумеваться те морфизмы, которые были определены в примерах выше.

Условие (MO_{III}) и характеристика биекций (гл. II, § 3, n° 8, следствие предложения 8) влекут следующий критерий:

CST8. *Пусть* E, E′ — *два множества, наделенные каждое структурой рода* Σ. *Пусть f есть σ-морфизм множества* E *в* E′, *а g есть σ-морфизм множества* E′ *в* E. *Если $g \circ f$ — тождественное отображение множества* E *на себя и $f \circ g$ — тождественное отображение множества* E′ *на себя, то f есть изоморфизм множества* E *на* E′, *а g есть обратный изоморфизм.*

Заметим, что биекция множества E на E′ может быть σ-морфизмом и без того, чтобы обратное отображение было σ-морфизмом. °Например, биективное отображение топологического пространства A в топологическое пространство A′ может быть непрерывным без того, чтобы обратное отображение было таковым („Общая топология", гл. I, § 4).°

Замечание. Когда род структуры Σ содержит несколько основных базисных множеств $x_1, \ldots, x_n$ и вспомогательных базисных множеств $A_1, \ldots, A_m$, тогда σ-морфизм есть система $(f_1, \ldots, f_n)$, где f_i есть отображение множества x_i в y_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; эти системы отображений удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (MO_{II}) и (MH_{III}), которые читатель легко сформулирует.

2. Более тонкие структуры

Во всей оставшейся части этого параграфа мы будем предполагать заданными род структуры Σ и понятие σ-морфизма относительно этого рода структуры; *все понятия, которые будут вводиться, зависят не только от* Σ, *но также и от фиксированного понятия σ-морфизма.* Мы будем обычно говорить „морфизм" вместо „σ-морфизм".

Пусть E — множество, $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}_2$ — две структуры рода Σ на E. Мы будем говорить, что структура $\mathscr{S}_1$ *тоньше, или мельче,* чем структура $\mathscr{S}_2$ (или что $\mathscr{S}_2$ *грубее, или крупнее,* чем $\mathscr{S}_1$), если тождественное отображение множества E, наделенного структурой $\mathscr{S}_1$, на множество E, наделенное структурой $\mathscr{S}_2$, есть морфизм.

Если это необходимо для избежания смешения, мы будем говорить, что $\mathscr{S}_1$ тоньше, чем $\mathscr{S}_2$, *относительно рассматриваемого понятия σ-морфизма*; аналогично — для всех понятий, которые будут определены в этом параграфе.

Предположим, что $\mathscr{S}_1$ тоньше, чем $\mathscr{S}_2$; если E′ — множество, наделенное структурой $\mathscr{S}'$ рода Σ, и f — морфизм множества E, наделенного структурой $\mathscr{S}_2$, в множество E′, наделенное структурой $\mathscr{S}'$, то f является также морфизмом множества E, наделенного структурой $\mathscr{S}_1$, в множество E′, наделенное структурой $\mathscr{S}'$; это вытекает из предыдущего определения и (MO_{II}). Аналогично, если g — морфизм множества E′, наделенного структурой $\mathscr{S}'$, в множество E, наделенное структурой $\mathscr{S}_1$, то g является также морфизмом множества E′, наделенного структурой $\mathscr{S}'$, в множество E, наделенное структурой $\mathscr{S}_2$.

Говоря более образно, *чем* структура (рода Σ) на E тоньше, *тем больше* существует морфизмов с областью отправления E и *тем меньше* существует морфизмов с областью прибытия E.

Соотношение „$\mathscr{S}_1$ грубее, чем $\mathscr{S}_2$", есть *соотношение порядка* между $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}_2$ в множестве структур рода Σ на E; в самом деле, оно рефлексивно в силу (MO_{III}), транзитивно в силу (MO_{II}) и, если некоторая структура рода Σ одновременно и тоньше и грубее, чем некоторая другая структура, то она тождественна ей в силу (MO_{III}) и определения изоморфизма (§ 1, n° 5). В соответствии с общими определениями (гл. III, § 1, n° 14) говорят, что две структуры рода Σ на E *сравнимы*, если одна из них тоньше, чем другая; говорят, что одна структура *строго тоньше, или строго мельче* (соответственно *строго грубее, или строго крупнее*), чем другая структура, если она *тоньше* (соответственно *грубее*), чем эта другая структура, и отлична от нее.

Примеры. 1) Для того чтобы структура порядка с графиком s на множестве A была тоньше, чем структура порядка с графиком s', необходимо и достаточно, чтобы было $s \subset s'$. Иначе говоря, соотношение $x \leqslant y$ для s влечет $x \leqslant y$ для s'; мы снова получаем определение, данное в гл. III, § 1, n° 4, примере 3.

2) Рассмотрим две алгебраические структуры F, F′ одного и того же рода Σ на множестве A, так, что F и F′ суть графики законов (всюду определенных) композиции этих структур. В силу определения морфизмов для этого случая (n° 1, пример 2) F тоньше, чем F′, означает, что $F \subset F'$. Но так как F и F′ — функциональные графики, имеющие оба одну и ту же область определения $A \times A$, то

необходимо $F = F'$. Иначе говоря, две *сравнимые* структуры рода Σ необходимо *тождественны*.

3) Пусть V, V' — две топологии на одном и том же множестве A. V тоньше, чем V'; это означает в силу определения морфизмов (п° 1, пример 3), что $V' \subset V$; другими словами, всякая часть множества A, являющаяся открытым множеством относительно V', является также открытым множеством и относительно V (или, более образно, чем топология тоньше, тем в ней больше открытых множеств).

Замечание. Мы только что видели пример (пример 2), в котором две сравнимые структуры одного и того же рода Σ были необходимо тождественны. Встречается много примеров таких структур: структуры совершенного порядка, °топологии компактного пространства, структуры пространства Фреше (морфизмами являются непрерывные линейные отображения), топологии, определенные на теле при помощи абсолютной величины (или оценки); и т. д.°

Для такого рода структуры Σ морфизм f множества E в E', являющийся *биективным* отображением, есть *изоморфизм*: перенося посредством f структуру $\mathcal{S}$ множества E, получим структуру рода Σ, более тонкую, чем структура $\mathcal{S}'$ множества E', которая, таким образом, необходимо тождественна этой последней.

3. Начальные структуры

Рассмотрим семейство $(A_\iota)_{\iota \in I}$ множеств, каждое из которых наделено структурой $\mathcal{S}_\iota$ рода Σ. Пусть, с другой стороны, E — множество и для каждого $\iota \in I$ пусть f_ι — отображение *множества* E *в* A_ι. Структура $\mathcal{J}$ рода Σ на E называется *структурой, начальной для семейства* $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, если она обладает свойством:

(IN). Каковы бы ни были множество E', структура $\mathcal{S}'$ рода Σ на E' и отображение g *множества* E' *в* E, соотношение

„g есть морфизм множества E' в E"

эквивалентно соотношению

„каково бы ни было $\iota \in I$, отображение $f_\iota \circ g$ есть морфизм множества E' в A_ι".

CST9. *Если на E существует структура, начальная для семейства $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, она является наиболее грубой из структур рода Σ на E, для которых каждое из отображений f_ι есть морфизм, и, следовательно, единственна.*

В самом деле, пусть $\mathcal{J}$ — начальная структура на E и $\mathcal{S}$ — структура рода Σ на E, для которой каждое из f_ι есть морфизм. Обозначив через i тождественное отображение множества E, наделенного структурой $\mathcal{S}$, на множество E, наделенное структурой $\mathcal{J}$, можем также сказать, что $f_\iota \circ i$ есть морфизм для всякого $\iota \in I$; условие (IN) показывает, что i — морфизм, что означает (п° 2), что $\mathcal{S}$ *тоньше*, чем $\mathcal{J}$. С другой стороны, применив (IN) к случаю, когда g — тождественное отображение множества E (наделенного структурой $\mathcal{J}$) на себя, видим (в силу (MO_{III})), что каждое из f_ι есть морфизм множества E в A_ι, что доказывает критерий.

Может случиться, что существует структура рода Σ на E, являющаяся самой грубой из всех структур рода Σ, для которых все f_ι — морфизмы, но что эта структура не является структурой, начальной относительно $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)$ (упр. 6).

Имеем следующий *критерий транзитивности*:

CST10. *Пусть E — множество, $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств и для каждого $\iota \in I$ пусть $\mathcal{S}_\iota$ — структура рода Σ на A_ι. Пусть $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — разбиение множества I и пусть $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство множеств с множеством индексов L. Наконец, для всякого $\lambda \in L$ пусть h_λ — отображение множества E в B_λ; для всякого $\lambda \in L$ и всякого $\iota \in J_\lambda$ пусть $g_{\lambda\iota}$ — отображение множества B_λ в A_ι; положим тогда $f_\iota = g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda$* (рис. 1). *Предположим, что для всякого $\lambda \in L$ на B_λ существует структура $\mathcal{S}'_\lambda$, начальная для семейства $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_{\iota\lambda})_{\iota \in J_\lambda}$. При этих условиях следующие предложения эквивалентны:*

а) на E существует структура $\mathcal{J}$, начальная для семейства $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$;

б) на E существует структура $\mathcal{J}'$, начальная для семейства $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in L}$.

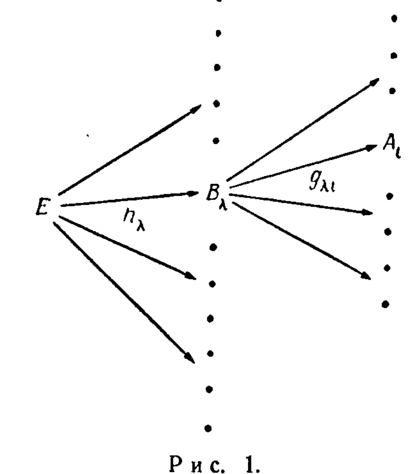


Рис. 1.

Кроме того, эти предложения влекут, что $\mathcal{J} = \mathcal{J}'$.

В самом деле, пусть F — множество, наделенное структурой рода Σ, и пусть u — отображение множества F в E. Заметим, что по определению соотношение

„$h_\lambda \circ u$ есть морфизм множества F в B_λ"

эквивалентно соотношению

„каково бы ни было $\iota \in J_\lambda$, $g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda \circ u = f_\iota \circ u$ есть морфизм множества F в A_ι".

Соотношение

„каково бы ни было $\lambda \in L$, $h_\lambda \circ u$ есть морфизм множества F в B_λ" (1)

эквивалентно, таким образом, соотношению

„каково бы ни было $\iota \in I$, $f_\iota \circ u$ есть морфизм множества F в A_ι". (2)

Но утверждение, что $\mathcal{J}'$ — структура, начальная относительно семейства $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda\in L}$, означает, что соотношение (1) эквивалентно соотношению

„u есть морфизм множества F в множество E, наделенное структурой $\mathcal{J}'$",

а утверждение, что $\mathcal{J}$ — структура, начальная относительно семейства $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, означает, что соотношение (2) эквивалентно соотношению

„u есть морфизм множества F в множество E, наделенное структурой $\mathcal{J}$";

отсюда, принимая во внимание свойство единственности начальной структуры, и следует критерий.

4. *Примеры начальных структур*

I. *Полный прообраз структуры.* Если I есть множество из одного элемента, структура, начальная относительно единственной тройки $(A, \mathcal{S}, f)$, называется (в том случае, когда существует) *полным прообразом структуры* $\mathcal{S}$ *относительно* (*по, при*) f.

°Топология всегда обладает полным прообразом относительно любого отображения f, но для структуры порядка или алгебраической структуры дело обстоит не так.$_\circ$

II. *Индуцированная структура.* Пусть A — множество, наделенное структурой $\mathcal{S}$ рода Σ; пусть далее B — часть множества A; пусть, наконец, j — каноническая инъекция множества B в A. *Структурой, индуцированной* на B структурой $\mathcal{S}$, назовем полный прообраз (если он существует) структуры $\mathcal{S}$ относительно j.

Структура порядка индуцирует структуру того же рода на любой части множества, на которой она определена; не так обстоит дело для структуры фильтрующегося упорядоченного множества. °Топология индуцирует топологию на любой части множества, на которой она определена; но топология компактного пространства не индуцирует, вообще говоря, топологию компактного пространства. На произвольной части B множества A, наделенного алгебраической структурой, эта структура не индуцирует, вообще говоря, структуру того же рода; когда структура, заданная на A, состоит из всюду определенных законов композиции, необходимо, чтобы B была устойчивой относительно каждого из этих законов, однако это условие не всегда является достаточным (см. „Алгебра", гл. 1).$_\circ$

Общий критерий CST10 дает для индуцированных структур *критерий транзитивности*:

CST11. *Пусть* B — *часть множества* A, *пусть* C — *часть множества* B, $\mathcal{S}$ — *структура рода* Σ *на* A, *индуцирующая на* B *структуру* $\mathcal{S}'$ *того же рода. Для того чтобы* $\mathcal{S}$ *индуцировала на* C *структуру рода* Σ, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathcal{S}'$ *индуцировала на* C *структуру рода* Σ, *причем структуры, индуцированные на* C *структурами* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{S}'$, *в этом случае тождественны.*

CST12. *Пусть* A, A' — *два множества, наделенные структурами* $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ *рода* Σ, B — *часть множества* A, B' — *часть множества* A'. *Предположим, что* $\mathcal{S}$ (соответственно $\mathcal{S}'$) *индуцирует на* B (соответственно B') *структуру рода* Σ. *Тогда, если* f *есть морфизм множества* A *в* A', *такой, что* $f(B)\subset B'$, *отображение* g *множества* B *в* B', *совпадающее на* B *с* f, *также является морфизмом* (*относительно структур, индуцированных структурами* $\mathcal{S}$ *и* $\mathcal{S}'$).

В самом деле, пусть j (соответственно j') — каноническая инъекция множества B (соответственно B') в A (соответственно A'). По определению $f\circ j = j'\circ g$; так как f и j — морфизмы, то же, в силу (MO_{II}), верно и для $f\circ j$; но тогда, поскольку $j'\circ g$ — морфизм, то же, по определению индуцированной структуры, верно и для g.

III. *Произведение структур.* Пусть $(A_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство множеств, и для каждого множества A_ι пусть $\mathcal{S}_\iota$ — структура рода Σ; пусть $E = \prod_{\iota\in I} A_\iota$ — *произведение* семейства $(A_\iota)_{\iota\in I}$ (гл. II, § 5), и пусть pr_ι — проекция множества E на A_ι.

Произведением структур $\mathcal{S}_\iota$ называется структура (если она существует), начальная относительно семейства $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, pr_\iota)_{\iota\in I}$.

Семейство структур порядка всегда обладает структурой-произведением, однако это не верно для семейства структур совершенного порядка. °Семейство структур группы всегда обладает структурой-произведением, но это не верно для семейства структур тела. Семейство топологий всегда обладает структурой-произведением, но это не верно для семейства топологий локально компактного пространства. Относительно этого последнего рода структуры заметим, что на всяком произведении конечного семейства локально компактных пространств имеется структура-произведение того же рода, но на произведении *бесконечного* семейства таких пространств — не всегда (см. „Общая топология", гл. I, § 10).$_\circ$

Критерий CST10 дает для структур-произведений *критерий ассоциативности*:

CST13. *Пусть* $(A_\iota)_{\iota\in I}$ — *семейство множеств и для каждого* $\iota\in I$ *пусть* $\mathcal{S}_\iota$ — *структура рода* Σ *на* A_ι. *Пусть* $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ — *разбиение множества* I. *Предположим, что для каждого частичного произведения* $B_\lambda = \prod_{\iota\in J_\lambda} A_\iota$ *семейство* $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota\in J_\lambda}$ *обладает структурой-произведением* $\mathcal{S}'_\lambda$. *Тогда, для того чтобы семейство* $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota\in I}$ *обладало структурой-произведением* $\mathcal{S}$, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* $(\mathcal{S}'_\lambda)_{\lambda\in L}$ *обладало структурой-*

произведением $\mathscr{S}'$, *и каноническое отображение множества* $E = \prod_{\iota \in I} A_\iota$, *наделенного структурой* $\mathscr{S}$, *на множество* $F = \prod_{\lambda \in L} B_\lambda$, *наделенное структурой* $\mathscr{S}'$ (гл. II, § 5, n°5), *есть изоморфизм*.

Еще одно применение критерия CST10 дает следующий критерий, относящийся к структурам, индуцированным структурой-произведением:

CST14. *Пусть* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств и для каждого* $\iota \in I$ *пусть* $\mathscr{S}_\iota$ — *структура рода* Σ *на* A_ι. *Для каждого* $\iota \in I$ *пусть* B_ι — *подмножество множества* A_ι. *Предположим, что каждое* $\mathscr{S}_\iota$ *индуцирует на* B_ι *структуру* $\mathscr{S}'_\iota$ *и что на произведении* $E = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ *существует структура* $\mathscr{S}_0$ — *произведение семейства* $(\mathscr{S}_\iota)$. *При этих условиях следующие предложения эквивалентны:*

а) *на множестве* $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota \subset E$ *существует структура* $\mathscr{S}$, *индуцированная структурой* $\mathscr{S}_0$;

б) *на множестве* B *существует структура* $\mathscr{S}'$ — *произведение семейства структур* $(\mathscr{S}'_\iota)$.

Кроме того, эти высказывания влекут, что $\mathscr{S} = \mathscr{S}'$.

В самом деле, пусть j_ι — каноническая инъекция множества B_ι в A_ι, j — каноническая инъекция множества B в E, p_ι — проекция множества E на A_ι, p'_ι — проекция множества B на B_ι; имеем $p_\iota \circ j = j_\iota \circ p'_\iota$ для всякого $\iota \in I$. В силу CST10, $\mathscr{S}$ есть структура, начальная относительно семейства $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, p_\iota \circ j)_{\iota \in I}$, и $\mathscr{S}'$ есть структура, начальная относительно семейства $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, j_\iota \circ p'_\iota)_{\iota \in I}$, откуда и вытекает критерий.

Понятия полного прообраза и произведения структур связаны следующим критерием:

CST15. *Пусть* $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств и для каждого* $\iota \in I$ *пусть* $\mathscr{S}_\iota$ — *структура рода* Σ *на* A_ι, *а* f_ι — *отображение множества* E *в* A_ι. *Предположим, что на множестве-произведении* $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ *существует произведение* $\mathscr{S}$ *структур семейства* $(\mathscr{S}_\iota)$. *Тогда, для того чтобы существовала структура, начальная относительно семейства* $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал полный прообраз структуры* $\mathscr{S}$ *относительно отображения* $x \to f(x) = (f_\iota(x))$ *множества* E *в* A, *и эти две структуры тождественны.*

Так как $f_\iota = \mathrm{pr}_\iota \circ f$, этот критерий есть частный случай критерия CST10.

Замечание. Пусть $(\mathscr{S}_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство структур рода Σ на *одном и том же* множестве A; обозначим через A_λ множество A, наделенное структурой $\mathscr{S}_\lambda$, а через I_λ — тождественное отображение множества A в A_λ. Пусть B есть множество-произведение $A^L = \prod_{\lambda \in L} A_\lambda$, Δ — диагональ этого произведения (гл. II, § 5, n°3) и h — диагональное отображение множества A на Δ, так что $h(x)$ есть такой элемент $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$, что $x_\lambda = x$ для всякого $\lambda \in L$. Предположим, что на B существует произведение $\mathscr{S}'$ структур семейства $(\mathscr{S}_\lambda)$; так как h инъективно, критерий CST15 показывает, что для того, чтобы существовала структура $\mathscr{S}$, начальная относительно семейства $(A_\lambda, \mathscr{S}_\lambda, I_\lambda)_{\lambda \in L}$, необходимо и достаточно, чтобы на Δ существовала структура $\mathscr{S}''$, индуцированная структурой $\mathscr{S}'$; $\mathscr{S}''$ получается тогда переносом структуры $\mathscr{S}$ посредством h. В частности, когда все структуры $\mathscr{S}_\lambda$ тождественны, h есть *изоморфизм* множества A (наделенного этой структурой) на Δ.

Имеем также следующий критерий:

CST16. *Пусть* $(A_\iota)_{\iota \in I}$, $(B_\iota)_{\iota \in I}$ — *два семейства множеств с одним и тем же множеством индексов. Для всякого* $\iota \in I$ *пусть* $\mathscr{S}_\iota$ — *структура рода* Σ *на* A_ι, $\mathscr{S}'_\iota$ — *структура рода* Σ *на* B_ι. *Предположим, что на* $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ (соответственно $B = \prod_{\iota \in I} B_\iota$) *существует произведение* $\mathscr{S}$ (соответственно $\mathscr{S}'$) *структур семейства* $(\mathscr{S}_\iota)$ (соответственно $(\mathscr{S}'_\iota)$). *Наконец, для всякого* $\iota \in I$ *пусть* f_ι — *морфизм множества* A_ι *в* B_ι; *тогда отображение* $f = (f_\iota)_{\iota \in I}$ *есть морфизм множества* A *в* B.

В самом деле, пусть p_ι (соответственно q_ι) — проекция множества A на A_ι (соответственно множества B на B_ι); имеем $q_\iota \circ f = f_\iota \circ p_\iota$. Так как f_ι и p_ι — морфизмы (критерий CST9), то же, в силу (MO_{II}), верно и для $f_\iota \circ p_\iota$; таким образом, вследствие условия (IN), f есть морфизм.

Замечание. Для большинства обычных структур условие, сформулированное в CST16, является не только достаточным, но также и необходимым для того, чтобы f было морфизмом (ср. упр. 7). Так обстоит дело, в частности, при следующих условиях (которые выполняются, например, когда Σ — род структуры порядка, или род структуры группы, или род топологической структуры, и т. д.; ср. упр. 8).

Существует семейство $(a_\iota)_{\iota \in I}$, такое, что $a_\iota \in A_\iota$ для всякого $\iota \in I$, и такое, что если положить $r_\iota(x_\iota) = (y_\varkappa)$ с $y_\iota = x_\iota$, $y_\varkappa = a_\varkappa$ для $\varkappa \neq \iota$, то каждое из отображений r_ι будет *морфизмом* множества A_ι в A. В самом деле, если $f = (f_\iota)$ есть морфизм множества A в B, то для всякого $\iota \in I$ можно написать $f_\iota = q_\iota \circ f \circ r_\iota$ и применить (MO_{II}).

Заметим, что r_ι является морфизмом, если выполняется следующее условие:

а) для всякого множества E, наделенного структурой рода Σ, постоянное отображение $z \to a_\iota$ есть морфизм множества E в A_ι.

В самом деле, тогда для всякого $\varkappa \in I$ $p_\varkappa \circ r_\iota$ является морфизмом множества A_ι в $A_\varkappa$, потому что это отображение для $\varkappa = \iota$ есть тождество, а для $\varkappa \neq \iota$ есть постоянное отображение $z \to a_\varkappa$; таким образом, по определению произведения структур r_ι является морфизмом множества A_ι в A.

Примеры, приведенные выше, удовлетворяют не только условию а), но также и условию:

б) на каждом множестве $A'_\iota = A_\iota \times \prod_{\varkappa \neq \iota} \{a_\varkappa\}$ структура $\mathcal{S}$ индуцирует структуру рода Σ.

Пусть p'_ι — сужение отображения p_ι на A'_ι; если условия а) и б) выполнены, p'_ι есть *изоморфизм* множества A'_ι на A_ι. В самом деле, так как $p'_\iota = p_\iota \circ j_\iota$, где j_ι — каноническая инъекция множества A'_ι в A, p'_ι, в силу (MO_{II}), есть морфизм. С другой стороны, $r_\iota = j_\iota \circ \overset{-1}{p'_\iota}$; таким образом, $\overset{-1}{p'_\iota}$, по определению индуцированной структуры, есть морфизм множества A_ι в A'_ι.

Имеем, наконец, следующий во многих случаях характеризующий морфизмы критерий:

CST17. *Пусть* A *и* B — *два множества, наделенные структурами* $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$ *одного и того же рода* Σ. *Предположим, что на* $A \times B$ *существует структура* $\mathcal{S}_{A \times B}$ — *произведение структуры* $\mathcal{S}_A$ *и структуры* $\mathcal{S}_B$. *Пусть* f — *отображение множества* A *в* B, F — *его график*, π — *биективное отображение* $x \to (x, f(x))$ *множества* A *на* F. *Для того чтобы* f *было морфизмом множества* A *в* B, *необходимо и достаточно, чтобы на* F *существовала структура рода* Σ, *индуцированная структурой* $\mathcal{S}_{A \times B}$, *и чтобы* π *было изоморфизмом множества* A *на множество* F, *наделенное этой структурой.*

Условие достаточно; в самом деле, если j — каноническая инъекция множества F в $A \times B$, то можно написать $f = pr_2 \circ j \circ \pi$ и f тогда по предположению является композицией трех морфизмов.

Покажем, что условие необходимо; обозначим через $\mathcal{S}_F$ структуру рода Σ, полученную переносом структуры $\mathcal{S}_A$ посредством биекции π (§ 1, n° 5); все сводится к тому, чтобы доказать, что $\mathcal{S}_F$ индуцируется на F структурой $\mathcal{S}_{A \times B}$. Для этого заметим сначала, что j есть морфизм множества F в $A \times B$; в самом деле, по определению структуры $\mathcal{S}_F$ достаточно доказать, что $j \circ \pi$ есть морфизм множества A в $A \times B$; но $j \circ \pi$ есть не что иное, как отображение $x \to (x, f(x))$ множества A в $A \times B$, которое является морфизмом в силу предположения об f и определения произведения структур. Остается показать, что если E есть множество, наделенное структурой рода Σ, g — отображение множества E в F, такое, что $f \circ g$ — морфизм множества E в $A \times B$, то g есть морфизм, или, что сводится к тому же, что $g_1 = \overset{-1}{\pi} \circ g$ есть морфизм множества E в A; но так как $g_1 = pr_1 \circ (j \circ g)$, это вытекает из предположения и определения произведения структур.

5. *Финальные структуры*

Рассмотрим семейство $(A_\iota)_{\iota \in I}$ множеств, каждое из которых наделено структурой $\mathcal{S}_\iota$ рода Σ. Пусть, с другой стороны, E — множество и для каждого $\iota \in I$ пусть g_ι — отображение *множества* A_ι *в* E. Структура $\mathcal{F}$ рода Σ на E называется структурой, финальной для семейства $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$, если она обладает свойством:

(FI). Каковы бы ни были множество E′, структура $\mathcal{S}'$ рода Σ на E′ и отображение f *множества* E *в* E′, соотношение

„f есть морфизм множества E в E′"

эквивалентно соотношению

„каково бы ни было $\iota \in I$, отображение $f \circ g_\iota$ есть морфизм множества A_ι в E′".

CST18. *Если на* E *существует структура, финальная для семейства* $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$, *она является наиболее тонкой из структур рода* Σ *на* E, *для которых каждое из отображений* g_ι *есть морфизм, и, следовательно, единственной.*

В самом деле, пусть $\mathcal{F}$ — финальная структура на E и $\mathcal{S}$ — структура рода Σ на E, для которой каждое из g_ι есть морфизм. Обозначив через ι тождественное отображение множества E, наделенного структурой $\mathcal{F}$, на множество E, наделенное структурой $\mathcal{S}$, можем также сказать, что $\iota \circ g_\iota$ есть морфизм для всякого $\iota \in I$; условие (FI) показывает, что ι — морфизм, а это означает (n° 2), что $\mathcal{S}$ *грубее*, чем $\mathcal{F}$. С другой стороны, применив (FI) к случаю, когда f — тождественное отображение множества E (наделенного структурой $\mathcal{F}$) на себя, видим (в силу (MO_{III})), что каждое из g_ι есть морфизм множества A_ι в E, а это и доказывает критерий.

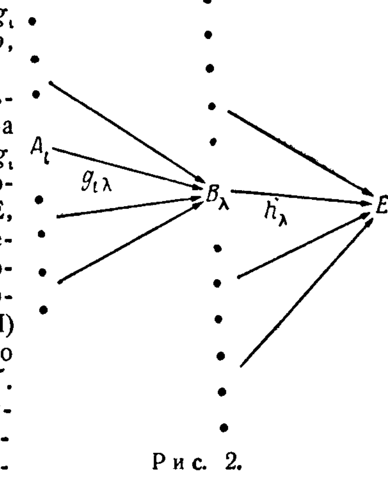


Рис. 2.

Может случиться, что существует структура рода Σ на E, являющаяся самой тонкой из всех структур рода Σ, для которых все g_ι — морфизмы, но что эта структура не является структурой, финальной относительно $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)$ (упр. 6).

Имеем следующий *критерий транзитивности*:

CST19. *Пусть* E — *множество*, $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — *семейство множеств и для каждого* $\iota \in I$ *пусть* $\mathcal{S}_\iota$ — *структура рода* Σ *на* A_ι. *Пусть* $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — *разбиение множества* I, *и пусть* $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ — *семейство*

множеств с множеством индексов L. *Наконец, для всякого* $\lambda \in L$ *пусть* h_λ — *отображение множества* B_λ *в* E; *для всякого* $\lambda \in L$ *и всякого* $\iota \in J_\lambda$ *пусть* $g_{\iota\lambda}$ — *отображение множества* A_ι *в* B_λ; *положим тогда* $f_\iota = h_\lambda \circ g_{\iota\lambda}$ (рис. 2). *Предположим, что для всякого* $\lambda \in L$ *на* B_λ *существует структура* $\mathscr{S}'_\lambda$, *финальная относительно семейства* $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, g_{\iota\lambda})_{\iota \in J_\lambda}$. *При этих условиях следующие предложения эквивалентны*:

а) *на* E *существует структура* $\mathscr{T}$, *финальная относительно семейства* $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$;

б) *на* E *существует структура* $\mathscr{T}'$, *финальная относительно семейства* $(B_\lambda, \mathscr{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Кроме того, эти высказывания влекут, что $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.

В самом деле, пусть F — множество, наделенное структурой рода Σ, u — отображение E в F. По определению соотношение

„$u \circ h_\lambda$ есть морфизм множества B_λ в F"

эквивалентно соотношению

„каково бы ни было $\iota \in h_\lambda$, $u \circ h_\lambda \circ g_{\iota\lambda} = u \circ f_\lambda$ есть морфизм множества A_ι в F".

Соотношение

„каково бы ни было $\lambda \in L$, $u \circ h_\lambda$ есть морфизм множества B_λ в F" (3)

эквивалентно, таким образом, соотношению

„каково бы ни было $\iota \in I$, $u \circ f_\iota$ есть морфизм множества A_ι в F". (4)

Но утверждение, что $\mathscr{T}'$ — структура, финальная относительно семейства $(B_\lambda, \mathscr{S}'_\lambda, h_\lambda)_{\lambda \in L}$, означает, что соотношение (3) эквивалентно соотношению

„u есть морфизм множества E (наделенного структурой $\mathscr{T}'$) в множество F",

а утверждение, что $\mathscr{T}$ — структура, финальная относительно семейства $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, означает, что соотношение (4) эквивалентно соотношению

„u есть морфизм множества E (наделенного структурой $\mathscr{T}$) в множество F";

отсюда, принимая во внимание свойство единственности финальной структуры, и следует критерий.

6. Примеры финальных структур

I. *Прямой образ структуры*. Если I есть множество из одного элемента, структура, финальная относительно единственной тройки (A, $\mathscr{S}$, f), называется (когда она существует) *прямым образом структуры* $\mathscr{S}$ *при отображении* f.

II. *Факторструктура*. Пусть A — множество, наделенное структурой $\mathscr{S}$ рода Σ, R — соотношение эквивалентности в A и пусть φ — каноническое отображение множества A на фактормножество E = A/R (гл. II, § 6, n° 2). *Факторструктурой* структуры $\mathscr{S}$ по соотношению R называется прямой образ (если он существует) структуры $\mathscr{S}$ при отображении φ.

° Вообще говоря, структура порядка или алгебраическая структура не обладают факторструктурой относительно произвольного соотношения эквивалентности (см. гл. III, § 1, упр. 2). Напротив, топология всегда обладает факторструктурой относительно любого соотношения эквивалентности, но это не имеет места для структуры отделимого топологического пространства. ₀

Пусть A, B — два множества, наделенные соответственно структурами $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ рода Σ, и пусть f — морфизм множества A в B. Пусть R — соотношение эквивалентности $f(x) = f(y)$, φ — каноническое отображение множества A на A/R и j — каноническая инъекция множества $f(A)$ в B. Предположим, что $\mathscr{S}$ обладает факторструктурой $\mathscr{S}_0$ по соотношению R и что $\mathscr{S}'$ индуцирует на $f(A)$ структуру $\mathscr{S}'_0$. Тогда в *каноническом разложении* $f = j \circ g \circ \varphi$ отображения f (гл. II, § 6, n° 5) биекция g множества A/R на $f(A)$, ассоциированная с f, есть *морфизм* (но не обязательно изоморфизм), когда множество A/R наделено структурой $\mathscr{S}_0$, а $f(A)$ — структурой $\mathscr{S}'_0$. В самом деле, $j \circ g$ есть морфизм множества A/R в B, по определению факторструктуры, а g есть морфизм множества A/R на $f(A)$, по определению индуцированной структуры.

CST20. *Пусть* A, A′ — *два множества, наделенные структурами* $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ *рода* Σ, R — *соотношение эквивалентности в* A, R′ — *соотношение эквивалентности в* A′. *Предположим, что существует факторструктура* $\mathscr{S}_0$ *структуры* $\mathscr{S}$ *по соотношению* R *и факторструктура* $\mathscr{S}'_0$ *структуры* $\mathscr{S}'$ *по соотношению* R′. *Тогда, если* f *есть морфизм множества* A *в* A′, *совместимый с соотношениями* R *и* R′, *и* g — *отображение, полученное переходом к фактормножествам, то* g *есть морфизм множества* A/R *в* A′/R′.

В самом деле, если φ — каноническое отображение множества A на A/R, φ' — каноническое отображение множества A′ на A′/R′, то $g \circ \varphi = \varphi' \circ f$; так как φ' и f — морфизмы, то же, в силу (MO_{II}), верно и для $\varphi' \circ f$; но тогда, поскольку $g \circ \varphi$ — морфизм, то же, по определению факторструктуры, верно и для g.

Критерий транзитивности CST19 дает, в частности, следующий критерий:

CST21. *Пусть* A — *множество, наделенное структурой* $\mathscr{S}$ *рода* Σ, R — *такое соотношение эквивалентности в* A, *что на множестве* A/R *существует факторструктура* $\mathscr{S}'$ *структуры* $\mathscr{S}$

по R. *Пусть* S — *соотношение эквивалентности в* A, *более крупное, чем* R, *и пусть* S/R — *соотношение эквивалентности в* A/R, *являющееся факторсоотношением соотношения* S *по* R (гл. II, § 6, п° 7). *Для того чтобы на* (A/R)/(S/R) *существовала факторструктура* $\mathcal{S}''$ *структуры* $\mathcal{S}'$ *по* S/R, *необходимо и достаточно, чтобы на* A/S *существовала факторструктура* $\mathcal{S}_0$ *структуры* $\mathcal{S}$ *по* S *и чтобы каноническое отображение множества* A/S (*наделенного структурой* $\mathcal{S}_0$) *на множество* (A/R)/(S/R) (*наделенное структурой* $\mathcal{S}''$) *было изоморфизмом.*

В самом деле, пусть φ — каноническое отображение множества A на A/R, ψ — каноническое отображение множества A/R на (A/R)/(S/R). В силу CST19, утверждение, что $\mathcal{S}''$ — факторструктура структуры $\mathcal{S}'$ по S/R, эквивалентно утверждению, что $\mathcal{S}''$ — структура, финальная относительно тройки (A, $\mathcal{S}$, $\psi\circ\varphi$). Критерий вытекает теперь из того, что соотношение $\psi(\varphi(x))=\psi(\varphi(y))$ эквивалентно соотношению S.

Замечание. Пусть A — множество, наделенное структурой $\mathcal{S}$ рода Σ, R — такое соотношение эквивалентности в A, что на E = A/R существует факторструктура $\mathcal{S}'$ структуры $\mathcal{S}$ по R. Пусть φ — каноническое отображение множества A на E; вообще говоря, не существует *иссечения* s, ассоциированного с φ (гл. II, § 3, п° 8), которое было бы *морфизмом* множества E в A. Предположим, что такое иссечение s существует и, кроме того, что существует структура $\mathcal{S}''$, индуцированная на s(E) структурой $\mathcal{S}$; тогда, если через j обозначить каноническую инъекцию множества s(E) в A и положить $s=j\circ f$, взаимно однозначное отображение f есть *изоморфизм* множества E на s(E). В самом деле, f есть морфизм по определению индуцированной структуры, а $g=\varphi\circ j$ есть морфизм множества s(E) на E в силу (MO_{II}); так как $g\circ f$ — тождественное отображение множества E и $f\circ g$ — тождественное отображение множества s(E), заключение вытекает из критерия CST8.

Упражнения

1) Пусть $\mathcal{T}$ — теория, более сильная, чем теория множеств, в которой **P** и $\mathbf{P}^-$ — субстантивные знаки веса 1, **X** и $\mathbf{X}^-$ — субстантивные знаки веса 2 (гл. I, § 1, п° 3). Для всякого знакосочетания A из этих знаков и n различных букв $x_1, \ldots, x_n$ определим *цену* знакосочетания A следующим образом: каждая из букв x_i так же, как и знаки **P**, **X**, имеет цену 0, знаки $\mathbf{P}^-$, $\mathbf{X}^-$ имеют цену 1; цена знакосочетания A есть сумма °(в теле F_2)$_0$ цен входящих в него знаков (иначе говоря, она есть 0, если в нем *четное* число знаков, имеющих цену 1, и 1 — в противном случае).

Назовем *знаковым типом ступени* равновесное знакосочетание A (гл. I, приложение, п° 3) из вышеуказанных знаков, удовлетворяющее следующим условиям: 1° выражения, антецедентные к A (гл. I, приложение, п° 4), являются знаковыми типами ступени; 2° если A начинается со знака **X**, два антецедентных знакосочетания имеют цену 0, если же A начинается со знака $\mathbf{X}^-$, два антецедентных знакосочетания имеют цену 1.

Знаковый тип ступени называется *ковариантным*, если он имеет цену 0, и *контравариантным*, если он имеет цену 1. Если в знаковом типе ступени A заменить $\mathbf{P}^-$ и $\mathbf{X}^-$ на **P** и **X** соответственно, получится тип ступени A* (§ 1, упражнение); всякая реализация на n термах $E_1, \ldots, E_n$ типа ступени A называется *реализацией на* $E_1, \ldots, E_n$ *знакового типа ступени* A и обозначается A$(E_1, \ldots, E_n)$.

Пусть $E_1, \ldots, E_n, E_1', \ldots, E_n'$ — множества, f_i — отображение множества E_i в E_i' $(1\leqslant i\leqslant n)$. Показать, что каждому знаковому типу ступени S на $x_1, \ldots, x_n$ можно ассоциировать отображение $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ имеющее следующие свойства:

1° Если S ковариантен (соответственно контравариантен), $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ есть отображение множества $S(E_1, \ldots, E_n)$ в $S(E_1', \ldots, E_n')$ (соответственно множества $S(E_1', \ldots, E_n')$ в $S(E_1, \ldots, E_n)$).

2° Если S есть буква x_i, $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ есть f_i.

3° Если S есть **P**T (соответственно $\mathbf{P}^-$T) и если $g=\{f_1, \ldots, f_n\}^T$ есть отображение множества F в F′, то $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ есть распространение отображения g на множества подмножеств (соответственно обратное распространение отображения g на множества подмножеств[1])).

4° Если S есть **X**TU или $\mathbf{X}^-$TU, где T и U — антецедентные выражения, и если $\{f_1, \ldots, f_n\}^T$ есть отображение g множества F и F′ а $\{f_1, \ldots, f_n\}^U$ — отображение h множества G в G′, то $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ есть распространение $g\times h$, отображение множества F × G в F′ × G′.

Отображение $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ называется *знаковым каноническим распространением* отображений $f_1, \ldots, f_n$, соответствующим знаковому типу ступени S. Когда S есть тип ступени (иначе говоря, когда $\mathbf{P}^-$ и $\mathbf{X}^-$ не встречаются в S), знаковое каноническое распространение $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ равно $\langle f_1, \ldots, f_n\rangle^S$.

Показать, что если f_i есть отображение множества E_i в E_i', а f_i' — отображение множества E_i' в E_i'' $(1\leqslant i\leqslant n)$, то для ковариантного знакового типа ступени S

$$\{f_1'\circ f_1, \ldots, f_n'\circ f_n\}^S=\{f_1', \ldots, f_n'\}^S\circ\{f_1, \ldots, f_n\}^S,$$

а для контравариантного знакового типа ступени S

$$\{f_1'\circ f_1, \ldots, f_n'\circ f_n\}^S=\{f_1, \ldots, f_n\}^S\circ\{f_1', \ldots, f_n'\}^S.$$

Вывести из этого, что если f_i является биекцией множества E_i на E_i', а f_i' — обратной биекцией $(1\leqslant i\leqslant n)$, то $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ есть биекция и $\{f_1', \ldots, f_n'\}^S$ — обратная биекция. Кроме того, если S^* есть тип ступени (не знаковый), соответствующий знаковому типу ступени S, то $\{f_1, \ldots, f_n\}^S$ равно $\{f_1, \ldots, f_n\}^{S^*}$ или $\{f_1', \ldots, f_n'\}^{S^*}$, смотря по тому, ковариантен или контравариантен S.

2) Пусть S — знаковый тип ступени над $n+m$ буквами (упр. 1). Пусть Σ — род структуры, имеющей $x_1, \ldots, x_n$ в качестве основных множеств базы, $A_1, \ldots, A_m$ — в качестве вспомогательных множеств базы и с типовой характеристикой вида $s\in\mathfrak{P}(S(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m))$. Показать, что для этого рода структуры понятие σ-морфизма можно

[1]) Обратное распространение отображения определяется в сводке результатов (§ 2, п° 6). — *Прим. ред.*

определить следующим образом: когда даны n множеств $E_1, \ldots, E_n$, наделенные структурой U рода Σ, n множеств $E'_1, \ldots, E'_n$, наделенные структурой U′ рода Σ, и, для $1 \leqslant i \leqslant n$, отображение f_i множества E_i в E'_i, говорят, что $(f_1, \ldots, f_n)$ есть σ-морфизм, если отображения f_i удовлетворяют следующим условиям:

1° если S — ковариантный тип ступени

$$\{f_1, \ldots, f_n, I_1, \ldots, I_m\}^S \langle U \rangle \subset U'.$$

2° если S — контравариантный тип ступени

$$\{f_1, \ldots, f_n, I_1, \ldots, I_m\}^S \langle U' \rangle \subset U.$$

Показать, что, надлежащим образом выбирая цены, можно таким способом снова дать определение морфизмов для структур порядка, алгебраических структур и топологических структур.

3) Пусть A, B, C — три множества, наделенные структурами одного и того же рода Σ, f — *сюръективный* морфизм множества A в B, g — морфизм множества B в C. Показать, что если $g \circ f$ является изоморфизмом множества A на C, то g и f — изоморфизмы.

4) Пусть A, B, C, D — четыре множества, наделенные структурами одного и того же рода Σ, f — морфизм множества A в B, g — морфизм множества B в C, h — морфизм множества C в D. Показать, что если $g \circ f$ и $h \circ g$ — изоморфизмы, то f, g и h — изоморфизмы (см. гл. II, § 3, упр. 9).

5) Пусть A, B — два множества, наделенные структурами $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ одного и того же рода Σ. Пусть f — морфизм множества A в B, g — морфизм множества B в A. Пусть M (соответственно N) — множество элементов $x \in A$ (соответственно $y \in B$), таких, что $g(f(x)) = x$ (соответственно $f(g(y)) = y$). Предположим, что $\mathscr{S}$ (соответственно $\mathscr{S}'$) индуцирует на M (соответственно N) структуру рода Σ. Показать, что M и N, наделенные этими структурами, изоморфны.

6) Пусть Σ — род структуры с одним (основным) базисным множеством A, общая структура (V, H) которого имеет типовую характеристику

$$V \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A)) \text{ и } H \in \mathfrak{P}(A)$$

и аксиома которого есть (переносимое) соотношение

$$H \in V \text{ и } R\{V\},$$

где $R\{V\}$ обозначает аксиому рода топологической структуры (§ 1, n° 4, пример 3). Если A, A′ — два множества, наделенные соответственно структурами (V, H), (V′, H′) рода Σ, определим σ-морфизмы множества A в A′ как отображения f, непрерывные (для топологий VV′) и такие, что $f(H) \subset H'$. Показать, что это понятие σ-морфизма может быть определено методом упражнения 2. °Дать пример такого семейства $(\mathscr{S}_\lambda)$ структур рода Σ на множестве A, что существует верхняя грань этого семейства структур (в упорядоченном множестве структур рода Σ на A), но что эта верхняя грань не является структурой, начальной относительно семейства $(A_\lambda, \mathscr{S}_\lambda, I_\lambda)$, где A_λ обозначает множество A, наделенное структурой $\mathscr{S}_\lambda$, а I_λ — тождественное отображение множества A на A_λ. (Рассмотреть топологическое пространство A, в котором существует замкнутое множество, имеющее не пустую внутренность, отличное от своей внутренности и являющееся пересечением семейства открытых множеств.)$_\circ$

Пусть Θ — род структуры с той же типовой характеристикой, что и Σ, но аксиомой которого является соотношение

$$A - H \in V \text{ и } R\{V\}.$$

Определим морфизмы для этого рода структуры тем же условием, что и выше. °Дать пример такого семейства $(\mathscr{S}'_\lambda)$ структур рода Θ на множестве A, что существует нижняя грань этого семейства структур (в упорядоченном множестве структур рода Θ на A), но что эта нижняя грань не является структурой, финальной относительно семейства $(A'_\lambda, \mathscr{S}'_\lambda, I'_\lambda)$, где A'_λ обозначает множество A, наделенное структурой $\mathscr{S}'_\lambda$, а I'_λ — тождественное отображение множества A'_λ в A (тот же метод).$_\circ$

7) °Пусть Σ — род структуры, имеющий основное множество базы A, вспомогательное множество **R**, общую структуру, состоящую из двух букв V, φ с типовой характеристикой

$$V \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A)) \quad \text{и} \quad \varphi \in \mathfrak{P}(\mathbf{R} \times A),$$

и следующие аксиомы: 1° аксиому $R\{V\}$ рода топологической структуры (§ 1, n° 4, пример 3); 2° соотношение: „существует $a > 0$, такое, что φ является функциональным графиком непрерывного (относительно топологии V) инъективного отображения интервала $(0, a)$ в A". Если A, A′ — два множества, наделенные соответственно структурами (V, φ), (V', φ') рода Σ, определим σ-морфизмы множества A в A′ как непрерывные (относительно V, V′) отображения f, график F которых таков, что $F \circ \varphi \subset \varphi'$. Показать, что это понятие σ-морфизма может быть определено методом упражнения 2 и что на произведении двух множеств A_1, A_2, наделенных произвольными структурами рода Σ, существует структура-произведение. Дать пример, в котором прямой образ структуры-произведения из $A_1 \times A_2$ при первой проекции pr_1 не был бы структурой, заданной первоначально на A_1 (взять за A_1 пространство, гомеоморфное пространству **R**).$_\circ$

8) Пусть Σ — род структуры, имеющий одно (основное) базисное множество A, общую структуру (V, a, b), состоящую из трех букв с типовой характеристикой

$$V \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A)) \quad \text{и} \quad a \in A \quad \text{и} \quad b \in A,$$

и аксиома которого есть соотношение

$$R\{V\} \quad \text{и} \quad a \neq b,$$

где $R\{V\}$ — аксиома рода топологической структуры (§ 1, n° 4, пример 3). Если A, A′ — два множества, наделенные соответственно структурами (V, a, b), (V', a', b'), определим σ-морфизмы множества A в A′ как непрерывные (относительно V, V′) отображения f, такие, что $f(a) = a'$ и $f(b) = b'$. Показать, что, заменив Σ родом эквивалентной структуры, это понятие σ-морфизма можно получить методом упражнения 2. Показать, что для двух множеств A, B, наделенных структурами $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ рода Σ, на $A \times B$ существует структура-произведение и что прямой образ этой структуры при pr_1 (соответственно pr_2) есть $\mathscr{S}$ (соответственно $\mathscr{S}'$); °дать пример, в котором не существовало бы иссечения, ассоциированного с pr_1, являющегося σ-морфизмом множества A в $A \times B$ (взять за A связное пространство, за B — дискретное пространство).$_\circ$

°9) Пусть Σ — род структуры тела. Показать, что понятие σ-морфизма для этого рода структуры определяется, если взять в качестве морфизмов тела K в тело K′, во-первых, представления f тела K в K′ в смысле примера 2 n° 1 и, кроме того, отображение f_0 тела K в K′, такое, что $f_0(0) = 0$, $f_0(x) = 1$ для всякого $x \neq 0$ в K. Показать, что это понятие морфизма обладает следующими свойствами: для всякого тела K (произвольной характеристики) структура тела K

индуцирует на множестве $\{0, 1\}$ структуру тела (изоморфную структуре тела $\mathbf{F}_2$); кроме того, если R есть соотношение эквивалентности, классами эквивалентности которого являются $\{0\}$ и $K^* = K - \{0\}$, существует факторструктура (изоморфная структуре тела $\mathbf{F}_2$) структуры тела K по соотношению R_0.

°10) Пусть Σ — род структуры полного и архимедовски упорядоченного тела. Для всякого множества A, наделенного структурой рода Σ, пусть φ_A — единственный изоморфизм множества A на $\mathbf{R}$. Если A, B — два множества, наделенные структурами рода Σ, показать, что в качестве морфизмов множества A в B можно взять такие отображения f множества A в B, что $\varphi_B(f(x)) \geqslant \varphi_A(x)$ для всякого $x \in A$. Для этого понятия морфизма показать, что существуют биективные морфизмы, не являющиеся изоморфизмами, хотя род структуры Σ однозначен.°

11) Пусть Σ — род структуры (в теории $\mathcal{T}$), содержащий только одно множество базы; пусть $s \in F(x)$ — типовая характеристика, $R\{x, s\}$ — аксиома рода Σ. Обозначим через $A(x)$ множество структур рода Σ на x. Пусть $\sigma\{x, y, s, t\}$ — терм, удовлетворяющий условиям (MO_I), (MO_{II}) и следующему условию:

(MO'_{III}). Если в теории $\mathcal{T}'$, более сильной, чем $\mathcal{T}$, даны два множества E, E′, наделенные структурами $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ рода Σ, то для всякого изоморфизма f множества E на E′ $f \in \sigma\{E, E', \mathcal{S}, \mathcal{S}'\}$.

а) Пусть I_x — тождественное отображение множества x на себя. Показать, что соотношение $Q\{x, s, t\}$:

$$„s \in A(x) \text{ и } t \in A(x) \text{ и } I_x \in \sigma\{x, x, s, t\} \cap \sigma\{x, x, t, s\}“$$

есть соотношение эквивалентности между s и t в $A(x)$. Пусть $B(x)$ есть фактормножество $A(x)/Q$, φ_x — каноническое отображение множества $A(x)$ на $B(x)$. Предположим, что соотношение $s' \in B(x)$ переносимо (относительно условий, обеспечивающих это, см. приложение), и обозначим через Θ род структуры с типовой характеристикой $s' \in \mathfrak{P}(F(x))$ и с аксиомой $s' \in B(x)$.

б) Пусть $\bar{\sigma}\{x, y, s', t'\}$ есть множество отображений $f \in \mathcal{F}(x, y)$, удовлетворяющих следующему соотношению:

$$„s' \in B(x) \text{ и } t' \in B(y)$$

и существуют $s \in A(x)$ и $t \in A(y)$, такие, что

$$s' = \varphi_x(s) \text{ и } t' = \varphi_y(t) \text{ и } f \in \sigma\{x, y, s, t\}“.$$

Показать, что для рода структуры Θ терм $\bar{\sigma}$ удовлетворяет условиям (MO_I), (MO_{II}) и (MO_{III}) и что

$$\sigma\{x, y, s, t\} \subset \bar{\sigma}\{x, y, \varphi_x(s), \varphi_y(t)\}.$$

§ 3. Универсальные отображения

1. *Универсальные отображения и множества*

Пусть $\mathcal{T}$ — теория, более сильная, чем теория множеств, и пусть E — терм теории $\mathcal{T}$. Пусть Σ — род структуры в $\mathcal{T}$ [для простоты мы всегда предполагаем, что Σ определен на одном (основном) базисном множестве]; для краткости мы вместо „множество, наделенное структурой рода Σ“, будем говорить „Σ-множество“. Предположим, кроме того, что для рода Σ определено понятие σ-морфизма (§ 2, n° 1) (как и в § 2, мы будем вместо „σ-морфизм“ говорить „морфизм“). Наконец, пусть род Σ определен на базисном множестве x и имеет общую структуру s (§ 1, n° 4); предположим тогда, что в $\mathcal{T}_\Sigma$ определен терм $\alpha\{x, s\}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(QM_I). *Соотношение* $\alpha\{x, s\} \subset \mathcal{F}(E, x)$ *истинно в* $\mathcal{T}_\Sigma$.

(QM_{II}). *Если в теории* $\mathcal{T}'$, *более сильной, чем* $\mathcal{T}$, F, F′ — *два множества, наделенные структурами* $\mathcal{S}\mathcal{S}'$ *рода* Σ, *и если* f *есть морфизм множества* F *в* F′, *то соотношение* $\varphi \in \alpha\{F, \mathcal{S}\}$ *влечет* $f \circ \varphi \in \alpha\{F', \mathcal{S}'\}$.

Мы будем выражать соотношение $\varphi \in \alpha\{x, s\}$ словами: φ *есть* α-*отображение множества* E *в множество* x (*наделенное структурой* s).

Отправляясь от этого определения, мы будем называть Σ-множество F_E и α-отображение φ_E множества E в F_E *универсальными*, если выполняется следующее условие:

(AU). *Для всякого* α-*отображения* φ *множества* E *в* Σ-*множество* F *существует и единствен морфизм* f *множества* F_E *в* F, *такой, что* $\varphi = f \circ \varphi_E$.

В этом случае говорят также, что пара (F_E, φ_E) есть *решение проблемы универсального отображения* для E (относительно заданных Σ, σ и α).

Пусть (F'_E, φ'_E) и (F''_E, φ''_E) — два решения проблемы универсального отображения для E. Условие (AU) показывает, что тогда существуют единственный морфизм f_1 множества F'_E в F''_E и единственный морфизм f_2 множества F''_E в F'_E, такие, что $\varphi''_E = f_1 \circ \varphi'_E$ и $\varphi'_E = f_2 \circ \varphi''_E$.

Таким образом,

$$\varphi'_E = f_2 \circ f_1 \circ \varphi'_E \quad \text{и} \quad \varphi''_E = f_1 \circ f_2 \circ \varphi''_E.$$

Применив (AU) к случаю $F = F'_E$ и $\varphi = \varphi'_E$, выводим из этого, что $f_2 \circ f_1$ есть тождественное отображение множества F'_E; аналогично $f_1 \circ f_2$ — тождественное отображение множества F''_E. Следовательно (§ 2, n° 1, критерий CST8), f_1 есть *изоморфизм* множества F'_E на F''_E, а f_2 — обратный к нему изоморфизм. Этот результат выражают также словами: решение проблемы универсального отображения для E *единственно с точностью до единственного изоморфизма*.

Чтобы установить, что пара (F_E, φ_E) есть решение проблемы универсального отображения для E, часто удобно проверить следующие два условия:

(AU'_I). *Для всякого Σ-множества F и всякого α-отображения φ множества E в F существует морфизм f множества F_E в F, такой, что $\varphi = f \circ \varphi_E$.*

(AU'_{II}). *Для всякого Σ-множества F два морфизма множества F_E в F, совпадающие на $\varphi_E(E)$, равны.*

В самом деле, если эти условия выполняются, морфизм f, существование которого обеспечено условием (AU'_I), единствен в силу (AU'_{II}). Обратно, ясно, что (AU) влечет (AU'_I); кроме того, если f и f' — два морфизма множества F_E в F, совпадающие на $\varphi_E(E)$, то $f \circ \varphi_E = f' \circ \varphi_E$, откуда, применяя (AU) к α-отображению $f \circ \varphi_E$, $f = f'$.

2. Существование универсальных отображений

Проблема универсального отображения не обязательно имеет решение (упр. 1). Однако мы сейчас покажем, что следующие условия влекут существование решения:

(CU_I). *На всяком произведении семейства Σ-множеств существует структура-произведение рода Σ (§ 2, п° 4).*

(CU_{II}). *Пусть $(F_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство Σ-множества и для всякого $\iota \in I$ пусть φ_ι — α-отображение множества E в F_ι. Тогда отображение $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ множества E в множество $\prod_{\iota \in I} F_\iota$ (наделенное структурой-произведением) есть α-отображение.*

Мы будем говорить, что часть G от Σ-множества F является *Σ-допустимой*, если структура множества F индуцирует на G структуру рода Σ (§ 2, п° 4).

(CU_{III}). *Существует кардинальное число $\mathfrak{a}$, обладающее следующими свойствами: для всякого Σ-множества F и всякого α-отображения φ множества E в F существует Σ-допустимое подмножество G множества F, содержащее $\varphi(E)$, с кардинальным числом $\leqslant \mathfrak{a}$ и такое, что, во-первых, отображение множества E в G с тем же графиком, что и φ, есть α-отображение и, во-вторых, два морфизма множества G в произвольное Σ-множество, совпадающие на $\varphi(E)$, равны.*

CST22. *Если условия (CU_I) — (CU_{III}) выполнены, проблема универсального отображения для E обладает решением.*

Покажем сначала, что если существует пара (F_E, φ_E), удовлетворяющая условию (AU'_I), то существует также и решение проблемы универсального отображения для E. В самом деле, в силу (CU_{III}) существует Σ-допустимое подмножество F'_E множества F_E, содержащее $\varphi_E(E)$, такое, что, во-первых, отображение φ'_E множества E в F'_E с тем же графиком, что и φ_E, является α-отображением и, во-вторых, два морфизма множества F'_E в произвольное Σ-множество, совпадающие на $\varphi_E(E)$, равны. Пусть j — каноническая инъекция множества F'_E в F_E, тогда $\varphi_E = j \circ \varphi'_E$; для всякого морфизма f множества F_E в Σ-множество F, $f \circ j$ есть морфизм множества F'_E в F и $f \circ \varphi_E = (f \circ j) \circ \varphi'_E$. Теперь ясно, что (F'_E, φ'_E) удовлетворяет условиям (AU'_I), (AU'_{II}).

Остается, таким образом, доказать существование пары (F_E, φ_E), удовлетворяющей условию (AU'_I). Пусть $s \in S(x)$ — типовая характеристика рода структуры Σ; рассмотрим подмножество L произведения

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{a}) \times S(\mathfrak{a}) \times \mathfrak{P}(E \times \mathfrak{a}),$$

образованное тройками $\lambda = (X, V, P)$ со следующим свойством: „V есть структура рода Σ на $X \subset \mathfrak{a}$ и P есть график некоторого α-отображения множества E в множество X (наделенное структурой V)" (заметим, что $S(X) \subset S(\mathfrak{a})$, как легко видеть, рассуждая последовательно по длине схемы конструкции ступени S). Для всякого $\lambda = (X, V, P) \in L$ обозначим через X_λ множество X, наделенное структурой V, а через φ_λ — отображение множества E в X_λ с графиком P. Пусть теперь F_E есть Σ-множество, произведение множеств X_λ (существует в силу (CU_I)), а φ_E — отображение $x \to (\varphi_\lambda(x))$ множества E в F_E, являющееся α-отображением в силу (CU_{II}). Покажем, что (F_E, φ_E) удовлетворяет условию (AU'_I). В самом деле, если даны α-отображение φ множества E в Σ-множество F, пусть G — часть множества F, удовлетворяющая условиям, сформулированным в (CU_{III}); пусть j — каноническая инъекция множества G в F и ψ — отображение множества E в G с тем же графиком, что и φ, так что $\varphi = j \circ \psi$. Из (CU_{III}) вытекает, что ψ — α-отображение множества E в G. Так как $\mathrm{Card}(G) \leqslant \mathfrak{a}$, существует часть G' множества $\mathfrak{a}$, равномощная множеству G. Пусть g — биекция множества G на G'; если структуру рода Σ множества G перенести посредством g, найдется по определению такое $\lambda \in L$, что G' (наделенное этой перенесенной структурой) равно множеству X_λ и $g \circ \psi = \varphi_\lambda$. Тогда $f = j \circ g^{-1} \circ pr_\lambda$ есть морфизм множества F_E в F, такой, что $\varphi = f \circ \varphi_E$, что заканчивает доказательство.

CST23. *Пусть (F_E, φ_E) — решение проблемы универсального отображения для E. Для того чтобы φ_E было инъекцией множества E в F_E, необходимо и достаточно, чтобы для всякой пары различных элементов x, y из E существовало такое α-отображение φ множества E в некоторое Σ-множество F, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.*

Так как φ_E есть α-отображение, критерий тотчас же вытекает из определений.

В этом случае говорят также, что α-отображения *отделяют* элементы множества E. В языке тогда обычно не делают никакой

разницы между элементами множества E и их образами при φ_E (ср. приложение, n° 5); при этом соглашении, если (F_E, φ_E) есть решение проблемы универсального отображения и если условие (CU_{III}) выполняется, всякое α-отображение множества E в Σ-множество F *продолжается, и притом однозначно, до морфизма множества* F_E *в* F.

3. Примеры универсальных отображений

°Нижеследующие примеры будут большей частью детально обсуждены на дальнейших страницах этого сочинения.

I. *Свободные алгебраические структуры.* Пусть E — некоторое множество, а Σ — некоторый род алгебраической структуры (определенный при помощи одного или нескольких законов композиции: см. „Алгебра", гл. I); в качестве морфизмов возьмем *представления* рассматриваемого рода Σ, а α-отображениями будут *произвольные* отображения множества E в Σ-множество (иначе говоря, $\alpha \{ x, s \} = \mathscr{F}(E, x)$). Все обычные рода алгебраической структуры удовлетворяют условию (CU_{III}); за исключением структуры тела, они удовлетворяют также условию (CU_I), а (CU_{II}) является здесь тривиальным следствием условия (CU_I).

Поскольку обычно существуют структуры рода Σ, определенные на множествах, имеющих не меньше двух элементов, α-отображения отделяют элементы множества E и E рассматривается, таким образом, погруженным в F_E. F_E называется ***свободным*** Σ-множеством, порожденным множеством E; так, например, в Алгебре говорят о *свободном моноиде* („Алгебра", гл. I, § 1, n° 3), *свободной группе* („Алгебра", гл. I, § 6, упр. 19), *свободном модуле* („Алгебра", гл. II и VII), *свободной алгебре* („Алгебра", гл. III).

II. *Кольца и поля дробей.* Пусть E — коммутативное кольцо с единичным элементом, а S — мультипликативное подмножество множества E, не содержащее 0. Возьмем в качестве Σ род структуры коммутативного кольца, имеющего единичный элемент, в качестве морфизмов — гомоморфизмы (относительно структуры кольца), преобразующие единичный элемент в единичный элемент. В качестве α-отображений возьмем такие гомоморфизмы φ множества E в обладающее единичным элементом коммутативное кольцо A, что $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(S)$ содержит только элементы, *обратимые* в A. Немедленно проверяются условия (QM_{II}), (CU_I) — (CU_{III}) (с $\mathfrak{a} = \text{Card}(E)\,\text{Card}(\mathbf{N})$); проблема универсального отображения, таким образом, всегда имеет решение (F_E, φ_E), но, вообще говоря, φ_E не инъективно. Чаще всего E является областью целостности; в этом случае φ_E инъективно. Если, кроме того, взять $S = E - \{0\}$, то F_E есть поле, называемое *полем дробей* кольца E („Алгебра", гл. I, § 9, n° 4, предложение 4; см. Вторая часть, „Коммутативная алгебра".

III. *Тензорное произведение двух модулей.* Пусть E есть произведение $A \times B$ двух унитарных модулей над коммутативным кольцом C, имеющим единичный элемент. Возьмем в качестве Σ род структуры унитарного C-модуля, в качестве морфизмов — линейные отображения, в качестве α-отображений — ***билинейные*** отображения множества $A \times B$ в C-модуль. Условие (QM_{II}) выполняется, так же как и (CU_I) — (CU_{III}) (с $\mathfrak{a} = \text{Card}(E)\,\text{Card}(C)\,\text{Card}(\mathbf{N})$). Универсальный C-модуль F_E, соответствующий паре (A, B), называется *тензорным произведением* множества A на B и обозначается $A \otimes B$; универсальное отображение φ_E обозначается $(x, y) \to x \otimes y$; оно билинейно, но, вообще говоря, не инъективно (см. „Алгебра", гл. III, § 1).

IV. *Расширение кольца операторов над модулем.* Пусть A — коммутативное кольцо с единичным элементом, B — подкольцо кольца A, содержащее единичный элемент кольца A, E — унитарный B-модуль. Род Σ есть род структуры унитарного A-модуля, морфизмы суть A-*линейные* отображения, α-отображения суть B-*линейные* отображения множества E в унитарный A-модуль. Говорят, что универсальный A-модуль F_E, соответствующий B-модулю E, получен путем *расширения до* A кольца операторов B над E („Алгебра", гл. III, § 2).

V. *Пополнение ⟨complétion⟩ равномерного пространства.* Пусть E — равномерное пространство; возьмем в качестве Σ род структуры отделимого и полного равномерного пространства, в качестве морфизмов — равномерно непрерывные отображения, в качестве α-отображений — равномерно непрерывные отображения множества E в отделимое и полное равномерное пространство. Σ-допустимыми частями отделимого и полного равномерного пространства являются здесь части, *замкнутые* относительно рассматриваемой топологии всего пространства; и условия (QM_{II}) и (CU_I) — (CU_{III}) выполняются, если взять $\mathfrak{a} = 2^{2^{\text{Card}(E)}}$. Отделимое и полное равномерное пространство F_E есть не что иное (с точностью до изоморфизма), как *пополнение* ⟨complété⟩ отделимого равномерного пространства, ассоциированное с E („Общая топология", гл. II, § 1 и 3).

VI. *Компактное расширение ⟨compactification⟩ Стоуна — Чеха.* Пусть E — вполне регулярное пространство; Σ — род структуры компактного пространства, морфизмы — непрерывные отображения (компактного пространства в компактное пространство), α-отображения — непрерывные отображения множества E в компактное пространство. Σ-допустимыми частями здесь опять являются *замкнутые* множества; условия (QM_{II}), (CU_I) — (CU_{III}) (с тем же кардинальным числом, что и в примере V) легко проверяются. Компактное пространство F_E есть (с точностью до изоморфизма) „компактное

расширение ⟨compactifié⟩ Стоуна — Чеха", полученное пополнением ⟨en complétant⟩ множества E до самой крупной равномерной структуры, делающей непрерывные отображения множества E в $[0, 1]$ равномерно непрерывными („Общая топология", гл. IX, § 1, упр. 7); отображение φ_E инъективно, так как две различные точки множества E могут быть отделены непрерывным отображением множества E в $[0, 1]$.

VII. *Свободные топологические группы.* Пусть E — вполне регулярное пространство, Σ — род структуры отделимой топологической группы, морфизмы — непрерывные представления; наконец, в качестве α-отображений возьмем непрерывные отображения множества E в отделимую топологическую группу. Легко проверяются условия (QM_{II}), (CU_I) — (CU_{III}) с $\mathfrak{a} = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(\mathbf{N})$. Отделимая топологическая группа F_E — решение проблемы универсального отображения для E — называется *свободной топологической группой, порожденной пространством* E; так как две различные точки из E могут быть отделены непрерывным отображением множества E в отделимую топологическую группу $\mathbf{R}$, отображение φ_E инъективно; можно показать, что φ_E есть гомеоморфизм множества E на подпространство $\varphi_E(E)$ пространства F_E [1]). Вместо рода структуры отделимой топологической группы в качестве Σ можно было бы также взять роды структуры отделимой топологической абелевой группы, компактной группы, отделимого топологического кольца, отделимого топологического векторного пространства (над топологическим телом, рассматриваемым как вспомогательное базисное множество) и т. д.

VIII. *Почти периодические функции на топологической группе.* Пусть E — топологическая группа; возьмем в качестве Σ род структуры компактной группы, в качестве морфизмов — непрерывные представления, в качестве α-отображений — непрерывные представления группы E в компактной группе. Условия (QM_{II}), (CU_I) — (CU_{III}) выполнены с $\mathfrak{a} = 2^{2^{\mathrm{Card}(E)}}$. Компактная группа F_E — решение проблемы универсального отображения для E — называется *компактной группой, ассоциированной с* E; отображение φ_E не обязательно инъективно. Всякая числовая функция, непрерывная на E, имеющая вид $g \circ \varphi_E$, где g — числовая функция, непрерывная на F_E, называется *функцией, почти периодической на* E.

IX. *Многообразие Альбанезе.* Пусть E — алгебраическое многообразие, Σ — род структуры абелевого многообразия над тем же базисным телом, что и E (полного алгебраического многообразия, наделенного законом алгебраической, необходимым образом коммутативной, группы); морфизмы — рациональные отображения абелевого многообразия в другое (они необходимым образом являются композициями гомоморфизма и сдвига); α-отображения — рациональные отображения многообразия E в абелево многообразие. Условие (CU_I) не выполняется, но проблема универсального отображения обладает решением F_E, называемым *многообразием Альбанезе* многообразия E; в общем случае соответствующее рациональное отображение φ_E не инъективно.$_\circ$

[1]) См. Samuel P., On universal mappings and free topological groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, LIV (1948), 591—598.

Замечание. В теории „универсальных накрытий" мы позже встретимся также и с другим типом проблемы, представляющим аналогию с проблемой универсального отображения. На этот раз имеем понятие „β-отображения" Σ-множества F в E; пара (F_E, φ_E), образованная Σ-множеством и β-отображением, *универсальна*, если для всякого β-отображения φ Σ-множества G в E существует σ-морфизм f множества F_E в G, такой, что $\varphi_E = \varphi \circ f$. °В теории, о которой мы упомянули, Σ есть род структуры связного, локально связного и локально односвязного топологического пространства, а σ-морфизмы и β-отображения — сюръективные „локальные гомеоморфизмы".$_\circ$

Упражнения

°1) Пусть E — топологическое пространство, Σ — один из родов структуры, определенных в упр. 7 и 8 § 2; возьмем в качестве морфизмов морфизмы, определенные в тех же упражнениях, а в качестве α-отображений — непрерывные отображения множества E в Σ-множество. Показать, что проблема универсального отображения для E (относящаяся к предыдущим определениям), вообще говоря, не обладает решением.$_\circ$

°2) Пусть E — поле, Σ — род структуры алгебраически замкнутого поля; возьмем в качестве морфизмов представления, за α-отображения — представления поля E в алгебраически замкнутом поле. Показать, что алгебраическое замыкание F_E поля E и каноническая инъекция множества E в F_E („Алгебра", гл. V, § 4) удовлетворяют условию (AU'_I), но что, вообще говоря, не существует решения проблемы универсального отображения для E.$_\circ$

3) Пусть Σ — род структуры, $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство множеств и для каждого $\iota \in I$ пусть $\mathscr{S}_\iota$ — структура рода Σ на A_ι. Пусть E — сумма семейства $(A_\iota)_{\iota \in I}$, причем A_ι рассматривается как подмножество множества E.

Предположим заданным понятие σ-морфизма для рода структуры Σ и определим α-отображение как такое отображение φ множества E в Σ-множество F, что для всякого $\iota \in I$ сужение отображения φ на A_ι есть морфизм множества A_ι в F.

Показать, что если существует решение (F_E, φ_E) проблемы универсального отображения для E, то структура рода Σ на F_E есть *структура, финальная* для семейства $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, \varphi_\iota)_{\iota \in I}$, где через φ_ι обозначено сужение отображения φ_E на A_ι.

Кроме того, пусть F — множество и для каждого $\iota \in I$ пусть f_ι — отображение множества A_ι в F. Если на F существует структура рода Σ, финальная для семейства $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, можно написать $f_\iota = f \circ \varphi_\iota$, где f — морфизм множества F_E в F, и структура множества F есть *прямой образ* структуры множества F_E при отображении f.

Применения к следующим случаям:

1° Σ — род алгебраической структуры, морфизмы — представления, условия (CU_I) — (CU_{III}) выполнены; так обстоит дело для структур моноида, группы, модуля, алгебры и т. д. Σ — множество F_E называется в случае групп — *свободным произведением* множеств A_ι, в случае модулей — *прямой суммой*, в случае алгебр — *прямой композицией*.

2° Σ — род структуры топологической группы или топологического векторного пространства. Условия (CU_I) — (CU_{III}) тогда выполняются; в случае локально выпуклых топологических векторных пространств F_E называется *топологической прямой суммой множеств* A_ι.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Критерии переносимости

1. Переносимые термы

Пусть $\mathcal{T}$ — теория, более сильная, чем теория множеств. Мы собираемся дать некоторое число критериев, позволяющих устанавливать, что некоторое соотношение теории $\mathcal{T}$ *переносимо* (§ 1, п° 3) относительно некоторой типизации.

В каждом из этих критериев будет подразумеваться, что сначала введено некоторое число букв, обозначенных через $x_1, \ldots, x_n$, $s_1, \ldots, s_p$, различных между собой и отличных от констант теории $\mathcal{T}$, и некоторое число термов $A_1, \ldots, A_m$, в которых не встречается никакая из букв x_i, s_j; подразумевается, что критерий применим, каковы бы ни были целые числа $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, $m \geqslant 0$. Для сокращения мы будем говорить, что x_i, s_j, A_k — *исходные* буквы и термы критерия. Символ $S(\mathbf{x}, \mathbf{A})$ будет обозначать ступень $S(x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m)$, где S — схема конструкции ступени над $n+m$ термами; для обозначения ступеней вместо S будут употребляться также буквы, такие, как S', S'', S_j и т. д. В каждом критерии мы будем обозначать через $T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$ (или $T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}\}$, или просто T) типизацию

$$„s_1 \in S_1(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \text{ и } \ldots \text{ и } s_p \in S_p(\mathbf{x}, \mathbf{A})“,$$

где $S_1, \ldots, S_p$ — p схем конструкции ступени над $n+m$ термами, x_i, s_j, A_k — исходные буквы и термы критерия.

В каждом из рассматриваемых критериев речь, кроме того, будет идти о соотношениях теории $\mathcal{T}$, обозначаемых обычно R, R', R'', ..., и о термах теории $\mathcal{T}$, обозначаемых обычно U, U', U'', ...; эти соотношения и термы могут содержать исходные буквы критерия. Если x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, s_j $(1 \leqslant j \leqslant p)$, A_k $(1 \leqslant k \leqslant m)$ — исходные буквы и термы критерия, рассмотрим, кроме того, $2n$ различных между собой букв $y_1, \ldots, y_n$, $f_1, \ldots, f_n$, отличных от констант теории $\mathcal{T}$, исходных букв критерия и всех букв, встречающихся в исходных термах A_k или в соотношениях и термах, о которых идет речь в критерии. Назовем тогда *соотношением переноса для типизации* T (в рассматриваемом критерии) соотношение

$$„T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\} \text{ и } (f_1 \text{ есть биекция множества } x_1 \text{ на } y_1) \text{ и } \ldots \text{ и } (f_n \text{ есть биекция множества } x_n \text{ на } y_n)“;$$

через $\mathcal{T}_c(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}, \mathbf{y}, \mathbf{f})$ (или просто через $\mathcal{T}_c$) мы будем обозначать теорию, полученную добавлением к аксиомам теории $\mathcal{T}$ соотношения переноса. Если S есть схема конструкции ступени над $n+m$ термами, обозначим через $\mathbf{f}^S$ терм теории $\mathcal{T}_c$, обозначаемый по соглашениям

§ 1, п° 2 через $\langle f_1, \ldots, f_n, I_1, \ldots, I_m\rangle^S$, где I_k обозначает тождественное отображение множества A_k; таким образом, соотношение

„f^S есть биекция множества S(x, A) на S(y, A)“

является теоремой теории $\mathcal{T}_c$ (§ 1, п° 2, критерий CST3). В теории $\mathcal{T}_c$ мы будем обозначать через $s'_1, \ldots, s'_p$ термы $f^{S_1}(s_1), \ldots, f^{S_p}(s_p)$ соответственно; для всякого знакосочетания W{x, s} мы будем обозначать через W{y, s'} знакосочетание, полученное заменой в W каждого из x_i на y_i и каждого из s_j на s'_j.

При этих обозначениях утверждение, что соотношение R *переносимо (в $\mathcal{T}$) при типизации* T, означает, таким образом, что соотношение

$$R\{x, s\} \Leftrightarrow R\{y, s'\}$$

есть теорема теории $\mathcal{T}_c$ (§ 1, п° 3).

При тех же обозначениях мы будем говорить, что терм U — *типа* (S, x, A) *при типизации* T (или, допуская вольность речи, *типа* S(x, A) или даже *типа* S[1]), если соотношение

$$T \Rightarrow (U \in S(x, A))$$

есть теорема теории $\mathcal{T}$; соотношение $U \in S(x, A)$ является тогда теоремой теории $\mathcal{T}_c$. Мы будем говорить, что U — *переносимый терм типа* (S, x, A) (или *типа* S(x, A), или *типа* S) *при типизации* T, если выполняются следующие условия:

1) U есть терм типа S(x, A) (для T);
2) соотношение $U\{y, s'\} = f^S(U\{x, s\})$ есть теорема теории $\mathcal{T}_c$.

Заметим, что если $\mathcal{T}'$ — теория, более сильная, чем $\mathcal{T}$, то всякое соотношение (соответственно терм) теории $\mathcal{T}$, переносимое при типизации T, остается переносимым (при той же типизации), когда оно рассматривается как соотношение (соответственно терм) теории $\mathcal{T}'$. Заметим, наконец, что предыдущие определения распространяются (в намного более простой форме) на случай, когда никаких букв s_j нет; читатель без труда увидит, во что превратятся в этом случае сформулированные ниже критерии (достаточно заменить T на соотношение, истинное в $\mathcal{T}$).

[1] Пусть $S = (c_1, \ldots, c_r)$, $S' = (c'_1, \ldots, c'_s)$ — две схемы конструкции ступени над n термами. Определим нижеследующим образом такую схему S_1 конструкции ступени над n термами, обозначаемую $S \times S'$, что

$$S_1(E_1, \ldots, E_n) = S(E_1, \ldots, E_n) \times S'(E_1, \ldots, E_n).$$

Определим сначала c_{r+i} для $1 \leqslant i \leqslant s$: если $c'_i = (0, b'_i)$, положим $c_{r+i} = c'_i$; если $c'_i = (a'_i, 0)$, положим $c_{r+i} = (a'_i + r, 0)$; наконец, если $c'_i = (a'_i, b'_i)$ с $a'_i \neq 0$ и $b'_i \neq 0$, положим $c_{r+i} = (a'_i + r, b'_i + r)$. Тогда последовательность $(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_{r+s})$ есть схема конструкции ступени S'' над n термами

$$S''(E_1, \ldots, E_n) = S'(E_1, \ldots, E_n).$$

Положим, наконец, $c_{r+s+1} = (r, r+s)$; последовательность $(c_1, \ldots, c_{r+s+1})$ есть искомая схема S_1. Тем же способом (но проще) определим такую схему S_2, содержащую $r+1$ пар целых чисел, что $S_2(E_1, \ldots, E_n) = \mathfrak{P}(S(E_1, \ldots, E_n))$, и обозначим эту схему $\mathfrak{P}(S)$.

2. *Критерии переносимости*

Для краткости мы будем часто в нижеследующих формулировках говорить „переносимый“ вместо „переносимый при типизации T“, когда это не будет вызывать путаницы. В одном и том же критерии слово „переносимый“ всегда (если не оговорено противное) относится к одной и той же типизации T.

CT1. *Если ни одна из букв* $x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_p$ *не встречается в соотношении* R, *то* R *переносимо. Терм* ∅ *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}$(S) (*какова бы ни была схема* S).

CT2. *При типизации* T{x, s, A} x_i — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(x_i)$, s_j — *переносимый терм типа* S_j(x, A) *и* A_k — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(A_k)$.

Эти критерии немедленно вытекают из определений.

CT3. *Если* R *и* R' — *переносимые соотношения, то же верно и для соотношений* „не R“, „R или R'“, „R и R'“, „R ⇒ R'“, „R ⇔ R'“.

CT4. *Если термы* U *и* U' *суть переносимые термы типов, соответственно* S *и* S', *то* (U, U') — *переносимый терм типа* S × S'. *Если* U *и* U' *суть переносимые термы типов соответственно* $\mathfrak{P}$(S) *и* $\mathfrak{P}$(S'), *то* U × U' *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}$(S × S') *и* $\mathfrak{P}$(U) *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S))$.

CT5. *Если* U *и* U' — *переносимые термы одного и того же типа* S, *то соотношение* U = U' *переносимо. Если* U — *переносимый терм типа* S *и* U' — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}$(S), *то соотношение* U ∈ U' *переносимо. Если* U *и* U' *суть переносимые термы типа* $\mathfrak{P}$(S), *соотношение* U ⊂ U' *переносимо.*

Мы предоставляем читателю доказательство этих критериев, вытекающих немедленно из определений и свойств биекций и их канонических распространений (см. § 1, критерий CST2, и гл. II, § 3, п° 7).

CT6. *Для всякой схемы конструкции ступени* S *над* $n + m$ *термами* S(x, A) *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}$(S(x, A)) *для типизации* T{x, s, A}.

Это вытекает из CT2 и CT4 и доказывается шаг за шагом, следуя за построением схемы S.

CT7. *Если* R — *такое соотношение, что* $T \Rightarrow R$ *истинно в* $\mathcal{T}$, *то* R *переносимо при* T. *Если* U, U′ — *два таких терма, что* $T \Rightarrow (U = U')$ *истинно в* $\mathcal{T}$, *и если* U *переносимый терм типа* S *при* T, *то то же верно и для* U′.

Вторая часть критерия вытекает из определения переносимого терма и схемы S6 (гл. I, § 5, n° 1), входящей в теорию $\mathcal{T}_c$. С другой стороны, соотношение $T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$ переносимо (при типизации $T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$) в силу CT3, CT5 и CT6; следовательно, соотношение $T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\} \Leftrightarrow T\{\mathbf{y}, \mathbf{s}', \mathbf{A}\}$ является теоремой теории $\mathcal{T}_c$ и, значит, то же верно и для $T\{\mathbf{y}, \mathbf{s}', \mathbf{A}\}$. Предположение об R влечет, что $R\{\mathbf{x}, \mathbf{s}\}$ есть теорема теории $\mathcal{T}_c$; с другой стороны, в силу критерия C3 (гл. I, § 2, n° 4), $T\{\mathbf{y}, \mathbf{s}', \mathbf{A}\} \Rightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{s}'\}$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, так как буквы x_i и s_j не являются константами теории $\mathcal{T}$; следовательно, $R\{\mathbf{y}, \mathbf{s}'\}$ есть теорема теории $\mathcal{T}_c$, из чего вытекает, что соотношение $R\{\mathbf{x}, \mathbf{s}\} \Leftrightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{s}'\}$ также является теоремой теории $\mathcal{T}_c$, откуда получается первая часть критерия.

CT8. *Пусть* z — *буква, отличная от констант теории* $\mathcal{T}$ *и букв, встречающихся в типизации* $T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$. *Пусть* S — *схема конструкции ступени из* $n+m$ *термов и пусть* T′ *есть типизация*

$$„T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\} \quad \text{и} \quad z \in S(\mathbf{x}, \mathbf{A})“.$$

Наконец, пусть R — *соотношение, не содержащее* z. *При этих условиях, если* R *переносимо (в* $\mathcal{T}$*) при типизации* T′, *то* R *переносимо при типизации* T *в теории* $\mathcal{T}'$, *полученной добавлением к аксиомам теории* $\mathcal{T}$ *соотношения* $S(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \neq \varnothing$.

Это тотчас же получается методом вспомогательной константы гл. I, § 3, n° 3 и § 4, n° 1).

Предыдущий критерий применяется обычно в двух следующих случаях:

а) ступень $S(\mathbf{x}, \mathbf{A})$ имеет вид $\mathfrak{P}(X)$;

б) схема S тождественна с одной из схем $S_j (1 \leqslant j \leqslant p)$, входящих в типизацию T.

В этих двух случаях из критерия CT8 можно заключить, что R переносимо в *теории* $\mathcal{T}$ при типизации T, ибо $S(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \neq \varnothing$ есть теорема теории $\mathcal{T}_c$.

CT9. *Пусть* R — *соотношение, переносимое при типизации* T, *и пусть* R′ — *такое соотношение, что* $T \Rightarrow (R \Leftrightarrow R')$ — *теорема теории* $\mathcal{T}$. *Тогда соотношение* R′ *переносимо при* T.

В самом деле, такое же рассуждение, как и в критерии CT7, показывает, что соотношения $R\{\mathbf{x}, \mathbf{s}\} \Leftrightarrow R'\{\mathbf{x}, \mathbf{s}\}$ и $R\{\mathbf{y}, \mathbf{s}'\} \Leftrightarrow R'\{\mathbf{y}, \mathbf{s}'\}$ являются теоремами теории $\mathcal{T}_c$; так как по предположению соотношение $R\{\mathbf{x}, \mathbf{s}\} \Leftrightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{s}'\}$ истинно в $\mathcal{T}_c$, то же верно и для

$$R'\{\mathbf{x}, \mathbf{s}\} \Leftrightarrow R'\{\mathbf{y}, \mathbf{s}'\}.$$

CT10. *Для типизации* $T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$ *пусть* U — *терм типа* $\mathfrak{P}(S_j)$, *в котором не встречается буква* s_j. *Для того чтобы* U *было переносимым термом при* T, *необходимо и достаточно, чтобы соотношение* $s_j \in U$ *было переносимым при* T.

Условие необходимо в силу CT5. Обратно, если оно выполняется, соотношение

$$(s_j \in U\{x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_p\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\mathbf{f}^{S_j}(s_j) \in U\{y_1, \ldots, y_n, s'_1, \ldots, s'_{j-1}, s'_{j+1}, \ldots, s'_p\})$$

истинно в $\mathcal{T}_c$. Так как в теории $\mathcal{T}_c$ отображение $\mathbf{f}^{S_j}$ биективно, из этого вытекает, что соотношение $U\{\mathbf{y}, \mathbf{s}'\} = \mathbf{f}^{S_j}(U\{\mathbf{x}, \mathbf{s}\})$ есть теорема теории $\mathcal{T}_c$, что и устанавливает критерий.

CT11. *При типизации* $T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$ *пусть* U — *терм типа* S_j, *в котором не встречается буква* s_j. *Для того чтобы* U *было переносимым при* T, *необходимо и достаточно, чтобы соотношение* $s_j = U$ *было переносимым при* T.

Рассуждение совершенно аналогично рассуждению критерия CT10, и мы предоставляем читателю его проделать.

CT12. *Пусть* z — *буква, отличная от констант теории* $\mathcal{T}$ *и букв, встречающихся в типизации* $T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$, *и пусть* U — *терм типа* S (соответственно $\mathfrak{P}(S)$) *для* T, *в котором буква* z *не встречается. Три следующих условия эквивалентны*:

а) U *есть переносимый терм типа* S (соответственно $\mathfrak{P}(S)$) *при* T;

б) U *есть переносимый терм типа* S (соответственно $\mathfrak{P}(S)$) *при типизации* $„T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$ и $z \in S(\mathbf{x}, \mathbf{A})“$.

в) *соотношение* $z = U$ (соответственно $z \in U$) *переносимо при типизации* $„T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$ и $z \in S(\mathbf{x}, \mathbf{A})“$.

Эквивалентность б) и в) вытекает из CT10 и CT11 и а) влечет, очевидно, б). Кроме того, метод вспомогательной константы показывает, что б) влечет переносимость U при T в теории, полученной добавлением к $\mathcal{T}$ аксиомы $S(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \neq \varnothing$. Но если U — типа S, соотношение T влечет по предположению (в $\mathcal{T}$) соотношение $U \in S(\mathbf{x}, \mathbf{A})$ и, следовательно, соотношение $S(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \neq \varnothing$; таким образом, последнее соотношение есть теорема теории $\mathcal{T}_c$, а это доказывает, что в этом случае U переносим при T в теории $\mathcal{T}$. Если U — типа $\mathfrak{P}(S)$, соотношение $„T\{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\}$ и $S(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \varnothing“$ влечет $U = \varnothing$ в $\mathcal{T}$ и тогда U переносим при T в теории, полученной добавлением к $\mathcal{T}$ аксиомы $S(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \varnothing$, в силу CT1; заключение получается теперь методом разделения случаев (гл. I, § 3, n° 3).

СТ13. *Пусть* R — *соотношение, переносимое при типизации* T$\{$x, s, A$\}$. *Для всякого индекса* j $(1 \leqslant j \leqslant p)$ *терм*

„множество элементов $s_j \in S_j$(x, A), таких, что R"

(гл. II, § 1, n° 6) *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S_j)$ (*при* T).

В самом деле, если этот терм обозначить через U, ясно, что U — типа $\mathfrak{P}(S_j)$ и что s_j в нем не встречается. Но в $\mathcal{T}$ типизация T влечет соотношение

$$(s_j \in U) \Leftrightarrow (s_j \in S_j(\mathrm{x}, \mathrm{A}) \text{ и } R),$$

и соотношение „$s_j \in S_j$(x, A) и R" переносимо при T (критерии СТ5, СТ6, СТ3). С помощью СТ9 и СТ10 получаем требуемое заключение.

СТ14. *Для типизации* T$\{$x, s, A$\}$ *пусть* R — *переносимое соотношение,* U — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S_j)$. *Тогда соотношения*

$$(\exists s_j)(s_j \in U \text{ и } R),$$

$$(\forall s_j)((s_j \in U) \Rightarrow R)$$

переносимы при T.

В самом деле, пусть U′ есть терм

„множество элементов $s_j \in S_j$(x, A), таких, что R".

В $\mathcal{T}$ соотношение T влечет соотношение

$$(U \subset U') \Leftrightarrow ((\forall s_j)((s_j \in U) \Rightarrow R)).$$

Так как, в силу СТ13, терм U′ есть переносимый терм типа $\mathfrak{P}(S_j)$ при T, то второе утверждение критерия вытекает из СТ5 и СТ9; первое же получается с помощью СТ3 и СТ9.

СТ15. *Для типизации* T$\{$x, s, A$\}$ *пусть* U — *переносимый терм типа* S, U′ — *такой переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S_j)$, *в котором не встречается* s_j. *Тогда терм*

„множество объектов вида U для $s_j \in U'$" (гл. II, § 1, n° 6) есть *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S)$ *при* T.

В самом деле, пусть z — буква, отличная от букв, введенных до сих пор. Рассматриваемый терм есть множество V элементов $z \in S$(x, A), таких, что истинно $(\exists s_j)$ $(s_j \in U'$ и $z = U)$. Применяя последовательно СТ5, СТ3 и СТ13, видим, что V — переносимый терм типа $\mathfrak{P}(S)$ при типизации „T$\{$x, s, A$\}$ и $z \in S$(x, A)". С помощью СТ12 получаем требуемое заключение.

СТ16. *Пусть* R — *соотношение, переносимое при типизации* T. *Если в* $\mathcal{T}$ *соотношение* „T и R" *функционально по* s_j, то *терм* τ_{s_j} (T и R) — *переносимый терм типа* S_j.

Пусть V — этот терм; он, очевидно, типа S_j. В $\mathcal{T}$ соотношение T влечет $(s_j = V) \Leftrightarrow$(T и R) и s_j не встречается в V; с помощью СТ9 и СТ11 получаем требуемое заключение.

Напротив, если не предполагать, что „T и R" функционально по s_j, заключение критерия СТ16 не верно. Предположим, например, что $\mathcal{T}$ — теория множеств, что $n = p = 1$, $m = 0$ и что T и R — оба тождественны соотношению $s_1 \in x_1$. Если бы терм τ_{s_1}(R) был переносимым при T, соотношение переноса влекло бы равенство

$$f_1(\tau_{s_1}(s_1 \in x_1)) = \tau_t\,(t \in f_1(x_1)).$$

Это влекло бы затем, что для всякого множества E образом элемента $\tau_x(x \in E)$ при *всякой* биекции множества E на множество F является элемент τ_x $(x \in F)$, что абсурдно, так как существуют множества, имеющие два элемента.

СТ17. *Пусть* R — *переносимое соотношение,* U — *переносимый терм типа* S_j, U′ — *переносимый терм типа* S′. *Тогда соотношение* $(U|s_j)R$ *переносимо, а терм* $(U|s_j)U'$ *есть переносимый терм типа* S′.

В самом деле, пусть V — множество элементов $s_j \in S_j$(x, A), таких, что R; V — переносимый терм (СТ13), и соотношение T влечет (в $\mathcal{T}$) соотношение

$$((U|s_j)R) \Leftrightarrow (U \in V).$$

Следовательно, $(U|s_j)R$ переносимо (СТ 9). Пусть z — буква, отличная от букв, введенных до сих пор; соотношение $z = (U|s_j)U'$ тождественно соотношению $(U|s_j)(z = U')$ и $z = U'$ переносимо при типизации „T$\{$x, s, A$\}$ и $z \in S'$(x, A)"; таким образом, в силу предыдущего, соотношение $z = (U|s_j)U'$ переносимо при этой типизации. Заключение будет вытекать из СТ12, как только мы покажем, что терм $(U|s_j)U'$ есть терм типа S′ при типизации T. Но в $\mathcal{T}$ соотношение T влечет каждое из соотношений $U \in S_j$(x, A) и $U' \in S'$(x, A); следовательно, T влечет соотношение $(U|s_j)$T и, наконец, так как s_j не встречается в терме S′(x, A), T влечет соотношение $(U|s_j)U' \in$ $\in S'$(x, A) (критерий С2, гл. I, § 2, n° 3).

СТ18. *Пусть* U — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S))$ *для* T. *Тогда терм* $\bigcup_{X \in U} X$ *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S)$; *если* T *влечет* $U \neq \varnothing$, *то же верно и для терма* $\bigcap_{X \in U} X$.

СТ19. *Если* U *и* U′ — *переносимые термы типа* $\mathfrak{P}(S)$, *то же верно и для термов* $U \cup U'$, $U \cap U'$, S(x, A) — U.

CT20. *Если* U — *переносимый терм типа* $S \times S'$, $pr_1 U$ *и* $pr_2 U$ — *переносимые термы типов* S *и* S' *соответственно. Если* U' — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S \times S')$, $pr_1 \langle U' \rangle$ *и* $pr_2 \langle U' \rangle$ — *переносимые термы типов* $\mathfrak{P}(S)$ *h* $\mathfrak{P}(S')$ *соответственно.*

Докажем, например, первую часть критерия CT18. Пусть z, t — две буквы, различные между собой и отличные от букв, введенных до сих пор; соотношение T влечет соотношение

$$(z \in U \text{ и } t \in z) \Rightarrow (t \in S(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \text{ и } z \in \mathfrak{P}(S(\mathbf{x}, \mathbf{A}))).$$

Таким образом, достаточно показать, что множество элементов $t \in S(\mathbf{x}, \mathbf{A})$, таких, что $(\exists z)(z \in U$ и $t \in z)$, переносимо типа $\mathfrak{P}(S)$ для типизации T. Но этот терм — типа $\mathfrak{P}(S)$ для T и переносимый терм типа $\mathfrak{P}(S)$ типизации

$$„T \{\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{A}\} \text{ и } z \in \mathfrak{P}(S(\mathbf{x}, \mathbf{A})) \text{ и } t \in S(\mathbf{x}, \mathbf{A})“;$$

так как он не содержит ни z, ни t, из CT12 получаем нужное заключение. Доказательства остальных критериев вполне аналогичны.

В дальнейшем мы не будем делать различия между соответствием и его графиком.

CT21. *Если* U — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S \times S')$ и U' — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S' \times S'')$, *то* $U' \circ U$ — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S \times S'')$, *а* $\overset{-1}{U}$ — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S' \times S)$.

CT22. *Если* U — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S \times S')$ *и* V — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S)$, *терм* $U\langle V \rangle$ — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S')$.

CT23. *Если* U — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S)$, *тождественное отображение* I_U *множества* U *на себя переносимо типа* $\mathfrak{P}(S \times S)$.

Доказательство этих критериев мы предоставляем читателю.

CT24. *Предположим, что* U — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S')$. U' — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S')$ *и* V — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S \times S')$. *Тогда соотношения*

„V есть отображение множества U в U'“
„V есть инъекция множества U в U'“
„V есть сюръекция множества U в U'“
„V есть биекция множества U в U'“

переносимы.

Докажем утверждение, например, для первого соотношения, которое мы обозначим через R. Очевидно, что в $\mathcal{T}$ типизация T влечет соотношение

$$R \Leftrightarrow ((V\langle U \rangle \subset U') \text{ и } V \circ \overset{-1}{V} = I_{V\langle U \rangle}).$$

Таким образом, заключение вытекает из CT9 и критериев CT21, CT22, CT23, CT5 и CT3.

Предоставляем читателю доказательство следующих критериев.

CT25. *Пусть* U, U', U'', V — *переносимые термы типов соответственно* S, $\mathfrak{P}(S)$, $\mathfrak{P}(S')$, $\mathfrak{P}(S \times S')$ *при типизации* T. *Предположим, что соотношение* T *влечет соотношения* „V *есть отображение множества* U' *в* U''“ *и* $U \in U'$. *Тогда терм* V(U) — *переносимый терм типа* S''. *Если, кроме того,* W' — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S)$ *и соотношение* T *влечет соотношение* $W' \subset U'$, *терм* „сужение отображения V на W'“ — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S \times S')$.

CT26. *Если* R — *переносимое соотношение, график соотношения*

$$„s_j \in S_j(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \text{ и } s_k \in S_k(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \text{ и } R“$$

по s_j *и* s_k *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S_j \times S_k)$.

CT27. *Предположим, что для двух различных индексов* j, k *схемы* S_j *и* S_k *одинаковы и пусть при типизации* T U *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S_j)$ *и* R — *переносимое соотношение. Предположим, кроме того, что соотношение* T *влечет соотношение*

„R есть соотношение эквивалентности в U между s_j и s_k“.

Тогда терм U/R — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S_j))$ *и каноническое отображение множества* U *на* U/R *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S_j \times \mathfrak{P}(S_j))$.

CT28. *При типизации* T *пусть* V — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S \times S')$; *каноническое распространение соответствия* V на $\mathfrak{P}(S(\mathbf{x}, \mathbf{A}))$ *и* $\mathfrak{P}(S'(\mathbf{x}, \mathbf{A}))$ *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S) \times \mathfrak{P}(S'))$. *Пусть* U, U_1, U', U_1' — *переносимые термы типов соответственно* $\mathfrak{P}(S)$, $\mathfrak{P}(S'')$, $\mathfrak{P}(S')$, $\mathfrak{P}(S''')$, V_1 — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S'' \times S''')$ *и предположим, что соотношение* T *влечет соотношения* „V есть отображение множества U в U'“ *и* „V_1 есть отображение множества U_1 в U_1'“. *Тогда каноническое распространение отображений* V *и* V_1 *на* $U \times U_1$ *есть переносимый терм типа* $\mathfrak{P}((S \times S'') \times (S' \times S'''))$.

CT29. *Пусть* U, U', U'' — *три переносимых терма типов соответственно* $\mathfrak{P}(S)$, $\mathfrak{P}(S')$, $\mathfrak{P}(S'')$. *Тогда каноническая биекция множества* $(U \times U') \times U''$ *на* $U \times (U' \times U'')$ *и каноническая биекция множества* $U \times U'$ *на* $U' \times U$ *являются переносимыми термами типов соответственно*

$$\mathfrak{P}(((S \times S') \times S'') \times (S \times (S' \times S''))) \text{ и } \mathfrak{P}((S \times S') \times (S' \times S)).$$

СТ30. *Пусть* U, U′ — *два переносимых терма типов соответственно* $\mathfrak{P}(S)$, $\mathfrak{P}(S')$. *Тогда множество отображений множества* U *в* U′ *является переносимым термом типа* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S \times S'))$.

СТ31. *При типизации* T *пусть* U — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S_j)$, V — *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S_j \times \mathfrak{P}(S))$; *предположим, что соотношение* T *влечет соотношение „*V *есть отображение множества* U *в* $\mathfrak{P}(S(\mathbf{x}, \mathbf{A}))$" *и что* s_j *не встречается ни в* U, *ни в* V. *Тогда термы* $\prod_{s_j \in U} V(s_j)$ *и* $\bigcup_{s_j \in U} V(s_j)$ — *переносимые термы типов* $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(S_j \times S))$ *и* $\mathfrak{P}(S)$ *соответственно. Если* T *влечет соотношение* $U \neq \varnothing$, *терм* $\bigcup_{s_j \in U} V(s_j)$ *переносимый терм типа* $\mathfrak{P}(S)$.

3. Примеры

В этом пункте мы предположим, что $\mathcal{T}$ есть теория множеств.

1) Покажем, что соотношение „x_1 и x_2 равномощны" переносимо, когда x_1 и x_2 — единственные исходные буквы (иначе говоря, $n = 2$, $p = m = 0$ и в качестве T берется соотношение, истинное в $\mathcal{T}$). В самом деле, это соотношение эквивалентно в $\mathcal{T}$ соотношению

$$(\exists z)(z \in \mathfrak{P}(x_1 \times x_2) \text{ и } z \text{ есть биекция множества } x_1 \text{ на } x_2).$$

Из СТ 24, СТ 3 и СТ 14 следует, что это соотношение переносимо при типизации „T и $z \in \mathfrak{P}(x_1 \times x_2)$"; следовательно, в силу СТ 8, оно переносимо также и при T, так как $\mathfrak{P}(x_1 \times x_2) \neq \varnothing$. Доказательство заканчивается с помощью СТ 9.

2) Соотношение „x_1 есть бесконечное множество" переносимо, тогда x_1 — единственная исходная буква и $A_1 = \mathbf{N}$ — единственный исходный терм (T — соотношение, истинное в $\mathcal{T}$). В самом деле, оно эквивалентно соотношению

$$(\exists z)\ (z \subset x_1 \text{ и } z \text{ равномощно множеству } \mathbf{N}),$$

а это последнее переносимо при типизации „T и $z \in \mathfrak{P}(x_1)$", что вытекает из примера 1 и критериев СТ 5, СТ 3 и СТ 14. Требуемое заключение получаем, как в примере 1, используя критерии СТ 8 и СТ 9.

3) Чтобы доказать, что терм $\operatorname{Card}(x)$ переносим при типизации T (в которой x — исходная буква), следует найти схему конструкции ступени S, такую, чтобы $\operatorname{Card}(x)$ был типа $S(\mathbf{x}, \mathbf{A})$, чего в данном случае не существует. Напротив, соотношение „$\operatorname{Card}(x_1) \leqslant \operatorname{Card}(x_2)$" переносимо, когда x_1, x_2 — единственные исходные буквы ($p = 0$, $m = 0$). В самом деле, оно эквивалентно переносимому соотношению

$$(\exists z)\ (z \subset x_2 \text{ и } z \text{ равномощно множеству } x_1).$$

4) Соотношение (обозначим его R_1)

„s_1 есть всюду определенный закон композиции на x_1"

переносимо при типизации $T: s_1 \in \mathfrak{P}((x_1 \times x_1) \times x_1)$, как вытекает из СТ 24. °Покажем, что соотношение (обозначим его R_2)

„s_1 есть всюду определенный и ассоциативный закон композиции на x_1"

переносимо при T. В самом деле, оно эквивалентно конъюнкции соотношения R_1 и соотношения

$$s_1 \circ (s_1 \times I_{x_1}) = s_1 \circ (I_{x_1} \times s_1) \circ J,$$

где через J обозначено каноническое отображение множества $(x_1 \times x_1) \times x_1$ на $x_1 \times (x_1 \times x_1)$; требуемое заключение получается с помощью СТ 21, СТ 23 и СТ 28.

Покажем, во-вторых, что соотношение (обозначим его R_3)

„s_1 есть закон композиции на x_1, всюду определенный ассоциативный и имеющий единичный элемент"

переносимо. В самом деле, оно эквивалентно конъюнкции соотношения R_2 и соотношения

$$(\exists z)(z \in x_1 \text{ и } (\forall z')((z' \in x_1) \Rightarrow (s_1(z, z') = z' \text{ и } s_1(z', z) = z'))).$$

Это последнее переносимо при типизации

„T и $z \in x_1$ и $z' \in x_1$";

заключение вытекает теперь из СТ 8 и метода разделения по случаям (гл. I, § 3, п° 3), если заметить, что в теории, полученной добавлением к $\mathcal{T}$ соотношения $x_1 = \varnothing$, соотношение R_3 ложно и, следовательно, переносимо (СТ 7 и СТ 3).

Наконец, соотношение

„s_1 есть закон композиции группы на x_1"

переносимо при T, так как оно эквивалентно конъюнкции соотношения R_3 и соотношения

$$(\forall z)(\forall z')((z \in x_1 \text{ и } z' \in x_1) \Rightarrow ((\exists z'')(z'' \in x_1 \text{ и } s_1(z, z'') = z') \text{ и } (\exists z''')(z''' \in x_1 \text{ и } s_1(z''', z) = z')));$$

рассуждение заканчивается так же, как для R_3.

Мы установили, таким образом, что аксиома рода структуры группы есть переносимое соотношение (при типовой характеристике этого рода структуры). ₒДля всех обычных родов структуры соответствующая проверка получается из данных выше критериев также легко и чаще всего опускается.

4. Относительно переносимые термы и соотношения

Пусть Σ — род структуры в $\mathcal{T}$, имеющий в качестве основных базисных множеств $x_1, \ldots, x_n$, в качестве вспомогательных базисных множеств $A_1, \ldots, A_m$, в качестве родовой структуры s_0; пусть

$$s_0 \in S_0 (x_1, \ldots, x_n, A_1, \ldots, A_m)$$

— его типовая характеристика, которую мы обозначим T_0, и пусть P — аксиома рода Σ; следовательно, P переносимо при типизации T_0 (§ 1, n° 4).

Мы будем говорить, что соотношение R *переносимо (в $\mathcal{T}$) относительно Σ при типизации* „T_0 и T", если соотношение $P \Rightarrow R$ переносимо в ($\mathcal{T}$) при „T_0 и T", причем выполняются следующие условия:

1° исходные буквы соотношения T суть $x_1, \ldots, x_n, s_0$ и (возможно) другие буквы $x'_1, \ldots, x'_r, s_1, \ldots, s_p$; исходные термы — $A_1, \ldots, A_m$ и (возможно) другие термы $A'_1, \ldots, A'_s$ теории $\mathcal{T}$, не содержащие никаких исходных букв соотношения T;

2° T имеет вид

$$„s_1 \in S_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{A}, \mathbf{A}') \text{ и } \ldots \text{ и } s_p \in S_p(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{A}, \mathbf{A}')“,$$

где $S_j (1 \leqslant j \leqslant p)$ — схемы конструкции ступени над $n+r+m+s$ термами.

Мы покажем сейчас, что это определение эквивалентно следующему (в обозначениях, введенных в n° 1): *соотношение*

$$R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\} \Leftrightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}$$

есть теорема теории $(\mathcal{T}_c)_\Sigma$, полученной добавлением к аксиомам теории $\mathcal{T}$ соотношения переноса для типизации „T_0 и T" *и аксиомы* $P\{x, s_0\}$.

Заметим, что это условие не означает переносимости соотношения R в теории $\mathcal{T}_\Sigma$ для типизации „T_0 и T", так как буквы x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ являются константами теории $\mathcal{T}_\Sigma$.

Предположим, в самом деле, что R переносимо (в $\mathcal{T}$) относительно Σ при типизации „T_0 и T"; тогда соотношение

$$(P\{x, s_0\} \Rightarrow R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\}) \Leftrightarrow (P\{y, s'_0\} \Rightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}) \quad (1)$$

есть теорема теории $\mathcal{T}_c$; то же верно и для соотношения

$$P\{\mathbf{x}, s_0\} \Leftrightarrow P\{\mathbf{y}, s'_0\},$$

поскольку P переносимо для T_0 (в $\mathcal{T}$). Следовательно, в $\mathcal{T}_c$ соотношение (1) эквивалентно соотношению

$$(P\{\mathbf{x}, s_0\} \Rightarrow R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\}) \Leftrightarrow (P\{\mathbf{x}, s_0\} \Rightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}). \quad (2)$$

Но в $(\mathcal{T}_c)_\Sigma$ $R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\}$ и $P\{\mathbf{x}, s_0\} \Rightarrow R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\}$ — эквивалентные соотношения; аналогично в $(\mathcal{T}_c)_\Sigma$ эквивалентны $R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}$ и $P\{\mathbf{x}, s_0\} \Rightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}$; из этого заключаем, что

$$R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\} \Leftrightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}$$

есть теорема теории $(\mathcal{T}_c)_\Sigma$.

Обратно, предположим, что это верно; тогда в $\mathcal{T}_c$ соотношение

$$P\{\mathbf{x}, s_0\} \Rightarrow (R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\} \Leftrightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}) \quad (3)$$

есть теорема; но легко проверяется, что соотношения $B \Rightarrow (C \Leftrightarrow D)$ и $(B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow D)$ эквивалентны во всякой логической теории; таким образом, (2) есть теорема теории $\mathcal{T}_c$, а следовательно, и (1), что заканчивает доказательство нашего утверждения.

Мы будем говорить, что терм U теории $\mathcal{T}$ *есть переносимый терм типа* S *(в $\mathcal{T}$) относительно Σ при типизации* „T_0 и T", если в $(\mathcal{T}_c)_\Sigma$ соотношения

$$U \in S(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{A}, \mathbf{A}')$$

и

$$U\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\} = \mathbf{f}^S(U\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\})$$

являются теоремами.

Легко теперь проверить, что критерии, установленные в n° 2, остаются верными, если в них заменить „переносимый" на „переносимый относительно Σ", T на „T_0 и T" и (в критериях CT7, CT9 и CT16) теорию $\mathcal{T}$ на теорию $\mathcal{T}_\Sigma$.

Покажем, например, как доказать критерий, соответствующий первой части критерия CT7. Предположение, что (T_0 и T) $\Rightarrow$ R есть теорема теории $\mathcal{T}_\Sigma$, означает, что соотношение

$$(P\{\mathbf{x}, s_0\} \text{ и } T_0\{\mathbf{x}, s_0\} \text{ и } T\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\}) \Rightarrow R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\}$$

есть теорема теории $\mathcal{T}$ и, следовательно, $R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\}$ есть теорема теории $(\mathcal{T}_c)_\Sigma$. Так как буквы x_i, x'_k, s_j не являются константами теории $\mathcal{T}$, соотношение

$$(P\{\mathbf{y}, s'_0\} \text{ и } T_0\{\mathbf{y}, s'_0\} \text{ и } T\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}) \Rightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}$$

есть теорема теории $\mathcal{T}$ и тем более теории $(\mathcal{T}_c)_\Sigma$. Но соотношение

$$(P\{\mathbf{x}, s_0\} \text{ и } T_0\{\mathbf{x}, s_0\} \text{ и } T\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (P\{\mathbf{y}, s'_0\} \text{ и } T_0\{\mathbf{y}, s'_0\} \text{ и } T\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\})$$

есть теорема теории $\mathcal{T}_c$, а значит, и $(\mathcal{T}_c)_\Sigma$; из этого заключаем, что $R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}$ есть теорема теории $(\mathcal{T}_c)_\Sigma$ и, следовательно, то же верно для

$$R\{\mathbf{x}, \mathbf{x}', s_0, \mathbf{s}\} \Leftrightarrow R\{\mathbf{y}, \mathbf{y}', s'_0, \mathbf{s}'\}.$$

Предположим, что R есть соотношение, переносимое относительно Σ при типизации „T_0 и T“, где $r=0$. В теории $\mathcal{T}'$, более сильной, чем $\mathcal{T}$, пусть $\mathcal{S}$ (соответственно $\mathcal{S}'$) — структура рода Σ на множествах $E_1, \ldots, E_n$ (соответственно $E'_1, \ldots, E'_n$) и пусть $(g_1, \ldots, g_n)$ — *изоморфизм* множеств $(E_1, \ldots, E_n)$, наделенных структурой $\mathcal{S}$, на множества $E'_1, \ldots, E'_n$, наделенные структурой $\mathcal{S}'$ (§ 1, n° 5). Пусть, с другой стороны, $C_1, \ldots, C_p$ — термы теории $\mathcal{T}'$, такие, что соотношения

$$C_j \in S_j(E_1, \ldots, E_n, A_1, \ldots, A_m, A'_1, \ldots, A'_s)$$

являются теоремами теории $\mathcal{T}'$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$. Пусть $\mathbf{g}^S$ — каноническое распространение отображений $g_1, \ldots, g_n$ и тождественных отображений множества A_k и A'_h $(1 \leqslant k \leqslant m,\ 1 \leqslant h \leqslant s)$ на ступень типа S, построенную из $E_1, \ldots, E_n, A_1, \ldots, A_m, A'_1, \ldots, A'_s$; имеем, в частности $\mathbf{g}^{S_0}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$. При этих условиях *соотношение*

$$R\{E_1, \ldots, E_n, \mathcal{S}, C_1, \ldots, C_p\} \Leftrightarrow R\{E'_1, \ldots, E'_n, \mathcal{S}', \mathbf{g}^{S_1}(C_1), \ldots, \mathbf{g}^{S_p}(C_p)\}$$

есть теорема теории $\mathcal{T}'$. В самом деле, если в терм $\mathbf{f}^{S_j}(s_j)$ подставить g_i вместо f_i, E_i вместо x_i, E'_i вместо y_i, $\mathcal{S}$ вместо s_0 и C_l вместо s_l $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant p)$, получим терм $\mathbf{g}^{S_j}(C_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$. Так как те же подстановки, произведенные в P, T_0, T и в соотношении переноса для „T_0 и T“, дают теоремы теории $\mathcal{T}'$, наше утверждение вытекает из определения соотношения, переносимого относительно Σ.

Аналогично, если U — переносимый терм типа S относительно Σ для типизации „T_0 и T“ (с $r=0$), соотношение

$$\mathbf{g}^S(U\{E_1, \ldots, E_n, \mathcal{S}, C_1, \ldots, C_p\}) = U\{E'_1, \ldots, E'_n, \mathcal{S}', \mathbf{g}^{S_1}(C_1), \ldots, \mathbf{g}^{S_p}(C_p)\}$$

есть теорема теории $\mathcal{T}'$, как это видно сразу же из определения.

Большинство соотношений и термов, рассматриваемых в теории рода структуры Σ, переносимы относительно Σ (при соответствующей типизации).

Пример. °Возьмем в качестве Σ род структуры группы; таким образом, $n=1$, $m=0$; T_0 есть соотношение $s_0 \in \mathfrak{P}((x_1 \times x_1) \times x_1)$ и $P\{x_1, s_0\}$ — аксиома „s_0 есть закон композиции группы на x_1“ (n° 3). Терм, называемый „нейтральный элемент множества x_1“ (относительно общей структуры s_0), есть

$$\tau_z(z \in x_1 \text{ и } (\forall z')((z' \in x_1) \Rightarrow (s_0(z, z') = z' \text{ и } s_0(z', z) = z'))).$$

Он является переносимым термом типа x_1 относительно Σ при типизации T_0, как легко видеть с помощью CT12; обозначим его e (в нем встречаются только буквы s_0 и x_1). Обозначим через u^{-1} терм

$$\tau_z(z \in x_1 \text{ и } s_0(z, u) = e \text{ и } s_0(u, z) = e);$$

он является относительно переносимым термом типа x_1 при типизации „T_0 и $u \in x_1$“. Соотношение, обозначаемое через „v есть подгруппа группы x_1“, есть

$$(\forall z)((z \in v) \Rightarrow (z^{-1} \in v \text{ и } (\forall z')((z' \in v) \Rightarrow (s_0(z, z') \in v))));$$

оно относительно переносимо при типизации „T_0 и $v \in \mathfrak{P}(x_1)$“. Терм, называемый „подгруппа группы x_1, порожденная множеством w“, является относительно переносимым термом типа $\mathfrak{P}(x_1)$ при типизации „T_0 и $w \in \mathfrak{P}(x_1)$“, так как он равен пересечению множества таких v, что v — подгруппа группы x_1 и $w \subset v$. Соотношение „z есть коммутатор в x_1“ относительно переносимо при типизации „T_0 и $z \in x_1$“, так как оно эквивалентно (в $\mathcal{T}_\Sigma$) соотношению

$$(\exists z')(\exists z'')(z' \in x_1 \text{ и } z'' \in x_1 \text{ и } z = s_0(z', s_0(z'', s_0(z'^{-1}, z''^{-1})))).$$

Отсюда терм „множество коммутаторов группы x_1“ (содержащий только буквы s_0 и x_1) относительно переносим типа $\mathfrak{P}(x_1)$ и, наконец, то же верно для терма „коммутант группы x_1“, поскольку этот последний есть по определению подгруппа, порожденная множеством коммутаторов группы x_1.$_\circ$

Данные выше определения показывают, что терм, *внутренний для* s_0 (§ 1, n° 6), есть не что иное, как терм $V\{x_1, \ldots, x_n, s_0\}$, не содержащий никаких букв, отличных от констант теории $\mathcal{T}_\Sigma$, и *переносимый относительно* Σ при типизации T_0.

°Таким образом, мы только что показали, что в теории групп нейтральный элемент и коммутант — внутренние; то же верно для центра, группы автоморфизмов и т. д.$_\circ$

Пусть $V\{x_1, \ldots, x_n, s_0\}$ — терм, внутренний для s_0 типа S. Очевидно, что соотношение

„$(f_1, \ldots, f_n)$ есть *автоморфизм* множеств $x_1, \ldots, x_n$, наделенных структурой s_0“

влечет (в $\mathcal{T}_\Sigma$) соотношение $\mathbf{f}^S(V) = V$; говорят также, что V *инвариантен* при всех автоморфизмах множеств $x_1, \ldots, x_n$, наделенных структурой s_0.

Это необходимое условие того, чтобы V был внутренним (для s_0), вообще говоря, не является достаточным; может случиться, например, что всякий автоморфизм сводится к тождественным отображениям множеств x_i. °Так обстоит дело в случае структуры простого тела или для структуры полного архимедовского упорядоченного тела. Но, если, например, Σ есть род структуры простого тела из двух элементов, имеющий в качестве базисного множества K, терм τ_z $(z \in K)$ не переносим относительно Σ (и в настоящее время не располагают никакой теоремой, позволяющей сказать, равен ли этот терм 0 или 1 в K).$_\circ$

Если терм V, внутренний для s_0, еще и таков, что соотношение „V есть соответствие между X и Y“ (соответственно „V есть отображение множества X в Y“) есть теорема теории $\mathcal{T}_\Sigma$ (X и Y — два терма, внутренних для s_0), то V называется *соответствием* (соответственно *отображением*), *каноническим* для s_0. В дальнейшем в этом Трактате нам понадобится определить очень много канонических отображений.

Замечание. В силу соглашений, введенных в § 1 (n° 4 и n° 5), утверждение, что соотношение (соответственно терм) переносимо *от-*

носительно рода структуры множества, означает просто, что соотношение (соответственно терм) переносимо в смысле, определенном в п° 1. Терминология „канонических отображений", введенная в теории множеств (гл. II и III), согласована, таким образом, с предыдущей терминологией при помощи соглашений, которые мы только что напомнили.

5. *Отождествления*

А) Часто случается, что, для того чтобы не усложнять записи, множества E'_i (в обозначениях п° 4) уславливаются обозначать теми же символами, что и соответствующие множества E_i, и $\mathcal{S}'$ (соответственно $g^{S_j}(C_j)$ — тем же символом, что и $\mathcal{S}$ (соответственно C_j); в этом случае говорят, что множества $E_1, \ldots, E_n$, наделенные структурой $\mathcal{S}$, *отождествляются* с множествами $E'_1, \ldots, E'_n$, наделенными структурой $\mathcal{S}'$, *посредством изоморфизма* $(g_1, \ldots, g_n)$. Термы $U\{E_1, \ldots, E_n, \mathcal{S}, C_1, \ldots, C_p\}$ и $U\{E'_1, \ldots, E'_n, \mathcal{S}', g^{S_1}(C_1), \ldots$ $\ldots, g^{S_p}(C_p)\}$ уславливаются тогда обозначать одним и тем же символом.

Примеры. ° 1) Множество натуральных целых чисел **N**, наделенное структурами порядка, адитивного моноида и мультипликативного моноида, отождествляется с некоторой частью множества **Z** рациональных целых чисел, наделенной структурами, индуцированными соответствующими структурами на **Z**; при этом **Z** определяется как некое фактормножество множества $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ пар натуральных целых чисел. Множество **Z** отождествляется с некоторой частью множества **Q** рациональных чисел (это последнее определяется как фактормножество некоторой части множества $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$). Множество **Q** отождествляется с некоторой частью множества **R** действительных чисел (это последнее определяется как фактормножество некоторого множества фильтров на **Q**). Наконец, **R** отождествляется с некоторой частью множества **C** комплексных чисел.

2) Множество мер $\varphi \to \int f(x)\,\varphi(x)\,dx$, определенных функциями f, локально интегрируемыми по мере Лебега на **R**, отождествляется с множеством классов эквивалентности из этих функций (по соотношению „f и g почти всюду равны").

Разумеется, отождествление E_i с E'_i $(1 \leqslant i \leqslant n))$ посредством изоморфизма $(g_1, \ldots, g_n)$ не означает, что соотношения $E_i = E'_i$ вводятся как новые аксиомы; впрочем, соотношения $E_i \neq E'_i$ часто являются теоремами теории $\mathcal{T}'$.

Б) Пусть, в обозначениях п° 4, X и Y — термы, внутренние для s_0, V — каноническое (для s_0) отображение множества X в Y, такое, что соотношение „V есть биекция множества X на Y" является теоремой теории $\mathcal{T}_\Sigma$. Тогда часто уславливаются обозначать X и Y одним и тем же символом, так же как в теории $\mathcal{T}'$ термы $X\{E_1, \ldots, E_n, \mathcal{S}\}$ и $Y\{E'_1, \ldots, E'_n, \mathcal{S}'\}$. Если, кроме того, Z есть терм теории $\mathcal{T}'$, такой, что $Z \in X\{E_1, \ldots, E_n, \mathcal{S}\}$ является теоремой теории $\mathcal{T}'$, Z и терм $V\{E_1, \ldots, E_n, \mathcal{S}\}(Z)$ обозначают одним и тем же символом.

В этом случае говорят, что X *и* Y *отождествлены посредством канонической биекции* V.

Примеры. В гл. II, § 5 было определено несколько канонических (для рода „структуры множества") биекций некоторых термов теории множеств на другие термы. Напомним, среди прочих, каноническое отображение множества F^E на множество $\mathcal{F}(E, F)$ отображений множества E в F, каноническое отображение множества $X_\alpha^{\{\alpha\}}$ на X_α, каноническое отображение множества $A \times B$ на $\prod_{\iota \in \{1, 2\}} X_\iota$ (где $X_1 = A$, $X_2 = B$), каноническое отображение множества $(A \times B) \times C$ на $A \times (B \times C)$ и т. д. Во всех этих случаях чаще всего принято *отождествлять* соответствующие термы посредством этих биекций. Аналогично отображение $G \to (G, A, B)$ множества $\mathfrak{P}(A \times B)$ на множество соответствий между A и B есть каноническая биекция; ввиду этой биекции очень часто отождествляют соответствие между A и B (и, в частности, отображение множества A в B) с его графиком, что мы несколько раз уже и делали.

Замечание. Только практика может указать, в какой мере отождествление двух множеств представит больше преимуществ, чем неудобств. Во всяком случае нужно, чтобы, когда оно применяется, не возникало необходимости писать непереносимые соотношения. Критерии, данные в этом приложении, показывают, что чаще всего опасность этого минимальна.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВАМ I—IV [1]

„Aliquot selectos homines rem intra quinquennium absolvere posse puto" [2]

Лейбниц

[[276], т. VII, стр. 187]

(NB — Цифры в скобках отсылают к библиографии, помещенной в конце этого очерка)

Изучение того, что обычно называют „основаниями Математики", беспрерывно продолжающееся с начала XIX в., смогло привести к хорошим результатам только благодаря параллельным усилиям по систематизации Логики, по крайней мере тех ее частей, которые изучают соединения математических предложений. Историю Теории множеств и формализации математики нельзя также отделить от истории Математической логики. Но традиционная логика, как и логика современных философов, имеет, в принципе, намного более обширное поле применений, чем Математика. Поэтому читатель не должен надеяться найти здесь историю Логики, даже в очень обзорной форме; мы ограничились, насколько это возможно, изложением развития Логики только в той мере, в которой оно воздействовало на развитие Математики. Так, например, мы ничего не скажем о неклассических логиках (многозначных и модальных); тем более мы не можем вдаваться в историю ученых споров, которые, от Софистов до Венской школы, постоянно разделяли философов в вопросах о возможности и способе применения Логики к предметам чувственного мира или понятиям человеческого разума.

Существование в доэллинский период очень развитой математики сегодня не может быть подвергнуто сомнению. Не только (и уже очень абстрактные) понятия целого числа и измерения величин свободно использовались в самых древних документах, дошедших до нас из Египта или Халдеи, но и вавилонская алгебра по изяществу и надежности своих методов не может рассматриваться как простое собрание задач, решенных эмпирическими поисками. И хотя в этих текстах мы не находим ничего, что напоминало бы „доказательство" в точном смысле слова, мы все же вправе думать, что такие методы

[1]) Другой перевод этого же исторического очерка (выполненный И. Г. Башмаковой) читатель найдет на стр. 9—60 книги: Н. Бурбаки, Очерки по истории математики, перев. с французского, ИЛ, М., 1963. — *Прим. ред.*

[2]) „Полагаю, что несколько избранных людей могут завершить дело в течение пяти лет" (лат.). — *Прим. ред.*

решения, общность которых проявляется в конкретных численных приложениях, не могли бы быть открыты без некоторого минимума логических построений (быть может, не полностью осознанных, но, скорее, вроде тех, на которые опирается современный алгебраист, когда он осуществляет вычисления, еще не „приведя в порядок" все детали) [[31], стр. 203 и след.].

Важнейшая самобытная особенность греков состоит именно в их сознательном стремлении расположить математические доказательства в такие цепочки, чтобы переход от одного звена к следующему не оставлял никакого места сомнениям и заставлял всех с ним согласиться. О том, что греческие математики, совсем как современные, в своих изысканиях пользовались скорее „эвристическими" рассуждениями, чем доказательными, свидетельствует (если в этом есть нужда), например, „трактат о методе" Архимеда [2]; у него же можно также заметить упоминания о результатах, „найденных, но не доказанных" предшествующими математиками [1]). Но, начиная с первых подробных текстов, ставших нам известными (датирующихся серединой V века), идеальный „канон" математического текста уже вполне установлен. Он находит свою наиболее законченную реализацию у великих классиков: Эвклида, Архимеда и Аполлония; понятие доказательства у этих авторов ничем не отличается от нашего.

У нас нет никакого текста, позволяющего нам проследить за первыми шагами этого „дедуктивного метода", который появился перед нами сразу близким к совершенству в тот самый момент, когда мы замечаем его существование. Можно только предполагать, что он довольно естественно включился в постоянные поиски „объяснений" мира, характерные для греческой мысли и столь заметные уже у ионийских философов VII века; кроме того, традиция единогласно приписывает развитие и окончательную отделку метода пифагорейской школе в период между концом VI и серединой V века.

Именно в этой „дедуктивной" математике, полностью осознавшей свои цели и методы, упражняется философская и математическая мысль последующих веков. Мы видим, с одной стороны, как по образцу математики мало-помалу строилась „формальная" Логика, что приводило к созданию формализованных языков; с другой

[1]) Например, Демокритом, которому Архимед приписывает открытие формулы, дающей объем пирамиды [[2 bis], стр. 13]. Это упоминание следует сопоставить с известным отрывком, приписываемым Демокриту (его подлинность, впрочем, оспаривается), где он заявляет: *„никто не превзошел меня в построении фигур с помощью доказательств, даже — египетские „гарпедонапты", как их называют"*. [H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 2 изд., т. I, стр. 439 и т. II, 1, стр. 727—728, Berlin (Weidmann), 1906—1907]. Замечание Архимеда и тот факт, что в дошедших до нас египетских текстах не было найдено ни одного доказательства (в классическом смысле), заставляют думать, что „доказательства", о которых упоминает Демокрит, не рассматривались уже как таковые в классическую эпоху и тем более не были бы ими теперь.

стороны, главным образом — с начала XIX века, все больше и больше интересовались понятиями, лежащими в основе Математики, и старались выяснить их природу, особенно после пришествия Теории множеств.

Формализация Логики

Общее впечатление, которое производят имеющиеся у нас (весьма неполные) тексты по греческой философской мысли V века, состоит в том, что она подчинена все более и более сознательному стремлению распространить на все области человеческого мышления методы построения речи, с таким успехом примененные тогдашней риторикой и математикой, другими словами, — создать логику в самом общем смысле этого слова. Тон философских сочинений претерпевает в эту эпоху резкое изменение: если в VII или в VI веке философы утверждают или пророчествуют (или, самое большее, намечают туманные рассуждения, основанные на не менее туманных аналогиях), то начиная с Парменида и особенно с Зенона они аргументируют и стараются выделить общие принципы, которые могли бы служить основой их диалектики: именно у Парменида мы находим первое утверждение о принципе исключенного третьего, а доказательства „от противного“ Зенона Элейского знамениты и сейчас. Но Зенон пишет в середине V века; и каковы бы ни были неточности наших источников[1]), весьма правдоподобно, что в эту эпоху математики, в своей собственной области свободно пользовались этими принципами.

Как мы уже сказали выше, нам не нужно излагать бесчисленные трудности, возникавшие на каждом шагу при зарождении логики, и вызванные ими споры, от Элеатов через Софистов до Платона и Аристотеля; здесь мы только отметим роль, которую в этой эволюции играют тщательно разработанная культура ораторского искусства и, как следствие из нее, анализ языка, развитые, как считают сейчас, главным образом Софистами V века. С другой стороны, если влияние математики и не всегда признается явно, оно не становится от этого менее очевидным, в частности, в сочинениях Платона и Аристотеля. Можно сказать, что Платон был почти одержим математикой; не будучи сам творцом в этой области, он, начиная с некоторого периода своей жизни, находился в курсе открытий современных ему математиков (из которых многие были его друзьями или учениками) и не переставал интересоваться математикой самым непосредственным образом, вплоть до того, что указывал новые направления исследований; кроме того, в его трудах математика постоянно служит

[1]) Наилучший классический пример рассуждения от противного в математике — это доказательство иррациональности для $\sqrt{2}$, о котором несколько раз упоминает Аристотель; но современные ученые не смогли сколько-нибудь точно датировать это открытие, одни относят его к началу, другие — к самому концу V века (см. Исторический очерк к гл. IV книги III и ссылки, приведенные там по этому поводу).

иллюстрацией или моделью (удовлетворяя иногда даже, как и у Пифагорейцев, его склонность к мистицизму). Что касается его ученика Аристотеля, то он не мог не получить минимума математического образования, требуемого от учеников Академии, и был составлен целый том отрывков из его сочинений, относящихся к математике или упоминающих о ней [44]; но он никогда, по-видимому, не старался сохранить контакт с математическим движением своего времени и ссылался в этой области только на те результаты, которые давно уже стали общеизвестными. Впрочем, у большинства последующих философов это расхождение только усилится; многие из этих философов, не имея технической подготовки, вполне искренне считали, что они говорят о математике со знанием дела, в то время как они ссылались на давно уже пройденную стадию ее развития.

Завершением этого периода развития логики является монументальный труд Аристотеля [1], великая заслуга которого состоит в том, что ему впервые удалось систематизировать и кодифицировать методы рассуждений, оставшиеся не ясными или не сформулированными у его предшественников[1]). Для наших целей здесь особенно необходимо запомнить основное положение этой работы, заключающееся в том, что всякое правильное рассуждение возможно свести к систематическому применению небольшого числа неизменных правил, не зависящих от конкретной природы объектов, о которых идет речь (эта независимость ясно выявляется обозначением понятий или высказываний буквами — что, очевидно, было заимствовано Аристотелем у математиков). Но Аристотель сосредоточил свое внимание почти исключительно на особом типе логических соотношений и их соединений, составляющем то, что он называет „силлогизмом“: речь идет, в основном, о соотношениях, которые в настоящее время на язык теории множеств мы перевели бы в виде $A \subset B$ или $A \cap B \neq \varnothing$[2]),

[1]) Несмотря на простоту и „очевидность“, которые, по-видимому, представляют для нас логические правила, сформулированные Аристотелем, достаточно лишь поместить их в их исторические рамки, чтобы оценить трудности, мешавшие точному пониманию этих правил, и усилия, которые должен был приложить Аристотель, чтобы достигнуть цели; Платон в своих диалогах, которые он адресует просвещенной публике, позволял еще своим персонажам запутываться в таких элементарных вопросах, как соотношение между (на современном языке) отрицанием соотношения $A \subset B$ и соотношением $A \cap B = \varnothing$, хотя впоследствии не скрывает правильного ответа [см. R. Robinson, Plato's consciousness of fallacy, *Mind*, 51 (1942), 97—114].

[2]) Соответствующие выражения Аристотеля: „Всякое A есть B“ и „Некоторое A есть B“; в этих обозначениях A („субъект“) и B („предикат“) заменяют понятия, и „Всякое A есть B“ означает, что можно приписать понятие B всякому существу, которому можно приписать понятие A (в классическом примере A есть понятие „человек“, B — понятие „смертен“). Интерпретация, которую мы этому даем, состоит в рассмотрении множеств существ, к которым применяются соответственно понятия A и B; это так называемая „объемная“ точка зрения, уже известная Аристотелю. Но этот последний рассматривает, особенно соотношение „Всякое A есть B“, с дру-

и о способе соединения этих соотношений или их отрицаний при помощи схемы

$$(A \subset B \text{ и } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C).$$

Все же Аристотель был слишком искушен в математике своего времени, чтобы не заметить, что схем этого рода не достаточно, чтобы охватить все логические операции математики и, тем более, других применений логики [[1], An. Pr., 1, 35; [II], стр. 25—26][1]). По крайней мере, углубленное изучение различных форм „силлогизма", которым он занимается (и которое почти целиком посвящено выяснению постоянных трудностей, вызываемых двусмысленностью или неясностью терминов, участвующих в рассуждении), дает ему между прочим повод сформулировать правила нахождения отрицания высказывания [[1], An. Pr., 1, 46]. Также именно Аристотелю принадлежит заслуга очень отчетливого различения роли „общих" и „частных" высказываний, что было первым подходом к кванторам[2]). Но слишком хорошо известно, как влияние его трудов (истолкованных зачастую односторонне или неумно), остававшееся очень чувствительным вплоть до конца XIX века, поощряло философов в их пренебрежении к изучению математики и тормозило развитие Формальной логики[3]).

Тем не менее последняя продолжает развиваться в античном мире в лоне мегарской и стоической школ, соперничавших с перипатетиками. К сожалению, все наши сведения об их теориях — из вторых рук и переданы они часто их противниками или посредственными комментаторами. Главное достижение этих логиков состояло, по-видимому, в создании „исчисления высказываний" в том смысле, как мы понимаем его сегодня: вместо того, чтобы, подобно Аристотелю, ограничиваться высказываниями частного вида $A \subset B$, они формулировали правила, относящиеся к совершенно *неопределенным* высказываниям. Кроме того, они настолько глубоко проанализировали логические связи между этими правилами, что умели методами, очень

гой, так называемой „содержательной" точки зрения, где B понимается как одно из понятий, которые каким-то образом составляют более сложное понятие A, или, как говорит Аристотель, ему „принадлежат". На первый взгляд обе точки зрения кажутся одинаково естественными, но „содержательная" точка зрения была постоянным источником трудностей в развитии логики [она, по-видимому, более далека от интуиции, чем первая, и довольно легко приводит к ошибкам, особенно в схемах, в которых участвуют отрицания; см. [26], стр. 21—32].

[1]) По поводу критического обсуждения силлогизма и его недостатков см., например, [26], стр. 432—441 или [16], стр. 44—50.

[2]) Отсутствие настоящих кванторов (в современном смысле) до конца XIX века было одной из причин застоя в формальной логике.

[3]) Рассказывают случай с одним видным профессором университета, который недавно на лекции в Принстоне в присутствии Гёделя якобы сказал, что в логике со времен Аристотеля не было сделано ничего нового!

похожими на описанные в гл. I, § 2 и 3, выводить все эти правила из пяти из них, взятых как „недоказуемые" [5]. К сожалению, их влияние было довольно эфемерным, и их результаты должны были оставаться в забвении до тех пор, пока они не были вновь найдены логиками XIX века. Вплоть до XVII века неоспоримым авторитетом в Логике оставался Аристотель; известно, в частности, что философы-схоласты всецело находились под его влиянием; и хотя их вкладом в формальную логику никак нельзя пренебречь [3], он не содержит никакого первостепенного достижения по сравнению с вкладом философов Античности.

Здесь следует, впрочем, заметить, что, по-видимому, работы Аристотеля или его последователей не имели заметного отклика в математике. Греческие математики продолжали свои исследования по пути, проложенному пифагорейцами и их последователями IV века (Теодором, Теэтетом, Евдоксом), не заботясь, видимо, о формальной логике при оформлении своих результатов: факт, который вовсе не должен нас удивлять, если сравнить гибкость и точность, достигнутые в это время в математических рассуждениях, с весьма зачаточным состоянием аристотелевой логики. А когда Логика прошла этот этап, то именно новые завоевания математики снова направляли ее развитие.

Когда начала развиваться алгебра, нельзя было не поразиться сходству между правилами Формальной логики и правилами алгебры, поскольку и те, и другие имели обобщенный характер применения к неопределенным объектам (высказываниям или числам). И когда в XVII веке алгебраические обозначения под пером Виета и Декарта приняли свою окончательную форму, почти тотчас же стало наблюдаться появление различных опытов символической записи, предназначенной для изображения логических операций; но до Лейбница эти попытки, как, например, у Эригона ⟨Hérigone⟩ (1644) для записи доказательств Элементарной геометрии или у Пелля ⟨Pell⟩ (1659) для записи доказательств Арифметики, оставались весьма поверхностными и не вели ни к какому прогрессу в анализе математических рассуждений.

Лейбниц предстает перед нами как философ, который не только был одновременно математиком первой величины, но и умел извлекать из своего математического опыта ростки идей, способных вывести Формальную логику из схоластического тупика[1]). Универ-

[1]) Хотя Декарт и (в меньшей степени) Паскаль посвятили часть своих философских работ основаниям математики, их вклад в развитие Формальной логики ничтожен. Несомненно, причину этого надо видеть в основной тенденции их мышления, в их стремлении вырваться из-под опеки схоластики, приводившем к отбрасыванию всего, что могло их с ней связывать и, в первую очередь, Формальной логики. Действительно, в своих *„Размышлениях о духе геометрии"* Паскаль по собственному признанию ограничился главным образом вкладыванием в хорошо построенные формулы известных принципов эвклидовых доказательств (например, известное правило *„Всегда подставлять мысленно определения на место определяемых"* ([33], т. IX,

сальный ум, если таковой когда-либо существовал, неисчерпаемый источник самобытных и плодотворных идей, Лейбниц тем более должен был интересоваться логикой, что она находилась в самом центре его грандиозных проектов формализации языка и мышления, над которыми он не переставал работать всю свою жизнь. Порвав с самого детства со схоластической логикой, он увлекся мыслью (восходящей к Раймону Люллю ⟨Raymond Lulle⟩) о методе, который разлагал бы все человеческие понятия на простейшие понятия, составляющие „Алфавит человеческого мышления“, и, комбинируя их чуть ли не механически, получал все истинные высказывания [[26], т. VII, стр. 185; ср. [44], гл. II]. Также в ранней молодости у него возникли еще более оригинальная идея о полезности символических обозначений как „нити Ариадны“ для мышления[1]: *Истинный метод*, — говорил он, — *должен давать нам* filum Ariadnes, *т. е. некое чувственное и грубое средство, которое управляло бы нашим умом, как начерченные линии в геометрии и предписанные ученикам формы операций в арифметике. Без этого наш ум не мог бы проделать долгий путь, не заблудившись*“ [[26], т. VII, стр. 22; ср. [26], стр. 90]. Будучи до 25 лет мало знакомым с математикой своего времени, он сначала представлял свои проекты в форме „универсального языка“ [[26], гл. III]; но как только он ознакомился с алгеброй, он принял ее в качестве модели своей „Универсальной характеристики“, под которой подразумевал символический язык, способный однозначно выразить любую человеческую мысль, усилить нашу способность к дедукции, избегать ошибок при помощи совершенно механического напряжения внимания и, наконец, построенный так, чтобы „*химеры, которые не понимает даже тот, кто их выдвигает, не могли быть записаны в этих знаках*“ [[27a], т. I, стр. 187]. По многочисленным отрывкам из его сочинений, где Лейбниц упоминал о своем грандиозном проекте и об успехах, которые повлекла бы за собой его реализация [см. [26], гл. IV и VI], видно, с какой ясностью представлял он себе понятие формализованного языка, чистой комбинации знаков, в которой важен только взаимный порядок[2], так что машина была бы

стр. 280) по существу было известно от Аристотеля ([1], Top., VI,4; [44], стр. 87). Что касается Декарта, то предлагаемые им правила рассуждения являются, скорее, психологическими предписаниями (достаточно туманными), а не логическими критериями; поэтому, как упрекал его Лейбниц ([44], стр. 94 и 202—203), эти правила имеют только субъективное значение.

[1]) Разумеется, интереса к такому символизму не избежали и предшественники Лейбница в математике, и Декарт, например, рекомендовал заменять целые фигуры „*очень короткими знаками*“ (XVI-е Правило для руководства ума; [20], т. X, стр. 454). Но никто до Лейбница не настаивал так сильно на универсальной значимости этого принципа.

[2]) Поразительно видеть, как он приводит в качестве примеров „надлежащего“ рассуждения „*счет сборщика* ⟨„un compte de receveur“⟩ или даже юридический текст ([27б], т. IV, стр. 295).

способна дать нам все теоремы[1]) и все споры решались бы простым вычислением [[27б], т. VII, стр. 198—203]. Хотя эти надежды могут показаться чрезмерными, но тем не менее правда, что именно с этой постоянной тенденцией мышления Лейбница следует связывать значительную часть его математического наследия, начиная с работ по символизму Анализа бесконечно малых (см. Исторический очерк к книге IV, гл. I — II — III); он сам это прекрасно осознавал и явно связывал со своей „Характеристикой“ идеи об индексном обозначении и определителях [[27а], т. II, стр. 240; ср. [26], стр. 481—487] и свой набросок „Геометрического исчисления“ [см. Исторический очерк к книге II, гл. II и III; ср. [26], гл. IX]. Но по его мысли основной ее частью должна быть Символическая логика или, как он говорит, „Calculus ratiocinator“[2]) и, хотя ему не удалось создать это исчисление, тем не менее он по крайней мере трижды предпринимает попытки в этом направлении. В первый раз у него была мысль поставить в соответствие каждому „примитивному“ термину простое число, а всякий термин, составленный из нескольких примитивных терминов, представить произведением соответствующих простых чисел[3]); он старался перевести в эту систему обычные правила силлогизма, но натолкнулся на значительные затруднения, вызываемые отрицанием (которое он довольно естественно пытался представить изменением знака), и быстро оставил этот путь [[27с], стр. 42—96; ср. [26], стр. 326—344]. В своих последующих работах он пытался придать аристотелевой логике более алгебраическую форму; для конъюнкции двух понятий он то сохранял обозначение AB, то использовал обозначение $A + B$[4]); он обратил внимание (в мультипликативных обозначениях) на закон идемпотентности $AA = A$, заметил, что высказывание „всякое A есть B“ можно заменить равенством $A = AB$ и что, исходя из этого, большую часть правил Аристотеля можно вывести вновь чисто алгебраическим вычислением [[27в], стр. 229—237 и 356—399; ср. [26], стр. 345—364]; у него была также идея пустого понятия („non Ens“[5])) и он сознавал, например, эквивалентность высказываний „всякое A есть B“ и „не существует A (не B)“ (loc. cit.). Кроме того, он заметил, что его логическое исчисление применимо не только к логике понятий, но и к логике высказываний [[27в], стр. 377]. Таким образом, он, вероятно, был очень близок к „булеву исчислению“. К сожалению, ему не полностью,

[1]) Известно, что это понятие „логической машины“ используется в наше время в метаматематике, где оно играет важную роль ([14], гл. XIII).

[2]) „Исчисление, производящее рассуждения“ (лат.). — *Прим. ред.*

[3]) Эта идея в несколько отличной форме с успехом была применена Гёделем в его работах по метаматематике (см. [12а] и [6], стр. 254).

[4]) Лейбниц пытался ввести в свое исчисление дизъюнкцию только в нескольких фрагментах (где он обозначает ее $A + B$) и, по-видимому, ему не удается удовлетворительно оперировать одновременно этой операцией и конъюнкцией ([26], стр. 363).

[5]) „Не сущее“ (лат.). — *Прим. ред.*

по-видимому, удалось освободиться от влияния схоластов; мало того, что он считал целью своего исчисления почти исключительно перевод в свои обозначения правил силлогизма[1]), но и самые счастливые свои идеи он принес в жертву желанию вновь получить полностью правила Аристотеля, даже те, которые несовместимы с понятием пустого множества[2]).

Работы Лейбница большей частью оставались неизданными вплоть до начала XX века и прямое влияние их было незначительно. В течение всего XVIII и начала XIX века различные авторы (де Сегнер ⟨de Segner⟩, Ж. Ламберт ⟨J. Lambert⟩, Плукке ⟨Ploucquet⟩, Голланд ⟨Holland⟩, де Кастильон ⟨De Castillon⟩, Жергонн ⟨Gergonne⟩) предпринимали попытки, подобные попыткам Лейбница, никогда не превосходя заметно уровня, на котором остановился он; их работы имели только очень слабый отклик, и большинство из них даже ничего не знало о результатах своих предшественников[3]). Впрочем, точно в таких же условиях пишет и Дж. Буль, которого следует рассматривать как истинного создателя современной символической логики [7]. Его главная мысль состояла в систематическом проведении „объемной" точки зрения и в оперировании, следовательно, прямо с множествами; через xy он обозначал пересечение двух множеств, а через $x+y$ — их объединение, когда x и y не имеют общих элементов. Он ввел, кроме того, „универсум", обозначаемый 1 (множество всех объектов), и пустое множество, обозначаемое 0, и обозначил через $1-x$ дополнение множества x. Подобно Лейбницу, он интерпретировал соотношение включения соотношением $xy=x$ (из чего без труда получил справедливость правил классического силлогизма), и его обозначения для объединения и дополнения придают его системе гибкость, которой не доставало его предшественникам[4]). Кроме того, связывая с каждым высказыванием множество „случаев", в которых оно выполняется, он интерпретировал

[1]) Лейбниц очень хорошо знал, что аристотелева логика недостаточна для формального перевода математических текстов, но, несмотря на несколько попыток, ему не удалось улучшить ее в этом отношении ([26], стр. 435 и 560).

[2]) Речь идет о правилах, называемых „правилами конверсии", основанных на постулате «„Всякое A есть B" влечет „Некоторое A есть B"», в котором предполагается, естественно, что A не пусто.

[3]) Начиная с середины XVIII века влияние Канта также несомненно сказывается на том малом интересе, который вызывала в это время формальная логика; он считал, что *„нам не нужны никакие новые изобретения в логике"*, так как форма, приданная ей Аристотелем, достаточна для всех возможных приложений [*Werke*, т. VIII, Berlin (B. Cassirer), 1923, стр. 340]. О догматических воззрениях Канта на математику и логику можно прочесть в статье L. Couturat, *Revue de Métaph. et de Morale*, т. XII (1904), 321—383.

[4]) Заметим, в частности, что Буль пользовался дистрибутивностью пересечения относительно объединения, замеченной впервые, по-видимому, Ж. Ламбертом.

соотношение импликации как включение, и его исчисление множеств дало ему, таким образом, правила „исчисления высказываний".

Во второй половине XIX века система Буля служит основой для работ активной школы логиков, которые обогатили и дополнили ее в различных направлениях. Так, например, Джевонс ⟨Jevons⟩ (1864) расширил смысл операции объединения $x+y$, распространив ее на произвольные x и y; А. де Морган ⟨A. de Morgan⟩ в 1858 году и Пирс ⟨C. S. Peirce⟩ в 1867 году доказали соотношения двойственности

$$(\complement A)\cap(\complement B)=\complement(A\cup B),\quad (\complement A)\cup(\complement B)=\complement(A\cap B)\ ^{1}).$$

В 1860 году де Морган предпринял также изучение соотношений, определяющих инверсию и композицию бинарных соотношений (т. е. операции, соответствующие операциям $\overset{-1}{G}$ и $G_1\circ G_2$ над графиками)[2]). Все эти работы систематически изложены и развиты в объемистом и многословном сочинении Шрёдера [47]. Но любопытно также отметить, что логики, о которых мы только что говорили, как будто бы вовсе не интересовались применением своих результатов в математике и что, совсем напротив, именно Буль и Шрёдер, по-видимому, имели своей главной целью развивать „булеву" алгебру, копируя ее методы и проблемы с классической алгебры (часто очень искусственным образом). Причины такого отношения, несомненно, следует видеть в том, что булево исчисление еще не было достаточно удобным для выражения большинства математических рассуждений[3]) и, таким образом, лишь в очень малой степени отвечало великому замыслу Лейбница. Построение формализмов, лучше приспособленных к математике, — его главным этапом явилось принадлежащее независимо Фреге [42] и Пирсу [36б] введение переменных и кванторов — было делом логиков и математиков, которые в отличие от предшественников прежде всего имели в виду приложения к основаниям математики.

[1]) Следует отметить, что формулировки, эквивалентные этим правилам, встречаются уже у некоторых философов-схоластов [[3], стр. 67 и след.].

[2]) Однако понятие „декартова" произведения двух произвольных множеств было, по-видимому, явно введено только Г. Кантором ([22], стр. 286); также именно Кантор первым определил возведение в степень A^B (*loc. cit.*, стр. 287); общее понятие бесконечного произведения принадлежит Уайтхеду ⟨A. N. Whitehead⟩ (*Amer. Journ. of Math.*, 24 (1902), 369). Использование графиков соотношений достаточно ново; если исключить, конечно, классический случай числовых функций действительных переменных, оно, кажется, впервые появляется у итальянских геометров, а именно у Сегре ⟨C. Segre⟩ в его работе об алгебраических соответствиях.

[3]) Для *каждого* соотношения, полученного из одного или нескольких заданных соотношений применением наших кванторов, в этом исчислении пришлось бы вводить обозначение ad hoc, типа обозначений $\overset{-1}{G}$ и $G_1\circ G_2$ (см., например, [36б]).

Замысел Фреге [42б и в] состоял в обосновании арифметики при помощи логики, формализованной в виде „записи понятий“ (Begriffschrift), и мы вернемся в дальнейшем к способу, которым он определяет натуральные числа. Его труды характеризуются крайней точностью и тщательностью в анализе понятий; именно в силу этой тенденции он вводит многочисленные различения, получившие большое значение в современной логике: например, он первый различает формулировку высказывания и утверждение, что это высказывание истинно, соотношение принадлежности и соотношение включения, объект x и множество $\{x\}$, состоящее из этого единственного объекта, и т. д. Его формализованная логика, содержащая не только „переменные“ в смысле, употребляемом в математике, но и „пропозициональные переменные“, представляющие неопределенные соотношения и способные подвергаться действию кванторов, должна была позже (пройдя через сочинение Рассела и Уайтхеда) составить основное орудие метаматематики. К сожалению, применяемые им символы были мало выразительны, ужасающей типографской сложности и очень далеки от практики математиков; все это оттолкнуло последних и значительно снизило влияние Фреге на современников.

Цель Пеано ⟨Peano⟩ была одновременно более обширной и более практичной; дело касалось издания „Формуляра математики“, написанного полностью на формализованном языке и содержащего не только математическую логику, но и все результаты наиболее важных разделов математики. Быстрота, с которой ему удалось осуществить свой честолюбивый замысел с помощью плеяды сотрудников-энтузиастов [Вайлати ⟨Vailati⟩, Пиери ⟨Pieri⟩, Падоа ⟨Padoa⟩, Вакка ⟨Vacca⟩, Виванти ⟨Vivanti⟩, Фано ⟨Fano⟩, Бурали-Форти ⟨Burali-Forti⟩], свидетельствует о превосходном качестве принятой им символики: неотступно следящий за обычной практикой математиков, вводящий многочисленные, хорошо подобранные символы для сокращения, его язык остается, кроме того, достаточно легко читаемым благодаря в особенности остроумной системе замены скобок разделительными точками [42в]. Многие обозначения Пеано приняты сегодня большинством математиков: укажем $\in$, $\supset$ (но в противоположность современному употреблению в смысле „содержится“ или „имплицирует“ [1])), $\cup$, $\cap$, $A - B$ (множество разностей $a - b$, где $a \in A$ и $b \in B$). С другой стороны, именно в „Формуляре“ мы впервые находим развитый анализ общего понятия функции, понятий образа [2]) и полного прообраза и замечание, что последовательность есть не что иное, как функция, определенная в $\mathbf{N}$. Но употребление кванторов у Пеано подчинено стеснительным ограничениям (по существу, в его системе кванторы можно навешивать только на соотношения вида $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ или $A = B$). Кроме того, почти фанатическое усердие некоторых из его учеников легко подавало повод к насмешкам; критика, часто несправедливая, в частности критика Пуанкарэ ⟨H. Poincaré⟩, нанесла чувствительный удар школе Пеано и явилась препятствием для распространения его учения в математическом мире.

[1]) Это хорошо показывает, до какой степени укоренилась даже у него старая привычка мыслить скорее „содержанием“, нежели „объемом“.

[2]) По-видимому, это понятие было введено Дедекиндом в его работе „Was sind und was sollen die Zahlen“, о которой мы будем говорить позже ([42], т. III, стр. 348).

Благодаря Фреге и Пеано появились основные элементы употребляемых в настоящее время формализованных языков. Самым общеизвестным из них, без сомнения, является язык, созданный Расселом и Уайтхедом в их капитальном сочинении „*Principia Mathematica*“ и счастливо соединяющий точность Фреге и удобство системы Пеано [38]. Большинство современных формализованных языков отличается от него только модификациями второстепенной важности, связанными с упрощением его употребления. Среди наиболее остроумных приведем „функциональную“ запись соотношений (например, $\in xy$ вместо $x \in y$), придуманную Лукасевичем ⟨Lukasiewicz⟩, благодаря которой можно полностью обойтись без скобок; но наибольший интерес, несомненно, представляет введение Гильбертом ⟨Hilbert⟩ символа τ, которое позволило рассматривать кванторы $\exists$ и $\forall$ как сокращающие знаки, избежать введения „универсального“ функционального символа ι Пеано и Рассела (применимого только к функциональным соотношениям) и, наконец, избавило от необходимости формулировать в теории множеств аксиому выбора [(15a), стр. 183 [1])].

Понятие истины в математике

Математики всегда были уверены, что они доказывают „истины“ или „истинные высказывания“; такое убеждение может иметь, очевидно, только чувственный или метафизический характер и, встав на почву математики, невозможно ни оправдать его, ни даже придать ему смысл, отличный от тавтологии. История понятия истины в математике относится, таким образом, к истории философии, а не к истории математики; но эволюция этого понятия оказала неоспоримое влияние на эволюцию математики и поэтому мы не можем обойти его молчанием.

Прежде всего заметим, что столь же редко приходится видеть математика, обладающего высокой философской культурой, сколь и философа, широко знакомого с математикой; воззрения математиков на вопросы философского порядка, даже когда эти вопросы относятся к их науке, чаще всего представляют собой взгляды, полученные из вторых или из третьих рук, происходя от источников сомнительной ценности. Но именно поэтому эти-то средние взгляды

[1]) Заметим, что то, что Гильберт обозначает там через $\tau_x(A)$, было в гл. I обозначено через τ_x (не A).

и интересуют историка математики по меньшей мере так же, как и оригинальные воззрения таких мыслителей, как Декарт или Лейбниц (приводим двух из тех, которые были также математиками первого порядка), Платон (который был по крайней мере в курсе математики своего времени), Аристотель или Кант (о которых этого уже не скажешь).

Традиционное понятие математической истины восходит к эпохе Возрождения. В этом понятии не делалось еще большой разницы между объектами, изучаемыми математикой, и объектами, изучаемыми естественными науками; и те и другие познаваемы и человек подчиняет их себе при помощи одновременно интуиции и рассуждений; невозможно подвергать сомнению ни интуицию, ни рассуждения, которые только тогда могут привести к ошибке, когда их употребляют не так, как полагается. *„Нужно было бы*, — говорит Паскаль, — *иметь совершенно неправильный ум, чтобы дурно рассуждать о принципах столь значительных, что почти невозможно, чтобы они ускользали* ([33], т. XII, стр. 9). Декарт, у своей печки[1]), пришел к убеждению, что *„только математикам удалось найти некоторые доказательства, т. е. некоторые точные и очевидные соображения“* ([20], т. VI, стр. 19[2])) и это (если ограничиться его рассказом) задолго до построения метафизики, в которой говорил: *„То, что я с недавних пор принял за правило, а именно, что вещи, которые мы постигаем очень ясно и очень отчетливо, суть истинные, гарантировано лишь тем, что Бог есть или существует и что он является совершенным существом“* [[20], т. VI, стр. 38[3])]. Хотя Лейбниц и возражал Декарту, что не видно, каким образом распознается, что некоторая идея „ясна и отчетлива“[4]), он сам также рассматривал аксиомы, как очевидные и неизбежные следствия определений, как только мы понимаем смысл входящих в них слов[5]).

[1]) Во Франции распространено предание, что Декарт был очень теплолюбивым и писал свои работы, сидя у натопленной печки. — *Прим. перев.*

[2]) Русский перевод, стр. 23. — *Прим. ред.*

[3]) Русский перевод, стр. 37. — *Прим. ред.*

[4]) *„Те, которые дали нам методы*, — говорил он по этому поводу, — *без сомнения дают нам и прекрасные предписания, но не способ их выполнения“* ([27б], т. VII, стр. 21). И в другом месте, высмеивая декартовы правила, он сравнивал их с рецептами алхимиков: *„Возьми, что нужно, проделай, что должно, и получишь, что желаешь!“* ([27б], т. IV, стр. 329).

[5]) В этом вопросе Лейбниц находится еще под влиянием схоластов; он всегда представляет себе высказывания как устанавливающие среди понятий отношения „субъекта“ к „предикату“. Как только понятия будут разложены на „примитивные“ (это, как мы видели, является одной из основных его идей), все сводится, по Лейбницу, к проверке соотношений „включения“ при помощи того, что он называет „тождественными аксиомами“ (главным образом, высказывания $A = A$ и $A \subset A$), и принципа „подстановки эквивалентных“ (если $A = B$, можно везде заменить A на B — наша схема S6 из гл. I, § 5) ([26], стр. 184—206). По этому поводу интересно заметить, что в соответствии со своим желанием все свести к логике и „доказать все, что доказуемо“, Лейбниц доказывает симметричность и транзитивность соотношения равенства, исходя из аксиомы $A = A$ и принципа подстановки эквивалентных, получая, таким образом, в основном доказательства, которые мы дали в гл. I, § 5 ([27а], т. VII, стр. 77—78).

Не следует, впрочем, забывать, что на языке той эпохи математика содержала многие науки, которые больше к ней не причисляются, иногда вплоть до инженерного искусства; и в доверии, которое она внушала, играл большую роль поразительный успех ее приложений к „натуральной философии“, к „механическим искусствам“, к навигации.

При этих взглядах аксиомы не более могут быть подвергнуты обсуждению или сомнению, чем правила рассуждения; самое большее, можно предоставить каждому, следуя его предпочтению, выбирать, рассуждать ли „в манере древних“ или давать свободную волю своей интуиции. Выбор исходной точки также есть вопрос индивидуального предпочтения и можно наблюдать появление многочисленных „изданий“ Эвклида, где прочный логический остов *Начал* причудливо изменен; излагаются куски исчисления бесконечно малых, рациональной механики, изложение как будто дедуктивное, но база его обоснована в высшей степени плохо; и Спиноза, возможно, искренне выдавал свою *Этику* за доказательство на манер геометров („more geometrico demonstrata“[1])). Хотя в XVII веке трудно найти двух математиков, согласных друг с другом по какому-либо вопросу, хотя споры каждодневны, нескончаемы и язвительны, понятие истины тем не менее не обсуждается. *„Существует лишь одна истина о каждой вещи*, — говорит Декарт, — *и кто нашел ее, знает о ней все, что можно знать“* ([20], т. VI, стр. 21[2])).

Несмотря на то, что никакого греческого математического текста великой эпохи, посвященного этим вопросам, не сохранилось, вероятно, взгляды греческих математиков на этот предмет были гораздо более гибкими. Только благодаря опыту правила рассуждения могли быть разработанными до такой степени, чтобы внушать полное доверие; прежде чем их можно было рассматривать стоящими выше всякого обсуждения, необходимо было пройти через много поисков и паралогизмов. Воображать, что те самые „аксиомы“, которые Паскаль считал самыми очевидными (и которые он по легенде, распространявшейся его сестрой, якобы с безошибочным инстинктом, самостоятельно открыл в детстве), не делались предметом долгих споров, значило бы также недооценивать критического духа греков, их вкуса к дискуссиям и софистике. В области, не относящейся, собственно говоря, к геометрии, парадоксы Элеатов сохранили для нас некоторые следы этих споров; и Архимед, когда он заметил ([2], стр. 265), что его предшественники во многих обстоятельствах пользовались аксиомой, которую мы привыкли называть его именем, добавил, что

[1]) Доказанную геометрическим способом (лат.). — *Прим. ред.*

[2]) Русский перевод, стр. 24. — *Прим. ред.*

то, что было доказано с помощью этой аксиомы, *„было признано не в меньшей степени, чем то, что было доказано без нее“*, и что ему достаточно, чтобы его собственные результаты были признаны на том же основании. Платон в соответствии со своими метафизическими воззрениями представлял математику как способ достижения „истины в себе“, а объекты, о которых она рассуждает, как имеющие собственное существование в мире идей; это не уменьшает точности, с которой он характеризовал математический метод в известном отрывке из „Республики“: *„Те, которые занимаются геометрией и арифметикой,... предполагают четное и нечетное, три рода углов; они рассуждают о них, как о известных вещах; один раз предположив это, они считают, что им уже больше нет нужды отчитываться в этом ни самим себе, ни другим,* [рассматривая его] *как ясное каждому; и, исходя из этого, они действуют по порядку, чтобы с общего согласия прийти к цели, поставленной перед их поисками“* (Книга VI, 510c — e). Итак, доказательство состоит, прежде всего, из исходной точки, представляющей нечто произвольное (хотя и „ясное каждому“), дальше которой, говорит он немного ниже, мы не пытаемся идти; затем действие, проходящее по порядку последовательность промежуточных этапов; наконец, на каждом шагу согласие собеседника, гарантирующее правильность рассуждения. Следует добавить, что, как только аксиомы установлены, никакое новое обращение к интуиции в принципе не допускается: Прокл, цитируя Гемина, напомнил, что *„у самих пионеров этой науки научились мы совсем не принимать в расчет просто правдоподобных заключений, когда речь идет о рассуждениях, должных составить часть нашей системы геометрии“* ([44a], т. I, стр. 203).

Итак, именно опыту и огню критики мы обязаны выработкой правил математического рассуждения; и если верно, как это правдоподобно утверждали[1]), что Книга VIII Эвклида сохранила нам часть арифметики Архита, не удивительно увидеть в ней несколько педантичное отсутствие гибкости рассуждений, появляющееся каждый раз во всякой математической школе, в которой открывают или думают, что открывают „строгость“. Но, однажды введенные в математическую практику, эти правила рассуждения, по-видимому, никогда, вплоть до совсем недавнего времени, не подвергались сомнению; хотя у Аристотеля и стоиков некоторые из этих правил выводились из других по схемам рассуждения, исходные правила всегда принимались как очевидные. К тому же, дойдя до „гипотез“, „аксиом“, „постулатов“, дававших, как им казалось, солидное основание науке своего времени (например, таких, которые должны были быть представленными в первых „Началах“, приписываемых традицией Гиппократу Хиосскому, 450 г. до н. э.), греческие математики классического периода посвятили, видимо, свои усилия более открытию новых результатов, чем критике этих оснований, которая в то время не могла не быть бесплодной; и, отложив всякие метафизические заботы в сторону, математики достигли общего согласия об основах их науки, о чем свидетельствует цитированный выше текст Платона.

С другой стороны, греческие математики, по-видимому, не надеялись на возможность истолкования „первоначальных понятий“, служивших им исходной точкой, — прямой линии, поверхности, отношения величин; если они и дают им „определения“, то это, очевидно, для очистки совести, не питая иллюзий относительно их значимости. Само собой разумеется, что зато относительно определений не „первоначальных понятий“ (определений, часто называемых „номинальными“ и играющих ту же роль, что и наши „сокращающие символы“) греческие философы и математики имели совершенно ясные представления. Несомненно, именно по этому поводу впервые явно возникает вопрос о „существовании“ в математике. Аристотель не преминул заметить, что определение не влечет существования определяемой вещи и что, кроме этого, нужен либо постулат, либо доказательство. Без сомнения, его наблюдение было выведено из практики математиков; во всяком случае Эвклид позаботился о постулировании существования круга и о доказательстве существования равнобедренного треугольника, параллельных, квадрата и т. д., по мере того как он вводит их в свои рассуждения ([44a], Книга 1); эти доказательства являются „конструкциями“; иначе говоря, он предъявляет, опираясь на аксиомы, математические объекты и доказывает о них, что они удовлетворяют проверяемым определениям.

Таким образом, мы видим, что греческая математика в классическую эпоху пришла к некоторой эмпирической уверенности (каковы бы ни были ее метафизические основы у того или иного философа); хотя и не было осознано, что можно ставить под вопрос правила рассуждения, успех греческой науки и чувство несвоевременности критической ревизии сильно способствуют доверию, которое вызывают аксиомы в собственном смысле слова, доверию, очень похожему на то (также почти неограниченное) доверие, которое в прошлом веке связывалось с принципами теоретической физики. Именно это, впрочем, внушает школьная поговорка „nihil est in intellectu quod non prius fuerit in sensu“[1]), против которой, как не дающей достаточно твердого основания тому, что он хотел бы извлечь из применения разума, справедливо восстает Декарт.

Нужно дойти до начала XIX века, чтобы увидеть, как математики возвращаются от высокомерия такого человека, как Декарт (не говоря уж о высокомерии такого, как Кант, или такого, как

[1]) См. van der Waerden B. L., Die Arithmetik der Pithagoreer, *Math. Ann.*, CXX (1947), 127—153.

[1]) Ничего такого нет в разуме, чего прежде не существовало бы в чувстве (лат.). — *Прим. ред.*

Гегель, — последний, как и следует, несколько отстает от науки своего времени[1])), к столь же гибкой позиции, как и позиция греков. Первый удар этим классическим концепциям нанесло построение в начале века гиперболической неэвклидовой геометрии Гауссом, Лобачевским и Бойаи. Мы не собираемся подробно излагать здесь генезис этого открытия, результата многочисленных бесплодных попыток доказать постулат о параллельных (см. Исторический очерк к книге II, гл. IX). В то время его влияние на принципы математики не было, по-видимому, столь глубоко, как это иногда говорят. Оно просто потребовало отказа от претензий предшествующего столетия на „абсолютную истинность" эвклидовой геометрии и тем более от лейбницевской точки зрения об определениях, влекущих аксиомы; эти последние вовсе не кажутся теперь „очевидными", это скорее гипотезы и речь идет о проверке, приспособлены ли они к математическому представлению чувственного мира. Гаусс и Лобачевский считали, что спор между различными возможными геометриями может быть решен опытом ([28], стр. 76). Такова же точка зрения Римана, который в своей знаменитой диссертационной лекции „*О гипотезах, лежащих в основании геометрии*" ставит себе целью дать общее математическое обрамление различным естественным явлениям: „*Остается еще выяснить*, — говорит он, — *обеспечиваются ли опытной проверкой эти простые отношения, и если обеспечиваются, то в какой степени и в каком объеме*" ([39], стр. 284[2])). Но это — задача, которая, очевидно, не имеет ничего общего с математикой; и ни один из предыдущих авторов не сомневается, по-видимому, в том, что даже если некоторая „геометрия" не соответствует экспериментальной действительности, ее теоремы тем не менее столь же остаются „математическими истинами"[3]).

Во всяком случае, если это так, то, разумеется, не неограниченной вере в классическую „геометрическую интуицию" следует приписывать такое убеждение; описание, которое Риман старался дать „n-кратно протяженным многообразиям", предмету своей работы, опирается на „интуитивные"[4]) соображения только для оправдания введения „локальных координат"; начиная с этого момента, он явно чувствует себя на твердой почве, а именно на почве Анализа. Но этот последний основан в конечном счете на понятии действительного числа, остававшемся до сих пор на крайне интуитивном уровне; к тому же развитие Теории функций привело в этом вопросе к весьма смущающим результатам: с исследований самого Римана по интегрированию и в особенности с примеров кривых без касательной, построенных Больцано и Вейерштрассом, начинается в математике всевозможная патология. В течение века мы видели столько чудовищ этого рода, что уже немного пресытились, и нужно собрать самые несуразные тератологические свойства, чтобы еще нас удивить. Но эффект, произведенный ими на большинство математиков XIX века, распространялся от отвращения до растерянности: „*Каким образом*, — спрашивает себя А. Пуанкаре, — *интуиция могла обманывать нас до такой степени?*" ([37б], стр. 19[1])); и Эрмит (не без капли юмора, которую, кажется, не все комментаторы этой знаменитой фразы заметили) заявляет, что он „*с ужасом и омерзением отворачивается от этой жалкой язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производной*" ([38], т. II, стр. 318). Самое главное, нельзя было отнести эти, столь противные здравому смыслу явления на счет плохо выясненных понятий, как во времена „неделимых", так как они появились после реформы Больцано, Абеля и Коши, позволившей обосновать понятие предела столь же строго, как была обоснована теория отношений. Таким образом, винить следовало именно грубый и неполный характер нашей геометрической интуиции и понятно, что с этих пор она была с полным основанием дискредитирована как средство доказательства.

Констатация этого неизбежно должна была оказать влияние на классическую математику, и прежде всего на геометрию. Какое бы уважение к аксиоматическому построению Эвклида ни проявляли, в нем с самой античности находили не один недостаток. Из них постулат о параллельных был предметом наибольшего числа критических замечаний и попыток доказательства; но последователи и комментаторы Эвклида пытались также доказать и другие постулаты (а именно постулат о равенстве прямых углов) или признавали несовершенство некоторых определений, как, например, определений прямой и плоскости. В XVI веке Клавий ⟨Clavius⟩, издатель *Начал*, заметил отсутствие постулата, гарантирующего существование четвертого пропорционального; Лейбниц, со своей стороны, заметил, что Эвклид пользовался геометрической интуицией, явно этого не оговаривая, например, когда он допускал (*Начала*, Книга 1, предл. 1), что два круга, из которых каждый проходит через центр другого, имеют общую точку ([27б], т. VII, стр. 166). Гаусс (сам не отказывающийся от использования подобных топологических рассмотрений) обращает внимание на роль, которую в эвклидовых построениях играет понятие точки (или прямой), расположенной „между" двумя другими, понятие, которое, однако, не было определено ([11], т. VIII,

[1]) В своей диссертации он, в тот самый год, когда открыли восьмую планету, „доказывает", что их может быть только семь.

[2]) Стр. 290 русского издания. — *Прим. ред.*

[3]) Ср. аргументы Пуанкаре в пользу „простоты" и „удобства" эвклидовой геометрии ([37а], стр. 67) и тот анализ, при помощи которого он несколько позже приходит к заключению, что опыт не дает абсолютного критерия для выбора одной геометрии вместо другой в качестве обрамления естественных явлений природы.

[4]) Само слово это оправдано только для $n \leqslant 3$; для больших значений n речь в действительности идет о рассуждении по аналогии.

[1]) Стр. 15 русского издания (в котором эта фраза приведена в неверном переводе). — *Прим. ред.*

стр. 222). Наконец, использование перемещений — именно в „признаках равенства треугольников“, — долгое время допускаемое как само собой разумеющееся [1]), должно было вскоре подвергнуться критике XIX века, как также основанное на несформулированных аксиомах. Таким образом, в период с 1860 по 1885 год мы пришли к различным частичным ревизиям начал геометрии [Гельмгольц, Мерэй ⟨Méray⟩, Уель ⟨Houël⟩], направленным на заполнение некоторых из этих пробелов. Но только у М. Паша [34] отказ от всякого обращения к интуиции становится ясно сформулированной и выполняемой с совершенной строгостью программой. Успех его начинания доставил ему вскоре многочисленных конкурентов, которые, главным образом между 1890 и 1910 годами, дали довольно различные оформления аксиом эвклидовой геометрии. Самыми знаменитыми из этих сочинений были труды Пеано, написанные на его символическом языке [29б], и особенно „Grundlagen der Geometrie“ Гильберта [15], вышедшая в 1899 году, книга, которая по ясности и глубине изложения сразу же с полным основанием стала своего рода хартией современной аксиоматики, вплоть до того, что заставила забыть своих предшественников. И действительно, не ограничившись приведением полной системы аксиом для эвклидовой геометрии, Гильберт классифицирует эти аксиомы по нескольким группам различной природы и стремится определить точную силу каждой из этих групп аксиом, не только получая логические следствия каждой из них отдельно, но и обсуждая еще различные „геометрии“, получаемые выбрасыванием или модифицированием некоторых из этих аксиом (геометрии, по отношению к которым геометрии Лобачевского и Римана являются не более чем частными случаями [2])); таким образом, в области, рассматриваемой до тех пор в качестве одной из наиболее близких к чувственной действительности, он ясно выявил свободу, которой располагает математик в выборе своих постулатов. Несмотря на замешательство, вызванное у многих философов этими „метагеометриями“ со странными свойствами, положения „Grundlagen“ были вскоре почти единодушно приняты математиками; А. Пуанкаре, которого вряд ли можно заподозрить в благосклонном отношении к формализму, признает в 1902 году, что аксиомы геометрии суть соглашения, для которых понятие „истины“, как его понимают обычно, не имеет смысла ([37а], стр. 66—67). Таким образом, „математическая истина“ пребывает исключительно в логической дедукции из посылок, устанавливаемых

[1]) Следует, однако, заметить, что еще в XVI веке комментатор Эвклида Пелетье ⟨J. Peletier⟩ возражал против этого способа доказательства примерно в тех же выражениях, что и современные критики ([44], т. I, стр. 249).

[2]) По-видимому, больше всего поразила современников „неархимедова“ геометрия, т. е. геометрия, основным телом которой является неархимедовски упорядоченное (коммутативное или нет) тело; в коммутативном случае эта геометрия была введена за несколько лет до этого Веронезе (*Fondamenti di geometria*, Padova, 1891).

путем произвольного задания аксиом. Как мы увидим дальше, законность правил рассуждения, по которым производились эти дедукции, сама должна была вскоре быть подвергнута сомнению, что привело к полному преобразованию основных концепций математики.

Объекты, модели, структуры

А) *Математические объекты* [1]) *и структуры.* С античности до XIX века существует общее согласие по вопросу о том, что является основными объектами математиков; это те самые объекты, которые упоминает Платон в цитированном выше отрывке: числа, величины и фигуры. Хотя вначале и нужно добавлять к ним объекты и явления, которыми занимаются механика, астрономия, оптика и музыка, эти „математические“ дисциплины всегда ясно отделены у греков от арифметики и геометрии, а начиная с Возрождения, они довольно быстро возводятся в ранг независимых наук.

Каковы бы ни были философские оттенки, в которые понятие математических объектов окрашивалось у того или иного математика или философа, имеется по крайней мере один пункт, в котором они единодушны: это то, что эти объекты нам *даны* и не в нашей власти приписывать им произвольные свойства так же, как физик не может изменить какое-либо природное явление. Правду сказать, составной частью этих воззрений, несомненно, являются реакции психологического порядка, в которые нам не следует углубляться, но которые хорошо знакомы каждому математику, когда он впустую тратит силы, стараясь поймать доказательство, беспрестанно, как ему кажется, ускользающее. Отсюда до приравнивания этого сопротивления обстоятельствам, которые противопоставляет нам внешний мир, — только один шаг; и даже сегодня не один математик, афиширующий непримиримый формализм, в глубине души охотно подписался бы под следующим признанием Эрмита: „*Я полагаю, что числа и функции Анализа не являются произвольным созданием нашего ума; я думаю, что они существуют вне нас с такой же необходимостью, как и предметы объективной реальности, и мы их встречаем или открываем и изучаем их так же, как физики, химики и зоологи*“ ([37], т. II, стр. 398).

В классической концепции математики не может быть и речи об уклонении от изучения чисел и фигур; но эта официальная доктрина, о своем согласии с которой каждый математик считает себя обязанным заявить, создает понемногу невыносимые затруднения по мере накопления новых идей. Замешательство алгебраистов перед отрицательными числами прекратилось лишь тогда, когда аналитическая гео-

[1]) В этом артикуле французским прообразом „математических объектов“ служат „objets mathématiques“; в других местах — „êtres mathématiques“. — *Прим. ред.*

метрия дала им удобную „интерпретацию“; но еще в середине XVIII века Даламбер (правда, убежденный „позитивист“), обсуждая этот вопрос в *Энциклопедии* [18], после целого ряда довольно запутанных объяснений внезапно испугался и ограничился заключением, что „*правила алгебраических операций над отрицательными величинами общеприняты всем светом и всюду признаются точными, какую бы идею, впрочем, с этими величинами ни связывали*“. Еще больший скандал был из-за мнимых чисел; ибо если это „невозможные “ корни и если (вплоть до 1800 года) не видно никакого способа их „интерпретировать“, как можно без противоречия говорить об этих неопределимых сущностях и, особенно, зачем их вводить? Даламбер хранил здесь осторожное молчание и даже не ставил этих вопросов, без сомнения, потому, что признавал, что он не смог бы ответить на них иначе, чем столетием раньше наивно сделал это Жерар ⟨Girard A.⟩ [21]: „*Могли бы сказать: для чего служат эти невозможные решения? Отвечаю, для трех вещей: для верности общего правила, чтобы не было других решений и ради своей полезности*“.

В анализе положение в XVIII веке было ничуть не лучше. Счастливым обстоятельством было появление в нужный момент аналитической геометрии, давшей великому творению XVII века — понятию функции — „представление“ в виде геометрической фигуры, сильно способствовавшей тем самым (у Ферма, Паскаля или Барроу) возникновению анализа бесконечно малых (см. Исторический очерк к книге IV, гл. I—II—III). Но известно зато, какие философско-математические споры должны были дать место понятиям бесконечно малой и неделимого. И хотя здесь Даламберу больше повезло и он признавал, что в „метафизике“ анализа бесконечно малых нет ничего иного, кроме понятия предела, он не больше своих современников мог понять истинный смысл разложений в расходящиеся ряды и объяснить парадокс получения точных результатов в конце вычислений с выражениями, лишенными всякой числовой интерпретации. Наконец, даже в области „геометрической достоверности“ эвклидовы рамки трещали: когда Стирлинг в 1717 году, не колеблясь, говорил, что некоторая кривая „имеет мнимую двойную точку в бесконечности“ [1]), трудно было бы, конечно, связать такой „объект“ с общепринятыми понятиями; и Понселе, который в начале XIX века, основав проективную геометрию, дал значительный толчок подобным идеям, еще довольствовался ссылкой в качестве оправдания на совершенно метафизический „принцип непрерывности“.

Понятно, что в этих условиях (и даже в момент, когда, как ни парадоксально, со все большей силой провозглашали „абсолютную истинность“ математики) понятие доказательства в течение XVIII века, по-видимому, все больше и больше затемняется, поскольку не в со-

¹) Stirling J., *Lineae tertii ordinis Newtonianae*... (1717).

стоянии фиксировать, подобно грекам, понятия, о которых рассуждают, и их основные свойства. Возврат к строгости, начавшийся в начале XIX века, внес некоторое улучшение в это положение вещей, но отнюдь не остановил волны новых понятий: в алгебре мы видим появление мнимостей Галуа, идеальных чисел Куммера, за которыми следуют векторы и кватернионы, n-мерные пространства, поливекторы и тензоры, не говоря уж о булевой алгебре. Несомненно, значительным успехом (как раз и позволившим вернуться к строгости, без потери предшествующих завоеваний) является возможность создания „моделей“ этих новых понятий в более классических терминах: идеальные числа или мнимости Галуа интерпретируются теорией сравнений, n-мерная геометрия оказывается (если угодно) просто чистым языком для выражения результатов алгебры „от n переменных“; а для классических мнимых чисел, геометрическое представление которых точками плоскости знаменует начало этого расцвета алгебры, вскоре уже появился выбор между этой геометрической „моделью“ и интерпретацией в терминах сравнений (см. Исторический очерк к книге II, гл. IV—V). Но математики начали, наконец, отчетливо чувствовать, что это противодействует естественному направлению их работ и что в математике должно быть позволено рассуждать об объектах, не имеющих никакой чувственной „интерпретации“: „*Сущность математики*, — говорил Буль в 1854 году, — *не состоит в том, чтобы заниматься идеями числа и величины*“ ([76], стр. 13) [1]). То же беспокойство заставило Грассмана в его „Ausdehnungslehre“ 1844 года представить свое исчисление в форме, в которой прежде всего были бы исключены понятия числа или геометрического объекта [2]). А несколько

¹) В этом отношении Лейбниц снова проявил себя как предтеча: „*Универсальная математика*, — говорил он, — *это, так сказать, логика воображения*“ и она должна изучать „*все, что в области воображения поддается точному определению*“ ([27в], стр. 348; ср. [26], стр. 290—291); и для него главной частью так понимаемой математики является то, что он называет „Комбинаторикой“ или „Искусством формул“, под чем он понимает главным образом науку об абстрактных соотношениях между математическими объектами. Но тогда как до сих пор соотношения, рассматривавшиеся в математике, почти исключительно были соотношениями величин (равенство, неравенство, пропорциональность), Лейбниц приводит много других типов соотношений, которые, по его мнению, должны были бы систематически изучаться математиками, как, например, соотношение включения или то, что он называет соотношением однозначного или многозначного „установления“ ⟨„détermination“⟩ (т. е. понятия отображения и соответствия) ([26], стр. 307—310). Много других современных идей по этому вопросу вышло из-под его пера: он замечает, что различные соотношения эквивалентности в классической геометрии имеют общие свойства симметричности и транзитивности; он излагал также понятие соотношения, совместимого с соотношением эквивалентности, и ясно указал, что произвольное соотношение не обязательно обладает этим свойством ([26], стр. 313—315). Разумеется, он здесь, как и везде, защищал употребление формализованного языка и даже вводит знак, который должен обозначать переменное соотношение ([26], стр. 301).

²) Нужно признать, что его весьма философского вида язык не очень был приспособлен, чтобы соблазнить большинство математиков, которые не-

позже Риман в своей вступительной лекции с самого начала заботился о том, чтобы при описании „n-кратно протяженных многообразий“ говорить не о „точках“, а о „способах задания“ (Bestimmungsweise), и подчеркивал, что в таком многообразии „метрические отношения“ (Massverhältnisse) „*могут быть исследуемы посредством отвлеченных величин и поставлены во взаимную связь с помощью формул; однако при некоторых предположениях их можно свести к таким отношениям, которые, будучи рассматриваемы каждое в отдельности, допускают геометрические представления, и следовательно, становится возможным результаты вычислений выражать в геометрической форме*“ ([39], стр. 276[1])).

Начиная с этого момента, выход аксиоматического метода на арену становится признанным фактом. Хотя еще в течение некоторого времени считали полезным проверять, когда это возможно, „абстрактные“ результаты геометрической интуицией, признавалось по крайней мере, что „классические“ объекты — не единственные, которые математики законно могли бы изучать. Дело в том, что — как раз по причине многочисленных возможных „интерпретаций“ или „моделей“ — было признано, что „природа“ математических объектов есть, в сущности, дело второстепенное и что довольно неважно, например, представили ли мы результат в виде теоремы „чистой“ геометрии или при помощи аналитической геометрии в виде алгебраической теоремы. Другими словами, сущность математики — это ускользающее понятие, которое до тех пор смогли выразить только неопределенными названиями вроде „*общего правила*“ или „*метафизики*“ — появляется как изучение соотношений между объектами, которые теперь (сознательно) познаются и описываются, исходя только из некоторых из своих свойств, а именно из тех, которые в качестве аксиом принимаются за основу их теории. Именно это ясно видел Буль в 1847 году, когда он писал, что математика изучает „*операции, рассматриваемые сами по себе, независимо от различных материй, к которым они могут быть приложены*“ ([7a], стр. 3). Ганкель ⟨Hankel⟩ в 1867 году, приступая к аксиоматизации алгебры, защищал математику, „*чисто интеллектуальную, чистую теорию форм, имеющую своим предметом не совокупность величин или их образов — чисел, но мысленных вещей* („Gedankendinge“), *которым могут соответствовать действительные объекты или отношения, хотя такое соответствие не обязательно*“ ([10], стр. 10). Кантор в 1883 году откликнулся на это требование „свободной математики“, провозгласив, что „*математика полностью свободна в своем развитии и ее понятия связаны только необходимостью быть непротиворечивыми и согласованными с понятиями, введенными ранее посредством точных определений*“ ([22], стр. 182). Наконец, пересмотр эвклидовой геометрии завершил распространение и популяризацию этих идей. Даже Паш, добивающийся еще некоторой „реальности“ для геометрических сущностей, признает, что на самом деле геометрия не зависит от их значения и представляет собой чистое изучение отношений между ними ([34], стр. 90); концепция, которую Гильберт довел до логического конца, подчеркнув, что сами названия основных понятий математической теории можно выбрать произвольно[1]), и которую Пуанкаре выразил, сказав, что аксиомы — это „замаскированные определения“, полностью ниспровергла, таким образом, схоластическую точку зрения.

...ловко себя чувствовали перед, например, следующей формулой: „*Чистая математика есть наука особого бытия, поскольку она рождена в мышлении*“ (Die Wissenschalt des *besonderen* Seins als eines durch das Denken *gewordenen*). Но контекст позволяет понять, что Грассман достаточно ясно понимал под этим аксиоматическую математику в современном смысле (за исключением того, что он, как ни странно, следовал Лейбницу, считая основами этой, как он говорит, „формальной науки“ определения, а не аксиомы); во всяком случае, он, подобно Булю, настаивает на том, что „*название науки о величинах не подходит к совокупности математических дисциплин*“ ([17], т. 1_1, стр. 22—23).

[1]) Стр. 283 русского издания. — *Прим. ред.*

Можно было бы, таким образом, пытаться сказать, что современное понятие „структуры“ выработалось в основном к 1900 году; в действительности, понадобилось еще тридцать лет ученичества, чтобы оно появилось в полном блеске. Конечно, нетрудно распознать структуры одного и того же рода, когда их природа достаточно проста; например, для структуры группы этого уровня достигли уже в середине XIX века. Но в то же время мы еще видим, как Ганкель боролся, не вполне достигая своей цели, за выделение общих идей тела и его расширения, которые он смог выразить только в виде полуметафизического „принципа перманентности“ [10] и которые определенно были сформулированы только Штейницем 40 годами позже. В этом деле особенно трудно было освободиться от впечатления, что математические объекты „даны“ нам *вместе со своей структурой*; и только достаточно долгая практика функционального анализа помогла современным математикам освоиться с идеей, что, например, существуют различные „естественные“ топологии на рациональных числах и различные меры на числовой прямой. Это разъединение окончательно осуществило переход к общему определению структур, такому, какое было дано в этой Книге.

B) *Модели и изоморфизмы.* Можно заметить, что мы неоднократно использовали понятие „модели“ или „интерпретации“ одной математической теории при помощи другой. Эта идея не нова; ее,

[1]) Согласно известному анекдоту, Гильберт охотно выражал эту идею, говоря, что можно было бы, ничего не меняя в геометрии, слова „точка“, „прямая“ и „плоскость“ заменить словами „стол“, „стул“ и „пивная кружка“. Любопытно, что уже у Даламбера можно найти предвосхищение этого остроумного выпада: „*Словам можно придать такой смысл, какой пожелаешь*, — пишет он в *Энциклопедии* ([17], статья Définition); — [можно было бы] *в крайнем случае, сделать элементы геометрии точными (но смешными), назвав треугольником то, что обычно называется кругом*“.

несомненно, можно видеть в беспрестанно возрождающемся проявлении глубокого чувства единства различных „математических наук". Если традиционное изречение первых пифагорейцев *„Все есть число"* считать подлинным, можно рассматривать его как след первой попытки сведения геометрии и алгебры того времени к арифметике. Хотя открытие иррациональностей, казалось, навсегда закрыло этот путь, реакцией, которую оно вызвало у греческих математиков, была вторая попытка синтеза на основе на этот раз геометрии со включением туда среди прочего методов решения алгебраических уравнений, унаследованных от вавилонян[1]). Известно, что эта концепция просуществовала вплоть до фундаментальной реформы Р. Бомбелли ⟨R. Bombelli⟩ и Декарта, сводившей всякую меру величины к мере длины (иначе говоря, действительному числу; см. Исторический очерк к Книге III, гл. IV). Но с созданием Декартом и Ферма аналитической геометрии снова проявляется первая тенденция — получается гораздо более тесное слияние геометрии и алгебры, но на этот раз на почве алгебры. Впрочем, Декарт тотчас идет дальше и говорит о существенном единстве *„всех наук, которые в общем называют Математикой... Хотя их объекты различны,* — говорит он, — *они остаются согласованными между собой в том, что рассматривают в этих объектах только различные связи или пропорции, которые в них находятся"* ([20], т. VI, стр. 19—20)[2]). Тем не менее эта точка зрения всего лишь стремилась сделать алгебру основной математической наукой; заключение, против которого сильно возражал Лейбниц, также занимавшийся, как мы видели, „Универсальной математикой", но в плане много более широком и уже совсем близком к современным идеям. Уточняя „согласованность", о которой говорил Декарт, он, по существу, впервые вводит в рассмотрение общее понятие изоморфии (которую он называет „подобие") и возможность „отождествления" изоморфных соотношений или операций; в качестве примера этого он приводит сложение и умножение ([26], стр. 301—303). Но эти смелые взгляды не нашли отклика у современников, и нужно дождаться развития алгебры, совершившегося к середине XIX века, чтобы увидеть начало осуществления того, о чем мечтал Лейбниц. Мы уже подчеркивали, что именно к этому времени появились многочисленные „модели" и стал привычным переход

[1]) Тем не менее арифметика остается вне этого синтеза; известно, что Эвклид, развив общую теорию пропорций между произвольными величинами, независимо развил теорию рациональных чисел, вместо того чтобы рассматривать их как частные случаи отношений величин.

[2]) По этому поводу довольно любопытно видеть, как Декарт сопоставлял арифметику и *„комбинации чисел"*, *„искусства ..., в которых наибольшую роль играет порядок, подобно искусствам ремесленников, делающих ткань или ковры, или искусствам женщин, вышивающих или плетущих кружева"* ([20], т. X, стр. 403), как бы предвидя современные работы по симметрии и ее связям с понятием группы (ср. Weyl H., *Symmetry*, Princeton Univ. Press, 1952).

от одной теории к другой простым изменением терминологии; самым ярким примером этого является, вероятно, двойственность в проективной геометрии, где частая в то время практика печатания теорем, „двойственных" одна другой, друг против друга в две колонки сыграла, безусловно, большую роль в осознании понятия изоморфии. С более технической точки зрения несомненно, что понятие изоморфных групп было известно Гауссу для абелевых групп, Галуа — для групп подстановок (см. Исторический очерк к Книге II, гл. I и II—III); в общем виде для произвольных групп оно было усвоено к середине XIX века[1]). Впоследствии каждая новая аксиоматическая теория естественно приводила к определению понятия изоморфизма; но только с современным понятием структуры было окончательно признано, что каждая структура несет в себе понятие изоморфизма и нет никакой нужды давать особое определение изоморфизма для каждого рода структуры.

C) *Арифметизация классической математики.* Все более и более распространявшееся употребление понятия „модели" дало также возможность осуществить в XIX веке то объединение математики, о котором мечтали пифагорейцы. В начале века целое число и непрерывная величина все еще казались столь же несовместимыми, как и в античности; действительные числа оставались связанными с понятием геометрической величины (по крайней мере, с понятием длины), и именно к последней обращались за „моделями" отрицательных и мнимых чисел. Даже рациональное число традиционно связывалось с идеей „деления" величины на равные части; только целые числа оставались в стороне в качестве *„исключительных продуктов нашего ума"*, как сказал Гаусс в 1832 году, противопоставляя их понятию пространства ([11], т. VIII, стр. 201). Первые усилия по сближению арифметики с анализом были направлены сначала на рациональные числа (положительные и отрицательные) и принадлежали Мартину Ому ⟨Martin Ohm⟩ (1822); около 1860 года они были возобновлены несколькими авторами, а именно Грассманом, Ганкелем и Вейерштрассом (в его неопубликованных лекциях); именно последнему, кажется, принадлежит идея получения „модели" положительных рациональных чисел или отрицательных целых чисел в виде классов пар натуральных целых чисел. Оставалось, однако, сделать самый важный шаг, а именно найти в теории рациональных чисел „модель" иррациональных чисел; к 1870 году эта задача получила первостепенную важность ввиду необходимости после открытия „патологических" явлений в анализе устранить всякий след геометрической

[1]) Само слово „изоморфизм" введено в теории групп в это же время; но сначала оно служит также для обозначения сюръективных гомоморфизмов, квалифицировавшихся как „мериэдрические изоморфизмы", тогда как изоморфизмы в собственном смысле слова назывались „голоэдрическими изоморфизмами"; эта терминология оставалась в употреблении вплоть до работ Э. Нётер (E. Noether).

интуиции и неясного понятия „величины“ в определении действительных чисел. Известно, что эта задача была решена в это время почти одновременно Кантором, Дедекиндом, Мерэем ⟨Méray⟩ и Вейерштрассом довольно различными методами (см. Исторический очерк к Книге III, гл. IV).

Начиная с этого времени целые числа стали фундаментом всей классической математики. Кроме того, „модели“, основанные на арифметике, приобретают еще большее значение с распространением аксиоматического метода и концепцией математических объектов как свободных творений разума. На самом деле на эту свободу, провозглашенную Кантором, было наложено ограничение — вопрос о „существовании“, который занимал уже греков и который ставился здесь гораздо более неотложно как раз потому, что всякое обращение к интуитивному представлению было теперь отброшено. Мы увидим дальше, центром какого философско-математического мальстрёма стало понятие „существования“ в первые годы XX века. Но в XIX веке этого еще нет и доказать существование какого-нибудь математического объекта с заданными свойствами — это просто, как и для Эвклида, значит „построить“ объект, имеющий указанные свойства. Для этого как раз и служили арифметические „модели“: как только действительные числа „интерпретированы“ в терминах целых чисел, это же имеет место благодаря аналитической геометрии для комплексных чисел и для эвклидовой геометрии; то же самое верно и для всех новых алгебраических объектов, введенных с начала века; наконец, — открытие, имевшее большой резонанс, — Бельтрами и Клейн ⟨Klein⟩ даже получили эвклидовы „модели“ неэвклидовых геометрий Лобачевского и Римана и, следовательно, „арифметизировали“ (тем самым полностью оправдав их) эти теории, вызвавшие при первом знакомстве столько недоверия.

D) *Аксиоматизация арифметики.* Линия развития должна была затем повернуть к основаниям самой арифметики и, действительно, это наблюдается около 1880 года. По-видимому, до XIX века не пытались определить сложение и умножение натуральных целых чисел иначе, чем прямым обращением к интуиции; только Лейбниц, верный своим принципам, явно указывал, что „истины“, столь „очевидные“, как $2+2=4$, не менее прочих допускают доказательство, если подумать об определениях входящих в них чисел ([27б], т. IV, стр. 403; ср. [26], стр. 203); и он никогда не рассматривает коммутативность сложения и умножения как само собой разумеющиеся[1]). Но дальше этих размышлений он по этому поводу не шел, и до середины XIX века никакого прогресса в этом направлении еще не

[1]) В качестве примера некоммутативных операций он указывал вычитание, деление и возведение в степень ([27б], т. VII, стр. 31); он как-то раз даже пытался ввести такие операции в свое логическое исчисление ([26], стр. 353).

происходило: сам Вейерштрасс, лекции которого сыграли большую роль в распространении „арифметизирующей“ точки зрения, не чувствовал, по-видимому, необходимости в логическом прояснении теории целых чисел. Первые шаги в этом направлении принадлежали, вероятно, Грассману, который в 1861 году ([17], т. II_2, стр. 295) дал определение сложения и умножения целых чисел и доказал их основные свойства (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность), используя только операцию $x \to x+1$ и принцип индукции. Последний принцип был впервые ясно изложен и употреблен в XVI веке итальянцем Мавролико ⟨Maurolico F.⟩ [29][1]) — хотя еще в Античности встречались более или менее сознательные его приложения — и широко использовался математиками с первой половины XVII века. Но только в 1888 году Дедекинд ([19], т. III, стр. 359—361) сформулировал полную систему аксиом для арифметики [эта система была воспроизведена 3 годами позже Пеано и известна обычно под его именем [35a]], содержащую, в частности, точную формулировку принципа индукции (который Грассман еще употребляет, явно не формулируя).

Казалось, что с этой аксиоматизацией достигнуто окончательное обоснование математики. В действительности, в тот самый момент, когда были ясно сформулированы аксиомы арифметики, она для многих математиков (начиная с самих Дедекинда и Пеано) уже утратила роль основной науки в пользу последней новинки среди математических теорий — теории множеств; и споры, развернувшиеся вокруг понятия целого числа, не могут быть оторваны от великого „кризиса оснований“ 1900—1930 годов.

Теория множеств

Можно сказать, что математики и философы всегда более или менее сознательным образом пользовались рассуждениями Теории множеств; но в истории развития их взглядов по этому предмету необходимо четко отделять все вопросы, связанные с идеей кардинального числа (и, в частности, с понятием бесконечности), от вопросов, ведущих только к понятиям принадлежности и включения. Эти последние наиболее интуитивны и, по-видимому, никогда не вызывали споров: именно на них легче всего можно основать теорию силлогизма (как это должны были показать Лейбниц и Эйлер) или аксиомы вроде „целое больше части“, не говоря уж о геометрических вопросах, касающихся пересечения кривых и поверхностей. Вплоть до конца XIX века разговор о множестве (или, у некоторых авторов, „классе“) объектов, обладающих тем или иным заданным свойством, не вызывал

[1]) См. также W. H. Bussey, The origin of mathematical induction, *Amer. Math. Monthly*, **24** (1917), 199.

никаких трудностей[1]); и знаменитое „определение", данное Кантором („*Под множеством мы понимаем объединение в одно целое хорошо различаемых объектов нашей интуиции или мысли*" [22], стр. 282), не вызвало в момент его публикации почти никаких возражений[2]). Однако положение в корне изменилось, как только к понятию множества начали примешивать понятия числа или величины. Вопрос о бесконечной делимости пространства (стоявший, несомненно, еще со времен первых пифагорейцев) привел, как известно, к значительным философским трудностям: от Элеатов до Больцано и Кантора математики и философы безуспешно бились над парадоксом конечной величины, составленной из бесконечного числа точек, лишенных величины. Нам было бы неинтересно излагать здесь, даже бегло, нескончаемые и страстные споры, которые вызывала эта проблема, создавшая особенно благоприятную почву для метафизических или теологических разглагольствований; отметим только ту точку зрения, которой со времен античности придерживалось большинство математиков. Эта точка зрения состоит главным образом в отказе от споров за отсутствием возможности разрешить их неопровержимыми средствами — позиция, которую мы вновь находим у современных формалистов: подобно последним, стремящимся устранить любое использование „парадоксальных" множеств (см. ниже стр. 333—334), классические математики тщательно избегали вводить в свои рассуждения „актуальную бесконечность" (т. е. множества, содержащие бесконечное число объектов, рассматриваемых, как существующие, по крайней мере мысленно, одновременно) и довольствовались „потенциальной бесконечностью", т. е. возможностью увеличения (или уменьшения, если речь идет о „непрерывной" величине) любой данной величины[3]). Хотя эта точка зрения содержала некоторую долю лицемерия[4]),

---

[1]) Выше мы видели, что Буль без колебаний ввел в свое логическое исчисление „Универсум" 1 — множество всех объектов; по-видимому, в свое время эти воззрения не критиковались, хотя Аристотель, приводя довольно темное доказательство их абсурдности, отвергает их ([1], Met. B, 3, 998*b*).

[2]) Кажется, Фреге был одним из немногих тогдашних математиков, возражавших, не без основания, против расплывчатости подобных „определений" ([42 в], т. 1, стр. 2).

[3]) Типичный пример такой концепции дает формулировка Эвклида: „*Для любого заданного количества простых чисел найдется простое число, их превосходящее*", которую сегодня мы выражаем, говоря, что множество простых чисел бесконечно.

[4]) Классически мы, очевидно, имеем право сказать, что точка принадлежит прямой, но вывести отсюда заключение, что прямая „составлена из точек", было бы нарушением табу актуальной бесконечности, и Аристотель посвятил длинные рассуждения оправданию этого запрета. Вероятно, чтобы избавиться от любых возражений этого рода, в XIX веке многие математики избегали говорить о множествах и систематически рассуждали „по содержанию"; например, Галуа говорил не о теле чисел, а только о свойствах, общих всем элементам такого тела. Даже Паш и Гильберт в своих аксиоматических представлениях эвклидовой геометрии еще воздержались от того, чтобы сказать, что прямые и плоскости суть множества точек; Пеано был единственным, кто в элементарной геометрии свободно пользовался языком Теории множеств.

она позволяла все же развить большую часть классической математики (включая теорию отношений и позже анализ бесконечно малых)[1]); она казалась также отличной опорой, особенно после споров по поводу бесконечно малых, и еще долго в XIX веке была почти повсеместно принятой догмой.

Первый зародыш общего понятия равномощности появляется в одном замечании Галилея ([9], т. VIII, стр. 78—80): он обращает внимание на то, что отображение $n \rightarrow n^2$ устанавливает взаимнооднозначное соответствие между натуральными числами и их квадратами и, следовательно, аксиома „целое больше части" не применима к бесконечным множествам. Но вместо того, чтобы положить начало разумному изучению бесконечных множеств, это замечание имело, по-видимому, только обратный эффект, усилив недоверие к актуальной бесконечности; это заключение было сделано уже самим Галилеем, и Коши цитирует его в 1833 году только для подтверждения своей позиции.

Потребности анализа — и в особенности углубленное изучение функций действительной переменной, продолжавшееся в течение всего XIX века, — положили начало тому, что впоследствии развилось в современную теорию множеств. Когда Больцано в 1817 году доказывал существование нижней грани множества, ограниченного снизу в $\mathbf{R}$, он, как и большинство его современников, рассуждал еще „содержательно", говоря не о произвольном множестве действительных чисел, а о произвольном свойстве этих последних. Но когда тридцатью годами позже он редактировал свои „Paradoxien des Unendlichen" [4] (опубликованы в 1851 году, через три года после его смерти), он без колебаний требовал права на существование для „актуальной бесконечности" и права говорить о произвольных мно-

---

[1]) Причину этого нужно, без сомнения, видеть в том обстоятельстве, что множества, рассматривающиеся в классической математике, принадлежат к небольшому числу простых типов и могут большей частью быть полностью описаны конечным числом числовых „параметров", так что их изучение сводится в конечном счете к изучению конечного множества чисел (так обстоит дело, например, с алгебраическими кривыми и поверхностями, из которых в течение долгого времени и составлялись в основном „фигуры" классической геометрии). До того, как прогресс анализа вынудил в XIX веке рассматривать произвольные подмножества прямой или $\mathbf{R}^n$, редко встречались множества, выходящие из предыдущих типов; например, Лейбниц, всегда оригинальный, привел в качестве „геометрического места точек" замкнутый диск без центра или (любопытным образом предчувствуя теорию идеалов) усматривал, что в арифметике целое число есть „род" множества его кратных, и заметил, что множество кратных числа 6 есть пересечение множества кратных числа 2 и множества кратных числа 3 ([27б], т. VII, стр. 292). С начала XIX века в алгебре и теории чисел привыкли к множествам этого последнего типа, как к классам квадратичных форм, введенным Гауссом, или к телам и идеалам, определенным Дедекиндом еще до канторовской революции.

жествах. В этой работе он определил общее понятие равномощности двух множеств и доказал, что два интервала, компактных в **R** и не сводящихся к одной точке, равномощны; он заметил также, что характеристичная разница между конечными и бесконечными множествами состоит в том, что бесконечное множество E равномощно подмножеству, отличному от E, но не дает никакого убедительного доказательства этому утверждению. Впрочем, общий тон этого сочинения гораздо более философский, чем математический; не отличая достаточно ясно понятие мощности множества от понятия величины или порядка бесконечности, Больцано потерпел неудачу в своих попытках образовать бесконечные множества все более и более возрастающей мощности и пришел к тому, что примешал к своим рассуждениям совершенно бессмысленные рассмотрения расходящихся рядов.

Именно гению Г. Кантора обязаны мы созданием Теории множеств такой, как мы ее понимаем сегодня. Его отправной точкой также был Анализ, и его работы по тригонометрическим рядам, вызванные работами Римана, естественно привели его в 1872 году к первому опыту классификации „исключительных“ множеств, появляющихся в этой теории[1], при помощи понятия последовательных „производных множеств“, которое он ввел по этому случаю. Без сомнения, именно эти исследования, а также его метод определения действительных чисел привели к тому, что Кантор начал интересоваться проблемами равномощности, ибо в 1873 году он заметил, что множество рациональных чисел (или множество алгебраических чисел) счетно; и мы видим, что в своей переписке с Дедекиндом, начавшейся около этого времени [23], он предлагает вопрос о равномощности множества целых и множества действительных чисел, который ему удается решить в отрицательную сторону несколькими неделями позже. Затем, с 1874 года его занимает проблема размерности, и в течение трех лет он тщетно пытается установить невозможность взаимно однозначного соответствия между **R** и $\mathbf{R}^n$ ($n > 1$), прежде чем приходит, к собственному изумлению[2], к определению такого соответствия. Под впечатлением этих результатов, столь же новых, сколь удивительных, он всецело посвятил себя теории множеств. В серии из 6 мемуаров, опубликованных в Mathematische Annalen между 1878 и 1884 годами, он одновременно занимался проблемами равномощности, теорией совершенно упорядоченных множеств, топологическими свойствами **R** и $\mathbf{R}^n$ и проблемой меры; и восхитительно видеть, с какой ясностью

---

[1]) Речь идет о множествах $E \subset \mathbf{R}$, таких, что если тригонометрический ряд $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{nix}$ сходится к 0 всюду, кроме точек множества E, то необходимо $c_n = 0$ для всех n ([22], стр. 99).

[2]) *„Я его вижу, но я в него не верю“*, — пишет он Дедекинду ([23], стр. 34; в тексте — по-французски).

выделяются мало-помалу в его руках понятия, которые, казалось, непоправимо были перепутаны в классическом понятии „континуума“. С 1880 года у него появилась идея о „трансфинитном“ итерировании образования „производных множеств“; но воплощение свое это идея нашла только двумя годами позже с введением вполне упорядоченных множеств, одного из самых оригинальных открытий Кантора, благодаря которому стало возможным приступить к детальному изучению кардинальных чисел и сформулировать „проблему континуума“ [22].

Столь смелые концепции, опрокидывающие двухтысячелетние традиции и ведущие к неожиданным и с виду парадоксальным результатам, не могли быть принятыми без сопротивления. И действительно, из всех влиятельных немецких математиков того времени Вейерштрасс был единственным, кто с некоторой благосклонностью следил за работами Кантора (своего бывшего ученика); другие ученые не разделяли этого отношения, и Кантор столкнулся с непримиримой оппозицией Шварца ⟨Schwarz⟩ и, особенно, Кронекера[1]). По-видимому, столь же постоянное напряжение, вызванное противодействием его идеям, сколь и бесплодные попытки доказать гипотезу континуума вызвали у Кантора первые симптомы нервной болезни, сказавшейся на его математической продуктивности[2]). По-настоящему он вновь приобрел интерес к Теории множеств только к 1887 году, а его последние публикации датируются 1895—1897 гг.; в них он развил в основном теорию совершенно упорядоченных множеств и исчисление ординальных чисел. В 1890 году он доказал также неравенство $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$; однако не только проблема континуума оставалась (и остается еще по сей день) без ответа; в теории кардинальных чисел имелся более серьезный пробел, ибо Кантор не смог установить существования соотношения полного порядка между произвольными кардинальными числами. Этот пробел был заполнен частично теоремой Ф. Бернштейна (1897), показавшего, что соотношения $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ влекут $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$[3]), и особенно теоремой Цермело [45a], доказавшего существование полного порядка на любом множестве — теорема, с 1883 года предполагавшаяся Кантором ([22], стр. 169).

Между тем Дедекинд с самого начала не переставал с неослабевающим интересом следить за исследованиями Кантора; но в то время как последний концентрировал свое внимание на бесконечных мно-

---

[1]) Современники Кронекера часто упоминали о его теоретической позиции в основаниях математики; следует предположить, что она выражалась более явно при личных контактах, чем в его публикациях (где, что касается роли натуральных целых чисел, следует взять довольно банальные заметки об „арифметизации“, относящиеся к 1880 году) [см. H. Weber, Leopold Kronecker, *Math. Ann*, **43** (1893), 1—25, в частности, стр. 14—15].

[2]) Об этом периоде жизни Кантора см. A. Schoenflies, *Acta Math.*, **50** (1928), 1—23.

[3]) Эта теорема была получена Дедекиндом еще в 1887 году, но доказательство ее не было опубликовано ([19], т. III, стр. 447).

жествах и их классификации, Дедекинд продолжал свои собственные размышления о понятии числа (которые уже привели его к определению иррациональных чисел при помощи „сечений"). В своей брошюре *Was sind und was sollen die Zahlen*, опубликованной в 1888 году, но относящейся во всем существенном к 1872—1878 годам ([19], т. III, стр. 335), он показывает, каким образом понятие натурального числа (на котором, как мы видели, в конце концов была основана вся классическая математика) само могло бы быть выведено из основных понятий теории множеств. Изучая (без сомнения, впервые в столь явной форме) элементарные свойства произвольных отображений одного множества в другое (Кантор до сих пор пренебрегал ими и интересовался только взаимно однозначными соответствиями), он ввел для произвольного отображения f множества E в себя понятие „цепи" элемента $a \in E$ относительно f, как пересечения множеств $K \subset E$, таких, что $a \in K$ и $f(K) \subset K$[1]. Затем он взял за *определение* бесконечного множества E факт существования такого взаимно однозначного отображения φ множества E в E, что $\varphi(E) \neq E$[2]; если, кроме того, существуют такое отображение φ и такой элемент $a \notin \varphi(E)$, для которых E является цепью элемента a, Дедекинд говорил, что E „просто бесконечное", заметил, что „аксиомы Пеано" в этом случае выполняются, и показал (раньше, чем Пеано), как, исходя из этого, получаются все элементарные теоремы арифметики. В его изложении не хватает только аксиомы бесконечности, которую Дедекинд (вслед за Больцано) надеялся доказать, рассматривая „мир человеческих мыслей" („Gedankenwelt") как множество[3].

[1]) На аналогичном понятии основано второе доказательство, которое Цермело дал своей теореме ([40б]; см. гл. III, § 2, упр. 6).

[2]) Мы видели, что Больцано уже заметил это характеристическое свойство бесконечных множеств, но его работа (по-видимому, довольно мало распространенная в математических кругах) была не известна Дедекинду в то время, когда он писал „Was sind und was sollen die Zahlen".

[3]) Другой метод определения понятия натурального числа и установления его основных свойств был предложен Фреге в 1884 году [42б]. Сначала он пытался придать понятию кардинального числа множества смысл более точный, чем Кантор; к этому времени последний определил только понятия равномощных множеств и множества, имеющего не бóльшую мощность, чем другое, а определение „кардинального числа", данное им позже ([22], стр. 282), было почти столь же темным и бесполезным, как и эвклидово определение прямой. Фреге, всегда заботившийся о точности, взял за определение кардинального числа множества A множество всех множеств, равномощных множеству A ([19б], § 68); затем, определив $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} + 1$ для любого кардинального числа (§ 76), он рассматривал множество C всех кардинальных чисел и определял отношение „$\mathfrak{b}$ есть φ-наследник для $\mathfrak{a}$", как означающее, что $\mathfrak{b}$ принадлежит к пересечению всех множеств $X \subset C$, таких, что $\varphi(\mathfrak{a}) \in X$ и $\varphi(X) \subset X$ (§ 79). Наконец, он определял натуральное число как φ-наследник для 0 (§ 83; все эти определения, разумеется, Фреге выражал на его языке „логики понятий"). К сожалению, эта конструкция оказалась негодной, поскольку множество C или множество всех множеств, равномощных множеству A, является „парадоксальным" (см. ниже).

С другой стороны, арифметические работы (а именно работы по теории идеалов) привели Дедекинда к рассмотрению понятия упорядоченного множества в более общем, чем у Кантора, аспекте. В то время как этот последний ограничивался исключительно совершенно упорядоченными множествами[1]), Дедекинд рассматривал общий случай и особенно подробно изучал сетчатые множества ([19], т. II, стр. 236—271). Эти работы остались почти незамеченными в то время, хотя их результаты, переоткрытые различными авторами, сделались начиная с 1935 года предметом многочисленных публикаций, их историческая ценность заключается гораздо меньше в возможностях приложений этой теории, несомненно, довольно незначительных, чем в том факте, что они составили один из первых примеров тщательно разработанного аксиоматического построения. Напротив, первые результаты Кантора о счетных множествах или о множествах, имеющих мощность континуума, вскоре получили многочисленные и важные приложения к самым классическим вопросам анализа[2]) (не говоря уж, естественно, о тех частях канторовских работ, которые положили начало общей топологии и теории меры; см. ниже Исторические очерки к Книгам III и VI). Кроме того, начиная с последних годов XIX века появлялись первые применения принципа трансфинитной индукции, ставшего, особенно после доказательства теоремы Цермело, необходимым инструментом во всех областях современной математики. В 1922 году Куратовский дал другую, зачастую более удобную, формулировку этого принципа, не использующую понятия вполне упорядоченного множества ([25], стр. 89); именно в этой форме, переоткрытой позже Цорном [46], он главным образом употребляется сейчас[3]).

Таким образом к концу XIX века основные концепции Кантора одержали верх[4]). Мы видели, что к тому же времени заканчивается

[1]) Любопытно отметить, что среди этих последних Кантор никак не хотел допускать существование „не архимедовских" упорядоченных групп, поскольку они приводили к понятию „актуальной бесконечно малой" ([22], стр. 156 и 172). Подобные отношения порядка естественно встречаются в исследованиях Дю Буа-Реймона ⟨Du Bois-Reymond⟩ о порядках бесконечности (см. Исторический очерк к Книге IV, гл. V—VI) и систематически изучались Веронезе ⟨Veronese⟩ (*Fundamenta di geometria*, Padova, 1891).

[2]) С 1874 года, когда Вейерштрасс в письме к Дю Буа-Реймону указал на применение к функциям действительной переменной теоремы Кантора о возможности расположения рациональных чисел в последовательность (*Acta Math.*, 30 (1924), 206).

[3]) Поэтому интерес, вызывавшийся ординальными числами Кантора, сильно уменьшился; впрочем, и вообще многие результаты Кантора и его последователей по арифметике ординальных чисел и несчетным кардинальным числам до сих пор остаются довольно изолированными.

[4]) Официальное признание теории множеств обнаруживается, начиная с Первого международного математического конгресса (Цюрих, 1897 г.), где Адамар и Гурвиц указали на важные применения этой теории к анализу. Возрастающее в это время влияние Гильберта сильно помогло распространению идей Кантора, особенно в Германии.

формализация математики и использование аксиоматического метода признается почти универсальным. Иначе говоря, напряженная работа 1875—1895 годов ввела математиков во владение основами материала, изложенного в Книге I этого трактата. Между тем именно в это время начинался „кризис оснований" редкой силы, более 30 лет сотрясавший математический мир и временами, казалось, компрометировавший не только все эти недавние достижения, но даже самые классические разделы математики.

Парадоксы теории множеств и кризис оснований

Первые „парадоксальные" множества появились в теории кардинальных и ординальных чисел. В 1897 году Бурали-Форти заметил, что нельзя рассматривать как существующее множество *всех ординальных чисел*, ибо это множество было бы вполне упорядоченным и, следовательно, изоморфным одному из своих отрезков, отличных от него самого, а это абсурдно[1]). В 1899 году Кантор (в письме к Дедекинду) указывал, что теперь уже нельзя ни сказать, что кардинальные числа образуют множество, ни говорить о „множестве всех множеств", не впадая в противоречие (так как множество подмножеств этого последнего „множества" Ω было бы равномощно некоторому подмножеству „множества" Ω, что противоречит неравенству $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$) ([22], стр. 444—448). Наконец, в 1905 году Рассел, анализируя доказательство этого неравенства, показал, что из устанавливающего его рассуждения вытекает (без обращения к теории кардинальных чисел) противоречивость еще и понятия „множество множеств, не являющихся элементами самих себя" [38][2]).

Можно было бы подумать, что такие „антиномии" появляются только в периферийных областях математики, характеризующихся рассмотрением множеств, „величина" которых недоступна интуиции. Но вскоре другие „парадоксы" стали угрожать самым классическим частям математики. В самом деле, Берри ⟨Berry⟩ и Рассел [38], упрощая рассуждение Ришара ⟨J. Richard⟩ [40], отмечают, что множество целых чисел, определение которых можно выразить меньше, чем четырнадцатью русскими[3]) словами, конечно, но, однако, было бы противоречивым определить некое целое число как „наименьшее целое число, которое не может быть определено меньше, чем четырнадцатью русскими словами", ибо это определение содержит только тринадцать слов.

[1]) C. Burali-Forti, Sopra un teorema del Sig. G. Cantor, *Atti Acad. Torino*, **32** (1896—1897), 229—237. Это замечание было уже сделано Кантором в 1896 году (в неопубликованном письме Гильберту).

[2]) Рассуждение Рассела следует сопоставить с античными парадоксами типа знаменитого „лжеца", объекта бесчисленных комментариев в классической формальной логике: речь идет о том, чтобы знать, говорит ли правду или неправду человек, говорящий „я лгу", произнося эти слова (см. A. Rüstow, *Der Lügner*, Diss. Erlangen, 1910).

[3]) В подлиннике „шестнадцатью французскими". — *Прим. перев.*

Хотя подобные рассуждения, столь далекие от привычного обихода математиков, могли бы показаться многим из них чем-то вроде каламбуров, они тем не менее указывали на необходимость пересмотра основ математики, направленного на устранение „парадоксов" этой природы. Но если имелось единодушие в вопросе о неотложности такого пересмотра, то по вопросу о способе его осуществления вскоре возникли коренные расхождения. Для первой группы математиков — все равно, „идеалистов" или „формалистов" [1]) — ситуация, созданная „парадоксами" теории множеств, вполне аналогична ситуации, возникшей в геометрии после открытия неэвклидовых геометрий или „патологических" кривых (например, кривых без касательной); она должна привести к подобному же, но более общему заключению, а именно что бесполезно пытаться обосновать *какую бы то ни было* математическую теорию обращением (явным или нет) к „интуиции". Эту позицию можно подытожить словами главного противника формалистической школы: „*Формалист*, — говорил Брауэр ([6a], стр. 83), — *утверждает, что человеческий разум не имеет в своем распоряжении точных образов прямых линий или чисел, больших, например, десяти... Это верно, что из некоторых соотношений между математическими сущностями, которые мы принимаем за аксиомы, мы выводим другие соотношения по фиксированным правилам с убеждением, что таким образом мы при помощи логического рассуждения выводим истины из других истин...* [Но] *для формалиста математическая точность состоит исключительно в развертывании последовательности соотношений и не зависит от значения, которое можно было бы захотеть придать этим соотношениям или сущностям, ими связанным*".

Следовательно, для формалиста речь идет о том, чтобы придать Теории множеств аксиоматическую базу, совершенно аналогичную базе элементарной геометрии, где не занимались бы ни определением того, что такое „вещи", называемые „множествами", ни тем, что означает соотношение $x \in y$, но где перечисляли бы условия, наложенные на это последнее соотношение; конечно, это должно быть выполнено так, чтобы включить по возможности все результаты теории Кантора, делая в то же время невозможным существование „парадоксальных" множеств. Первый пример такой аксиоматизации был дан Цермело в 1908 году [45 в]; он избегал „слишком боль-

[1]) Расхождения между этими двумя школами в основном философского порядка, и мы не можем здесь входить по этому вопросу в подробности; существенно то, что на собственно математической почве они сходятся. Например, Адамар, типичный представитель „идеалистов", по вопросу о законности рассуждений теории множеств принял точку зрения, весьма близкую к формалистской, но не выражал ее в аксиоматической форме ([8], стр. 271).

ших" множеств, введя „аксиому отбора (Aussonderung)", по которой свойство P{x} определяет множество, состоящее из элементов, обладающих этим свойством, только в том случае, когда P{x} уже влечет соотношение вида $x \in A$ [1]). Но парадоксы, аналогичные „парадоксу Ришара", могли бы быть устранены только при ограничении смысла, приписываемого понятию „свойство"; по этому поводу Цермело довольствовался весьма туманным описанием одного типа свойств, которые он называет „definit" [2]), и указанием, что в применениях аксиомы отбора следует ограничиться этими последними. Этот пункт был уточнен Сколемом [41] и Френкелем [43] [3]); как было ими замечено, для его выяснения требуется перейти к полностью формализованной системе (подобной системе, описанной в гл. I и II этой Книги), где понятия „свойства" и „соотношения" теряют всякое „значение" и превращаются просто в обозначения для выражений, образованных согласно явно сформулированным правилам. Разумеется, это требует введения в систему используемых правил логики, чего еще не было в системе Цермело — Френкеля; с точностью до этого пункта, именно эта последняя система была, по существу, описана в гл. I и II.

Впоследствии были предложены и другие аксиоматизации теории множеств. Упомянем главным образом аксиоматизацию фон Неймана ⟨von Neumann⟩ [32 а) и б)], которая больше, чем система Цермело — Френкеля приближается к первоначальной концепции Кантора: чтобы избежать парадоксальных множеств, последний в своей переписке с Дедекиндом уже предлагал различать два сорта множеств — „множественности" („Vielheiten") и собственно „множества" („Mengen"), причем вторые характеризуются тем, что они могут мыслиться как один целый объект. Именно эту идею и уточнил фон Нейман, различив два типа объектов — „множества" и „классы"; в его системе (почти полностью формализованной) классы отличаются от множеств тем, что они не могут стоять слева от знака $\in$. Одним из преимуществ такой системы явилась реабилитация понятия „универсального класса" (не являющегося, естественно, множеством), употребляв-

---

[1]) Например, парадокс Рассела был бы возможен в системе Цермело, только если бы в ней было доказано соотношение $(\exists z)\left((x \notin x) \Rightarrow (x \in z)\right)$; разумеется, такое доказательство, если бы его удалось получить, имело бы своим непосредственным следствием необходимость существенного изменения рассматриваемой системы.

[2]) Определениые (нем.). — *Прим. ред.*

[3]) Сколем [41] и Френкель [43] заметили также, что аксиомы Цермело не позволяют доказать, например, существование таких несчетных кардинальных чисел $\mathfrak{m}$, что для всякого кардинального числа $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ выполняется $2^{\mathfrak{n}} < \mathfrak{m}$. Мы видели (гл. III, § 6, упр. 21), что, усилив аксиому отбора (схема S 8, гл. II, § 1, n° 6), можно доказать существование таких кардинальных чисел; так введенная аксиома есть вариант тех, которые были предложены Сколемом и Френкелем.

шегося логиками XIX века; отметим также, что система фон Неймана избегала (для теории множеств) введения схем аксиом, заменяя их подходящими аксиомами (что облегчает логические рассмотрения). Видоизменения системы фон Неймана были даны Бернайсом и Гёделем [12 б].

Исключение парадоксов было, по-видимому, достигнуто уже предыдущими системами, но ценой ограничений, которые не могут не казаться весьма произвольными. В оправдание системы Цермело — Френкеля можно сказать, что она ограничивается введением таких запрещений, которые только закрепляют обычную практику, сложившуюся в применениях понятия множества к различным математическим теориям. Системы фон Неймана и Гёделя более далеки от обычных воззрений; зато не исключено, что некоторые математические теории уже в самом начале их развития удобнее помещать в рамки таких систем, чем в более узкие рамки системы Цермело — Френкеля.

Конечно, нельзя утверждать, что хотя бы одно из этих решений производит впечатление окончательного. Если они удовлетворяют формалистов, то это потому, что последние отказываются принимать во внимание индивидуальные психологические реакции каждого математика; они считают, что формализованный язык выполнит свою задачу, если на нем в недвусмысленной форме можно записать математические рассуждения и он сможет служить, таким образом, посредником математической мысли; каждый волен, говорят они, думать, что хочет, о „природе" математических объектов или об „истинности" используемых им теорем, лишь бы его рассуждения могли быть записаны на общем языке [1]).

Иначе говоря, с философской точки зрения позиция формалистов состоит в игнорировании проблемы, поставленной „парадоксами"; они отходят от платоновской позиции, старавшейся приписать математическим понятиям интеллектуальное „содержание", общее для всех математиков. Многие математики отступили перед подобной ломкой традиций. Рассел, например, старался избежать парадоксов, более углубленно изучая их структуру. Подхватив идею, высказанную первоначально Ришаром (в статье [40], где он излагал свой „парадокс") и развитую затем Пуанкаре [37в], Рассел и Уайтхед ⟨Whitehead⟩ отмечали, что все определения парадоксальных множеств нарушают следующий принцип, называемый „принципом порочного круга": „Элемент, определение которого содержит в себе совокупность элементов

---

[1]) Гильберт тем не менее, по-видимому, всегда верил в объективную математическую „истину" ([15], стр. 315 и 323). Даже формалисты, которые, подобно Карри ⟨H. Curry⟩, стояли на позиции, очень близкой к только что подытоженной, отвергали с неким возмущением мысль о том, что математику можно рассматривать как простую игру, и непременно хотели видеть в ней „объективную науку" (H. Curry, *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, Amsterdam (North Holland Publ. Co.), 1951, стр. 57).

некоторого множества, не может принадлежать этому множеству" ([38], т. 1, стр. 40). Это положение и взято за основу в *Principia*, и именно для его соблюдения развивается в этом сочинении „теория типов". Как и логика Фреге, которой она вдохновлялась, логика Рассела и Уайтхеда (намного более обширная, чем математическая логика, употреблявшаяся в гл. 1 этой Книги) содержит „пропозициональные переменные"; теория типов дает классификацию этих различных переменных, основные черты которой следующие. Отправляемся от „области индивидов" (не уточненных), которые можно назвать „объектами порядка 0"; соотношения, в которых переменные (*свободные или связанные*) суть индивиды, называются „объектами первого порядка"; и вообще, соотношения, в которых переменные суть объекты порядка $\leqslant n$ (причем хотя бы одна имеет порядок n) называются „объектами порядка $n+1$"[1]). Множество объектов порядка n может тогда быть определено только соотношением порядка $n+1$ — условие, без труда позволяющее устранять парадоксальные множества[2]). Но принцип „иерархии типов" настолько ограничителен, что, строго его придерживаясь, мы бы пришли к математике непроходимой сложности[3]). Чтобы избавиться от этих последствий, Рассел и Уайтхед были вынуждены ввести „аксиому сводимости", утверждающую существование для каждого соотношения между „индивидами" эквивалентного ему соотношения *первого порядка*; условие, столь же произвольное, сколь и аксиомы формалистов, значительно уменьшило интерес к построениям *Principia*. Поэтому система Рассела и Уайтхеда имела больший успех у логиков, чем у математиков; к тому же эта система не полностью формализована[4]), из чего получаются многочисленные неясности в деталях. Были сделаны различные попытки упростить и прояснить эту систему [Рамсай ⟨Ramsey⟩, Хвистек ⟨Chwistek⟩, Куайн ⟨Quine⟩, Россер ⟨Rosser⟩]; стремясь пользоваться

---

1) В действительности, это только начало классификации „типов", которую без очень длинных построений нельзя верно изложить; читатель, желающий более детальных объяснений, может прямо обратиться к введению в т. II Principia Mathematica [38].

2) Таким образом, например, в противоположность системе Цермело — Френкеля в системе Рассела и Уайтхеда соотношение $x \in x$ не может быть законно написано (ср. гл. II, § 1, n° 4).

3) Например, равенство не является первоначальным понятием в системе *Principia*: два объекта a, b равны, если для *всякого* свойства $\mathrm{P}\{x\}$, $\mathrm{P}\{a\}$ и $\mathrm{P}\{b\}$ — эквивалентные высказывания. Но это определение не имеет смысла в теории типов: чтобы придать ему смысл, нужно по крайней мере уточнить „порядок" P, а это привело бы нас к различению бесконечного числа соотношений равенства! Впрочем, Цермело в 1908 году заметил [45б], что многие определения классической математики (например, определение нижней грани множества в $\mathbf{R}$) не соблюдают „принцип порочного круга" и что принятие этого принципа угрожало бы, таким образом, наложить запрет на важные разделы самых традиционных математических теорий.

4) Рассел и Уайтхед (как и Фреге) стояли на классической позиции относительно математических формул, которые для них всегда должны иметь „смысл", относящийся к подсознательной деятельности мышления.

все более и более окончательно формализованным языком, эти авторы заменяли правила Principia (еще имевшие некоторое интуитивное основание) ограничениями, учитывающими только запись рассматриваемых выражений; эти правила не только казались тогда столь же немотивированными, как и запреты, сформулированные в системах Цермело — Френкеля или фон Неймана, но, будучи еще более далекими от математической практики, они в нескольких случаях привели к неприемлемым следствиям, непредвиденным самим автором (например, парадокс Бурали — Форти или отрицание аксиомы выбора).

Для математиков вышеуказанных школ дело состоит прежде всего в том, чтобы не отказаться ни от какой части наследия прошлого: „*Никто не сможет нас изгнать из рая, созданного для нас Кантором*", — говорил Гильберт ([15], стр. 274)[1]). Для достижения этой цели они согласны принять такие ограничения на математические рассуждения, которые не очень существенны, поскольку они согласованы с обычаем, но, видимо, не налагаются нашими умственными привычками и интуицией понятия множества. Все кажется им предпочтительнее вторжения психологии в критерии законности математики; чем „*учитывать свойства наших мозгов*", как говорил Адамар ([8], стр. 270), они скорее готовы смириться с введением в математическую область границ, большей частью произвольных, лишь бы они включали классическую математику и не угрожали затормозить дальнейший прогресс.

Совсем иную позицию занимали математики того направления, о котором нам остается сказать. Если формалисты соглашались отказаться от контроля „умственного взора" в вопросах, касающихся математического рассуждения, математики, которых называли „эмпиристами", „реалистами" или „интуиционистами", отвергали этот отказ; им необходима была некоторая внутренняя уверенность, гарантирующая „существование" математических объектов, которыми они занимались. Пока речь шла только об отказе от пространственной интуиции, серьезных возражений не было, поскольку арифметические „модели" позволяли укрыться за интуитивным понятием целого числа. Но появились непримиримые возражения, когда был поставлен вопрос сначала о сведении понятия целого числа к (намного менее точному интуитивно) понятию множества, а затем о наложении — без интуитивного обоснования — на обращение с множествами ограничений. Первым по времени из этих противников (который к тому же в силу авторитета своего таланта должен был оказать наибольшее влияние) был Пуанкаре; приняв не только аксиоматическую точку зрения относительно геометрии и арифметизации анализа, но и бóльшую часть канторовской теории (которую он одним из первых с успехом применял в своих работах), он, однако, отказывался представить себе,

---

1) Стр. 350 русского издания. — *Прим. ред.*

что и к арифметике также мог быть применен аксиоматический метод; в частности, принцип полной индукции казался ему фундаментальным предчувствием нашего сознания, он считал, что в этом принципе невозможно видеть чистое соглашение[1]) [37в]. Принципиально враждебный формализованным языкам, полезность которых он оспаривал, Пуанкаре постоянно смешивал понятие целого числа в формализованной математике и только намечавшееся тогда использование целых чисел в теории доказательства, о котором мы будем говорить дальше; без сомнения в то время это различие было трудно сделать таким же отчетливым, как сегодня — после 50 лет изучения и обсуждения, однако его хорошо чувствовали такие ученые, как Гильберт или Рассел.

Подобные критические выступления участились после введения Цермело в 1904 году аксиомы выбора [45а]. Ее использование в многочисленных предшествующих доказательствах анализа или теории множеств проходило до тех пор незамеченным[2]); следуя идее, подсказанной Эрхардом Шмидтом, Цермело, сформулировав явно эту аксиому (притом в двух формах, приведенных в „Теор. мн., Рез.“, § 4, n° 10), остроумным способом получил из нее удовлетворительное доказательство (в основном воспроизведенное нами в гл. III, § 2) существования полного порядка на любом множестве. По-видимому, этот новый способ рассуждения, появившийся одновременно с „парадоксами“, своим необычным видом привел в смущение математиков; достаточно взглянуть на странные недоразумения, возникшие по этому поводу в следующем томе Mathematische Annalen под пером математиков, настолько освоившихся с канторовскими методами, как Шонфлис ⟨Schoenflies⟩ и Бернштейн ⟨F. Bernstein⟩. Более существенны напечатанные в том же томе критические замечания Бореля ⟨E. Borel⟩, имеющие прямое отношение к точке зрения Пуанкаре на целые числа; они развиваются и обсуждаются в переписке Бореля, Бэра, Адамара и Лебега, до сих пор считающейся классической во французской математической традиции [8]. Борель начинает с оспаривания законности аксиомы выбора, поскольку, вообще говоря, она предполагает

[1]) Пуанкаре доходил до того, что, по существу, утверждал невозможность определения структуры, удовлетворяющей всем аксиомам Пеано, кроме принципа полной индукции ([37а], стр. 65); пример [придуманный Падоа ⟨Padoa⟩] целых чисел с отображением $x \to x+2$ вместо $x \to x+1$ показывает, что это утверждение не точно. Любопытно, что мы находим этот пример — почти в тех же выражениях — уже у Фреге ([42б], стр. 21 е).

[2]) В 1890 году Пеано, доказывая свою теорему о существовании интегралов дифференциальных уравнений, заметил, что его естественно привело к тому, чтобы „*бесконечное число раз применить произвольный закон, по которому каждому классу ставится в соответствие некоторый индивид этого класса*“; но он тотчас же добавляет, что такое рассуждение в его глазах недопустимо (*Math. Ann.*, т. [38] (1890), стр. 210). В 1902 г. Леви ⟨B. Levi⟩ заметил, что то же рассуждение было неявно использовано Бернштейном в одном доказательстве теории кардинальных чисел (*Ist. Lombardo Sci. Lett.*, *Rend.* (2), т. [8] (1902), стр. 863).

несчетную бесконечность выборов, что непостижимо для интуиции. Но Адамар и Лебег замечают, что счетная бесконечность последовательных произвольных выборов не более поддается интуиции, поскольку она предполагает бесконечное число операций, а это невозможно представить себе действительно осуществленным. Для Лебега, расширившего спор, все сводится к тому, чтобы узнать, что понимается под словами: математический объект „существует“; ему нужно, чтобы явно „назвали“ свойство, определяющее этот объект однозначным образом („функциональное“ свойство, сказали бы мы); что касается функции, вроде той, которая служит Цермело в его рассуждении, — это то, что Лебег называл „законом“ выбора; если, — продолжал он, — это требование не выполнено и мы ограничимся тем, что будем „думать“ об этой функции вместо того, чтобы ее „называть“, можем ли мы быть уверены, что на протяжении рассуждения мы думаем об одной и той же ([8], стр. 267)? Впрочем, это приводит Лебега к новым сомнениям; уже вопрос о выборе какого-нибудь единственного элемента в множестве кажется ему вызывающим трудности: нужно быть уверенным, что такой элемент „существует“, т. е. что можно „назвать“ по крайней мере один из элементов множества[1]). Можно ли тогда говорить о „существовании“ какого-нибудь множества, не каждый элемент которого мы можем „назвать“? Уже Бэр без колебаний отрицал „существование“ множества частей заданного бесконечного множества (*loc. cit.*, стр. 263—264); напрасно Адамар заметил, что эти требования ведут к отказу даже от того, чтобы говорить о множестве действительных чисел: именно к этому заключению в конце концов присоединился Борель. Не считая того факта, что счетное, по-видимому, приобретает право гражданства, мы почти возвращаемся к классической позиции противников „актуальной бесконечности“.

Все эти возражения были не слишком систематичны; Брауэру и его школе было предназначено предпринять полное преобразование математики, основанное на похожих, но гораздо более радикальных принципах. Мы не можем здесь даже кратко излагать такое сложное учение, как интуиционизм, столь же относящееся к психологии, сколь и к математике, и мы ограничимся указанием на некоторые из самых поразительных его черт, отсылая за подробностями к

[1]) Так называемый „выбор“ элемента в множестве не имеет на самом деле ничего общего с аксиомой выбора; речь идет просто о манере выражаться, и всюду, где ей следуют, в действительности только используют метод вспомогательной константы (гл. I, § 3, n° 3), опирающийся лишь на самые элементарные логические правила (куда не входит знак τ). Разумеется, применение этого метода к множеству A требует, чтобы было доказано, что $A \neq \varnothing$; именно к этому пункту обращена аргументация Лебега, так как такое доказательство приемлемо для него только в том случае, если именно „назван“ какой-нибудь элемент. Например, Лебег не считал законным рассуждение Кантора, доказывающее существование трансцендентных чисел; это существование доказано для него только потому, что возможно „назвать“ трансцендентные числа, такие, как числа Лиувилля, или числа e или π.

работам самого Брауэра [6] и к изложению Гейтинга [13]. Для Брауэра математика совпадает с „точной" частью нашего мышления, основанной на первоначальной интуиции последовательности натуральных чисел, и ее невозможно без искажений перевести в формальную систему. Впрочем, она „точна" только в сознании математиков, и все надежды придумать какое-нибудь средство сношений между ними, которое не было бы подвержено всем несовершенствам и двусмысленностям языка, несбыточны; самое большее можно надеяться вызвать у собеседника состояние духа, благоприятное для более или менее туманных описаний ([13], стр. 11—13). Интуиционистская математика придает логике ненамного больше значения, чем языку: доказательство убедительно не в силу логических правил, фиксированных раз и навсегда, но по причине „непосредственной очевидности" каждого из ее звеньев. Эта „очевидность" должна, кроме того, быть истолкована еще более ограничительным образом, чем у Бореля и его сторонников: так, в интуиционистской математике нельзя сказать, что отношение вида „R или (не R)" истинно (закон исключенного третьего), если только мы не можем для каждой системы значений, приданных переменным, встречающимся в R, доказать, что одно из двух высказываний R, „не R" истинно; например, из уравнения $ab = 0$ между двумя действительными числами нельзя заключить „$a = 0$ или $b = 0$", ибо легко дать явные примеры действительных чисел a, b, для которых $ab = 0$, но в настоящее время мы не можем доказать никакое из двух высказываний $a = 0$, $b = 0$ ([13], стр. 21).

Не удивительно, что, исходя из таких принципов, интуиционистские математики приходят к результатам, весьма отличным от классических теорем. Целый ряд этих последних исчезает, например большинство теорем „существования" в анализе (вроде теорем Больцано и Вейерштрасса о числовых функциях); если некоторая функция одной действительной переменной „существует" в интуиционистском смысле, она *ipso facto* [1]) непрерывна; монотонная ограниченная последовательность действительных чисел не обязательно имеет предел. С другой стороны, многие классические понятия для интуициониста распадаются на несколько различных фундаментальных понятий: так, имеется два понятия сходимости (для последовательности действительных чисел) и восемь понятий счетности. Само собой разумеется, что трансфинитная индукция и ее применения к современному анализу (как и бóльшая часть теории Кантора) приговорены без права обжалования.

Только таким способом, по Брауэру, математические высказывания могут приобрести „содержание"; формалистические рассуждения, выходящие за пределы того, что допускает интуиционизм, считаются не имеющими значения, поскольку им нельзя придать „смысл", к которому было бы применимо интуитивное понятие „истины". Ясно, что подобные суждения могут основываться только на предварительном понятии „истины" психологической или метафизической природы. Практически это означает, что они не подвержены никакому обсуждению.

[1]) В силу самого факта (лат.). — *Прим. ред.*

Несомненно, что мощные атаки интуиционистского лагеря заставили не только авангардные математические школы, но даже приверженцев традиционной математики на некоторое время занять оборонительное положение. Как признался один известный математик, эти атаки подействовали на него до такой степени, что он умышленно ограничил свои работы отраслями математики, считающимися „безопасными".

Но, по-видимому, такие случаи были нечастыми. Интуиционистская школа, воспоминанию о которой, без сомнения, суждено существовать только в качестве исторической достопримечательности, оказала, по крайней мере, ту услугу, что заставила своих противников, т. е. в конечном счете подавляющее большинство математиков, уточнить свои позиции и яснее осознать причины (одни — логического порядка, другие — чувственного) своего доверия к математике.

Метаматематика

Во все времена отсутствие противоречий рассматривалось как условие *sine qua non* [1]) любой математической науки, и со времен Аристотеля логика была достаточно развита, чтобы можно было в совершенстве понимать, что из противоречивой теории можно вывести все что угодно. Доказательства „существования", считавшиеся необходимыми со времен античности, не имели, очевидно, другой цели, как только гарантировать, что введение нового понятия не угрожает повлечь противоречие, особенно когда это понятие слишком сложно, чтобы непосредственно подпасть под „интуицию". Мы видели, как с приходом в XIX веке аксиоматической точки зрения это требование становилось все более настоятельным и как отвечало ему построение арифметических „моделей". Но не могла ли сама арифметика быть противоречивой? Вопрос, который до конца XIX века, без сомнения, никто бы и не подумал ставить, настолько целые числа казались принадлежащими к тому, что есть наиболее верного в нашей интуиции; но после „парадоксов" все казалось поставленным под вопрос, и понятно, что чувство неуверенности, вызванное ими, заставило математиков около 1900 года с большим вниманием заняться проблемой непротиворечивости арифметики, чтобы по крайней мере спасти от гибели классическую математику. Поэтому эта проблема была второй из перечисленных Гильбертом в его знаменитом докладе на Международном конгрессе 1900 года ([15a], стр. 299—301). Делая это, он выдвинул новый принцип, который должен был

[1]) Непременное (лат.). — *Прим. ред.*

получить большой резонанс: тогда как в традиционной логике непротиворечивость понятия делала его только „возможным“, для Гильберта она эквивалентна (по крайней мере, для математических понятий, определенных аксиоматически) *существованию* этого понятия. Это, очевидно, содержало в себе необходимость доказывать a priori непротиворечивость некоторой математической теории, еще даже до получения возможности развивать ее законным образом; так это и понял Пуанкаре, который, чтобы пробить брешь в формализме, подхватил на свой лад идею Гильберта, подчеркивая с ехидным удовольствием, до какой степени далеки были формалисты в то время от возможности ее осуществления ([37в], стр. 163). Дальше мы увидим, как Гильберт принял вызов; но прежде нам нужно здесь заметить, что под влиянием его авторитета и авторитета Пуанкаре требования, выдвинутые последним, в течение долгого времени должны были безоговорочно приниматься как формалистами, так и их противниками. Следствием этого была очень распространенная также среди формалистов вера, что теория доказательства Гильберта — составная часть математики, для которой она образует необходимые пролегомены. Во введении мы сказали, почему эта теория не представляется нам обоснованной[1]), и мы считаем, что вмешательство метаматематики в изложение логики и математики может и должно быть сведено к очень элементарной части, изучающей обращение с сокращающими символами и дедуктивными критериями. Таким образом, в противоположность тому, чего хотел Пуанкаре, речь идет не о том, чтобы „требовать свободы противоречий“, но, скорее, о том, чтобы вместе с Адамаром считать, что отсутствие противоречий констатируется, даже если оно не доказывается ([8], стр. 270).

Нам остается дать короткий исторический обзор трудов Гильберта и его школы; хотя теория доказательства не излагается в настоящем Трактате, небезынтересно бегло проследить не только эволюцию, которая в конце концов привела к отрицательному результату Гёделя и оправдала a posteriori скептицизм Адамара, но также и весь вызванный этим прогресс, относящийся к нашему знанию механизма математического рассуждения и сделавший современную математику самостоятельной и бесспорно интересной наукой.

В 1904 году в докладе на Международном конгрессе ([15], стр. 247—261) Гильберт приступил к проблеме непротиворечивости арифметики. Сначала он констатировал, что не может быть и речи о доказательстве ее с помощью модели[2]), и набросал крупными мазками

---

[1]) В чисто формалистском учении слово „существует“ в формализованном тексте имеет не больше „значения“, чем другие слова, и другие типы „существования“ в формализованных доказательствах рассматривать не нужно.

[2]) „Модели, даваемые определениями Дедекинда или Фреге, только перемещали вопрос, сводя его к непротиворечивости теории множеств, проблеме, которая, без всякого сомнения, более трудна, чем непротиворечивость арифметики, и которая должна была казаться еще более трудной в то время, когда еще не было предложено ни одной серьезной попытки избежать „парадоксов“.

принцип другого метода: он предлагал рассмотреть истинные высказывания формализованной арифметики как выражения из знаков, не имеющих значения, и доказать, что, используя правила, управляющие образованием и соединением этих выражений, никогда нельзя получить выражение, которое было бы истинным высказыванием и отрицание которого также было бы истинным высказыванием. Он даже наметил подобное доказательство для формализма, более узкого, чем арифметический формализм; но, как вскоре заметил Пуанкаре ([37в], стр. 185), это доказательство существенно использует принцип индукции и поэтому кажется основанным на порочном круге. Гильберт не ответил немедленно на эту критику, и в течение лет пятнадцати никто не пытался развивать его идеи; только в 1917 году он (движимый желанием ответить на нападки интуиционистов) снова взялся за проблему оснований математики, которою отныне не переставал уже заниматься до конца своей научной деятельности. В своих работах по этому вопросу, появившихся приблизительно с 1920 по 1930 годы, в которых активно участвует целая школа молодых математиков (Аккерман, Бернайс, Эрбран (Herbrand), фон Нейман), Гильберт мало-помалу более точно выявлял принципы своей „теории доказательства“: неявно признавая обоснованность критики Пуанкаре, он соглашался, что в метаматематике используемые арифметические рассуждения могут основываться только на нашей интуиции целых чисел (а не на формализованной арифметике); для этого ему кажется существенным ограничить эти рассуждения „финитными методами“ („finite Prozesse“) допускаемого интуиционистами типа: например, доказательство от противного не может доказать метаматематическое существование выражения или последовательности выражений — необходимо задать закон явного построения[1]). С другой стороны, Гильберт расширил свою первоначальную программу в двух направлениях: он наступал не только на непротиворечивость арифметики, но стремился также доказать непротиворечивость теории действительных чисел и даже теории множеств[2]); кроме того, к проблемам непротиворечивости добавились проблемы независимости аксиом, полноты ⟨catégoricité⟩ и разрешимости. Сейчас мы бегло рассмотрим эти различные вопросы и укажем главные исследования, вызванные ими.

---

[1]) За подробным и точным описанием финитных методов, принимаемых в метаматематике, можно, например, обратиться к диссертации Эрбрана ⟨J. Herbrand⟩ [48].

[2]) Когда говорится о непротиворечивости теории действительных чисел, предполагается, что ее определяют аксиоматически, без использования теории множеств (или, по крайней мере, воздерживаясь от употребления некоторых аксиом этой последней, вроде аксиомы выбора или аксиомы множества подмножеств).

Доказательство *независимости* ⟨*l'indépendance*⟩ системы высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$ состоит в том, чтобы показать, что для каждого индекса i A_i не является теоремой в теории $\mathcal{T}_i$, получающейся, если за аксиомы взять высказывания A_j с индексами $j \neq i$. А это будет установлено, если известна непротиворечивая теория $\mathcal{T}'_i$, в которой как высказывания A_j $(j \neq i)$, так и „не A_i“ суть теоремы; таким образом, эту проблему можно рассматривать в двух аспектах в зависимости от того, признаем мы или не признаем некоторые теории (например, арифметику или теорию множеств) непротиворечивыми. Во втором случае мы имеем дело с проблемой „абсолютной“ непротиворечивости. Напротив, проблемы первого типа решаются, как проблемы „относительной“ непротиворечивости, построением соответствующих „моделей“, и многочисленные доказательства этого сорта были придуманы еще задолго до того, как математика приобрела полностью формализованный вид: достаточно напомнить модели неэвклидовой геометрии, вопросы независимости аксиом элементарной геометрии, изучавшиеся Гильбертом в его „Grundlagen der Geometrie“ [15], а также работы Штейница по аксиоматизации алгебры и Хаусдорфа и его последователей по аксиоматизации топологии [1]).

Говорят, что теория $\mathcal{T}$ полна ⟨*catégorique*⟩, если для всякого высказывания A теории $\mathcal{T}$ (не содержащего никаких букв, кроме констант теории $\mathcal{T}$) одно из двух высказываний A, (не A) есть теорема теории $\mathcal{T}$ [2]). Если оставить в стороне некоторые весьма рудиментарные формализмы, полнота которых легко доказывается ([16], стр. 35; ср. гл. 1, приложение, упр. 7), результаты, полученные на этом пути, в основном отрицательны; важнейшим из них мы обязаны Гёделю (K. Gödel) [12a], который показал, что если $\mathcal{T}$ не противоречива и если аксиомы формализованной арифметики являются теоремами теории $\mathcal{T}$, то $\mathcal{T}$ не полна. Основная идея его изобретательного замысла состоит в установлении взаимно однозначного соответствия (разумеется, при помощи „финитных методов“) между метаматематическими утверждениями и некоторыми высказываниями формализованной арифметики; мы ограничимся наброском основных черт [1]). Прежде всего каждому выражению A, являющемуся термом или соотношением теории $\mathcal{T}$, соотнесем взаимно однозначно (методом явного построения, применяемого почти механически) целое число $g(A)$. Аналогично каждому доказательству D теории $\mathcal{T}$ (рассматриваемому как последовательность значений; см. гл. 1, § 2, n°2) можно взаимно однозначно сопоставить целое число $h(D)$. Наконец, можно дать метод явного построения соотношения $P\{x, y, z\}$ [2]) теории $\mathcal{T}$, для которого в $\mathcal{T}$ $P\{x, y, z\}$ влечет, что x, y, z — целые, и выполнены два условия:

1°. Если D — доказательство для $A\{\lambda\}$, где $A\{x\}$ есть соотношение теории $\mathcal{T}$ и λ — выявленное целое число (т. е. терм теории $\mathcal{T}$, являющийся целым числом), то $P\{\lambda, g(A\{x\}), h(D)\}$ есть теорема теории $\mathcal{T}$.

2°. Если выявленное целое число μ не имеет вида $h(D)$ или если $\mu = h(D)$ и D не есть доказательство для $A\{\lambda\}$, то (не $P\{\lambda, g(A\{x\}), \mu\}$) есть теорема теории $\mathcal{T}$.

Пусть тогда $S\{x\}$ есть соотношение (не $(\exists z) P\{x, x, z\}$), и пусть $\gamma = g(S\{x\})$ — терм теории $\mathcal{T}$. Если $\mathcal{T}$ не противоречива, в $\mathcal{T}$ не существует *никакого доказательства* высказывания $S\{\gamma\}$. В самом деле, если бы D было таким доказательством, $P\{\gamma, g(S\{x\}), h(D)\}$ было бы теоремой теории $\mathcal{T}$; но это соотношение есть не что иное, как $P\{\gamma, \gamma, h(D)\}$, и, следовательно, $(\exists z) P\{\gamma, \gamma, z\}$ также было бы теоремой теории $\mathcal{T}$; поскольку это последнее соотношение эквивалентно (не $S\{\gamma\}$), $\mathcal{T}$ была бы противоречивой. С другой стороны, только что сказанное показывает, что для всякого выявленного целого числа μ (не $P\{\gamma, \gamma, \mu\}$) есть теорема теории $\mathcal{T}$. Отсюда вытекает, что в $\mathcal{T}$ не существует *никакого доказательства* высказывания (не $S\{\gamma\}$), ибо это последнее соотношение эквивалентно $(\exists z) P\{\gamma, \gamma, z\}$, и существование целого числа μ, для которого $P\{\gamma, \gamma, \mu\}$, влекло бы в силу предыдущего противоречивость теории $\mathcal{T}$ [3]). Эта метаматематическая теорема Гёделя была позднее обобщена в различных направлениях ([24], гл. XI) [4]).

Footnotes, p. 344:

[1]) Неоднократно поднимался вопрос о независимости аксиомы выбора и гипотезы континуума (относительно других аксиом теории множеств, например, в системе Цермело — Френкеля или в системе фон Неймана — Бернайса — Гёделя); поиски теорем, эквивалентных той или другой, были одной из излюбленных тем польской школы (см W. Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis* (Париж, 1929) и *L'hypothèse du continu* (Варшава, 1938), где имеется обширная библиография). Френкель [43б] построил модель теории множеств, в которой аксиома выбора не выполняется, но аксиомы этой теории не совсем совпадают с аксиомами предыдущих систем; его работы были продолжены Чёрчем (*Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), стр. 178—208) и Линденбаумом и Мостовским (*Fund. Math.*, **32** (1939), стр. 201—252). Проблема независимости гипотезы континуума, по-видимому, до сих пор вплотную не изучалась [ср. K. Gödel, *Amer. Math. Monthly*, **45** (1947), стр. 515—524]. [Независимость гипотезы континуума установил недавно Коэн ⟨Paul J. Cohen⟩; см. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **50** (1963), 1143—1148 и **51** (1964), 105—110. — *Прим. ред.*]

[2]) Это часто выражают, говоря, что если A не есть теорема теории $\mathcal{T}$, то теория $\mathcal{T}'$, полученная добавлением A к аксиомам теории $\mathcal{T}$, противоречива.

Footnotes, p. 345:

[1]) Более подробно см. в [12a] или ([24], стр. 181—258).

[2]) Подробное описание $g(A)$, $h(D)$ и $P\{x, y, z\}$ очень длинно и кропотливо, а написание $P\{x, y, z\}$ потребовало бы такого большого числа знаков, что практически оно невозможно: это тот вид трудностей, о котором мы говорили во введении, но ни один математик не думает, что это сколько-нибудь снижает значение этих построений.

[3]) В действительности эта последняя часть рассуждения предполагает немного больше, чем непротиворечивость теории $\mathcal{T}$, а именно то, что называют „ω-непротиворечивостью“ теории $\mathcal{T}$: это означает, что в $\mathcal{T}$ не существует соотношения $R\{x\}$, такого, что $R\{x\}$ влечет $x \in N$, и для каждого *выявленного* μ $R\{\mu\}$ — теорема теории $\mathcal{T}$, хотя $(\exists x)(x \in N$ и (не $R\{x\}))$ также есть теорема теории $\mathcal{T}$. Впрочем, Россер показал, что рассуждение Гёделя можно модифицировать таким образом, чтобы предполагать только непротиворечивость теории $\mathcal{T}$ ([24], стр. 208).

[4]) Легко заметить аналогию рассуждения Гёделя с софизмом лжеца: высказывание $S\{\gamma\}$, если его интерпретировать в метаматематических терминах,

Проблема разрешимости ⟨le problème de la *décision*⟩ („Entscheidungsproblem"), без сомнения, является самой честолюбивой из всех проблем, которые ставит перед собой метаматематика: речь идет о том, чтобы для некоторого данного формализованного языка узнать, возможно ли придумать квазимеханический „универсальный метод", который, будучи примененным к произвольному соотношению рассматриваемого формализма, указывал бы после конечного числа операций, истинно это соотношение или нет [1]). Решение этой проблемы по существу входило уже в великие замыслы Лейбница, и, по-видимому, одно время школа Гильберта считала их осуществление совсем близким. Для формализмов, содержащих мало примитивных знаков и аксиом, такие методы действительно могут быть описаны ([24], стр. 136—141; ср. гл. 1, приложение, упр. 7). Но стремления уточнить проблему разрешимости, точно ограничивая то, что следует понимать под „универсальным методом", до сих пор приводили только к отрицательным результатам ([24], стр. 432—439). Впрочем, решение проблемы разрешимости [2]) для теории $\mathcal{T}$ тотчас же позволяет узнать, противоречива ли $\mathcal{T}$ или нет, поскольку достаточно применить „универсальный метод" к какому-нибудь соотношению теории $\mathcal{T}$ и его отрицанию; а мы сейчас увидим, что исключено, чтобы для обычных математических теорий вопрос можно было бы решить таким способом [1]).

В самом деле, именно в вопросе о непротиворечивости математических теорий — первоисточнике и самом сердце математики — обнаружились самые обманчивые результаты. В течение 1920—1930 годов Гильберт и его школа развивали новые методы для наступления на эти проблемы; доказав непротиворечивость частных формализмов, охватывающих некоторую часть арифметики (см. [48], [43в]), они надеялись достичь цели и доказать не только непротиворечивость арифметики, но и непротиворечивость теории множеств, когда Гёдель, опираясь на неполноту арифметики, вывел из этого невозможность доказать при помощи „финитных методов" Гильберта непротиворечивость любой теории $\mathcal{T}$, содержащей эту последнюю [2]).

Теорема Гёделя не полностью, однако, закрывает дверь попыткам доказательства непротиворечивости, если отказаться (хотя бы частично) от ограничений Гильберта относительно „финитных методов". Именно так Генцен (Gentzen) в 1936 году [14], использовав „интуитивно" трансфинитную индукцию до счетного ординального числа ε_0 (гл. III, § 6, упр. 14) [3]), сумел доказать непротиворечивость формализованной арифметики. Степень „уверенности", которую можно приписать подобному рассуждению, конечно, менее убедительна, чем для рассуждений, удовлетворяющих первоначальным требованиям

утверждает собственную ложность! Можно также отметить, что высказывание

$$(\forall z)((z \in \mathrm{N}) \Rightarrow (\text{не } \mathrm{P}\{\gamma, \gamma, z\}))$$

интуитивно истинно, поскольку для каждого *выявленного* целого числа μ в $\mathcal{T}$ имеется доказательство для (не $\mathrm{P}\{\gamma, \gamma, \mu\}$); и между тем это высказывание не доказуемо в $\mathcal{T}$. Эту ситуацию следует сопоставить с результатом, полученным ранее Лёвенгеймом (Löwenheim) и Сколемом (см. [41]): последний метаматематически определяет соотношение между двумя *натуральными числами*, которое, если его записать в виде $x \in y$, удовлетворяет аксиомам фон Неймана для теории множеств. Отсюда на первый взгляд получается новый „парадокс", так как в этой „модели" все бесконечные множества были бы счетными, что противоречит неравенству Кантора $\mathfrak{m} < 2^{\mathfrak{m}}$. Но в действительности „соотношение", определенное Сколемом, не больше может быть записано в формализованной теории множеств, чем „теорема", утверждающая, что множество подмножеств бесконечного множества имеет только счетную бесконечность „элементов". В сущности, этот „парадокс" есть просто более тонкая форма банального замечания, что написать можно лишь конечное число выражений формализованной теории и, следовательно, абсурдно представлять себе несчетное множество термов теории; замечание, близкое к тому, которое привело уже к „парадоксу Ришара". Подобные рассуждения доказывают необходимость формализации теории множеств, если желать сохранить сущность канторовских построений. По-видимому, математики пришли к согласию относительно того вывода, что имеется лишь поверхностное соответствие между нашими „интуитивными" концепциями понятия множества или целого числа и формализмами, которые — по предположению — их выражают; несогласие начинается тогда, когда встает вопрос о выборе между теми или другими.

1) Проблема построения такого метода называется проблемой *разрешения* для данного формализованного языка; проблема разрешимости, следовательно, заключается в требовании узнать, разрешима ли проблема разрешения. (В русской математической литературе термин „проблема разрешимости" употреблялся раньше также для обозначения проблемы разрешения, что приводило к двусмысленности. — *Прим. ред.*)

2) Правильнее было бы сказать — проблемы разрешения (ведь проблема разрешимости может иметь и отрицательные решения). — *Прим. ред.*

---

1) Следует четко отличать проблему разрешимости от веры, разделяемой многочисленными математиками и неоднократно и с большой силой выражавшейся, в частности, Гильбертом, веры в то, что для каждого математического высказывания наступит день, когда мы узнаем, является ли оно истинным, ложным или неразрешимым. Здесь мы имеем акт чистой веры, критика которого лежит за пределами нашего обсуждения.

2) В обозначениях, введенных выше, точный результат Гёделя состоит в следующем. Сказать, что $\mathcal{T}$ непротиворечива, означает, что в $\mathcal{T}$ не существует доказательства соотношения $0 \neq 0$; это влечет затем для всякого выявленного целого числа μ, что (не $\mathrm{P}\{0, g(x \neq x), \mu\}$) есть теорема теории $\mathcal{T}$. Рассмотрим тогда высказывание $(\forall z)((z \in \mathrm{N}) \Rightarrow$ не $\mathrm{P}\{0, g(x \neq x), z\})$, которое мы обозначим через C; „переводя" в формализованную арифметику рассуждение (воспроизведенное выше), которым метаматематически показано, что „если $\mathcal{T}$ непротиворечива, то в $\mathcal{T}$ не существует доказательства для $\mathrm{S}\{\gamma\}$", можно установить, что $\mathrm{C} \Rightarrow$ (не $(\exists z)(\mathrm{P}\{\gamma, \gamma, z\})$) есть теорема теории $\mathcal{T}$, или, иначе говоря, что $\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{S}\{\gamma\}$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. Из этого вытекает, что если $\mathcal{T}$ непротиворечива, то C *не есть теорема теории* $\mathcal{T}$, потому что при этих условиях $\mathrm{S}\{\gamma\}$ не есть теорема теории $\mathcal{T}$. В этом точная формулировка теоремы Гёделя.

3) Генцен сопоставлял каждому доказательству D формализованной арифметики ординальное число $\alpha(\mathrm{D}) < \varepsilon_0$; с другой стороны, он описывал метод, который по каждому доказательству D, заканчивающемуся противоречием, дает доказательство D′, также заканчивающееся противоречием и такое, что $\alpha(\mathrm{D}') < \alpha(\mathrm{D})$; теория вполне упорядоченных множеств позволяет заключить, что такого доказательства D не существует (тип рассуждений, развивающий классический „бесконечный спуск" теории чисел).

Гильберта, и является, в сущности, делом личной психологии каждого математика; от этого не становится менее справедливым, что подобные „доказательства", использующие „интуитивную" трансфинитную индукцию до заданного ординального числа, рассматривались бы как важный прогресс, если бы они были проведены, например, для теории действительных чисел или для содержательной части теории множеств.

С другой стороны, внутри самой теории множеств возникают многочисленные проблемы „относительной" непротиворечивости, связанные с разнообразными „гипотезами", существующими в этой теории. Самый замечательный результат, полученный в этом направлении, принадлежит Гёделю: в 1940 году он доказал, что если теория, аксиомами которой являются аксиомы системы фон Неймана — Бернайса без аксиомы выбора, непротиворечива, то непротиворечива и теория, полученная добавлением к этим аксиомам очень сильной формы аксиомы выбора (вроде той, которую дает нам употребление символа τ) и обобщенной гипотезы континуума [12б]. Еще ближе к нашим дням Новак-Гал (I. Novak-Gál) показал, что непротиворечивость системы Цермело — Френкеля влечет непротиворечивость системы фон Неймана — Бернайса — Гёделя [1]).

[1]) N o v a k-G á l I., A construction for models of consistent systems, *Fundam. Math.*, **37** (1950), 87—110.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аристотель (Aristoteles), *The works of Aristotle*, translated under the editorship of W. D. Ross, Oxford, 1928 sqq.

[2] Архимед (Archimedes), *Archimedis Opera Omnia*, 3 тт., изд. J. L. Heiberg, 2-е изд., 1913—1915.

[3] Бёнер П. (Böhner P.), *Medieval logic, an outline of its development from* 1250 *to ca.* 1400, Chicago, 1952.

[4] Больцано Б. (Bolzano B.), *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig, 1851. [Русский перевод: Больцано Б., Парадоксы бесконечного, Одесса, Mathesis, 1911.]

[5] Бохенский (Bochenski J. M.), *Ancient formal logic*, Studies in Logic, Amsterdam (North Holland Publ. Co.), 1951.

[6] Брауэр (Brouwer L. E. J.), а) Intuitionism and formalism, *Bull. Amer. Math. Soc.*, т. XX (1913), стр. 81—96; б) Zur Begründung des intuitionistischen Mathematik, *Math. Ann.*, т. XCIII (1925), стр. 244—257; т. XCV (1926), стр. 453—473; т. XCVI (1926), стр. 451—458.

[7] Буль Дж. (Boole G.), а) *The mathematical analysis of logic*, Cambridge — London, 1847 (= *Collected logical works*, изд. P. Jourdain, Chicago — London, 1916, т. I); б) *An investigation of the laws of thought*, Cambridge — London, 1854 (= *Collected logical works*, т. II).

[8] Бэр Р., Борель Э., Адамар Ж., Лебег А. (Baire R., Borel E., Hadamard J., Lebesgue H.), Cinq Lettres sur la théorie des ensembles, *Bull. Soc. Math. de France*, т. XXXIII (1905), стр. 261—273.

[9] Галилей Г. (Galilei Galileo), *Opere*, Ristampa della Edizione Nationale, 20 тт., Firenze (Barbara), 1929 — 1939.

[10] Ганкель Г. (Hankel H.), *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leipzig (Voss), 1867. [Русский перевод: Ганкель Г., Теория комплексных числовых систем, преимущественно обыкновенных мнимых чисел и кватернионов Гамильтона, вместе с их геометрическим толкованием, Казань 1912.]

[11] Гаусс К. Ф. (Gauss C. F.), *Werke*, 12 тт., Göttingen, 1870—1927.

[12] Гёдель К. (Gödel K.), а) Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, *Monatsh. für Math. u. Phys.*, т. XXXVIII (1931), стр. 173—198; б) *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis*, Ann. of Math. Studies, n° 3, Princeton, 1940. [Русский перевод: Гёдель К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, *УМН*, **3**, № 1 (1948), стр. 96-149.]

[13] Гейтинг А. (Heyting A.), *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie*, Erg. der Math., т. 3, Berlin (Springer), 1934. [Русский перевод: Гейтинг А., Обзор исследований по основаниям математики. Интуиционизм — теория доказательства, М. — Л., ОНТИ, 1936.]

[14] Генцен Г. (Gentzen G.), *Die gegenwartige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie*, Forschungen zur Logik..., Heft 4, Leipzig (Hirzel), 1938.

[15] Гильберт Д. (Hilbert D.), *Grundlagen der Geometrie*, 7-е изд., Leipzig — Berlin (Teubner), 1930. [Русский перевод этого издания: Гильберт Д., Основания геометрии, М. — Л., Гостехиздат, 1948.]

[15а] *Gesammelte Abhandlungen*, т. III, Berlin (Springer), 1935.

[16] Гильберт Д., Аккерман В. (Hilbert D., Ackermann W.), *Grundzüge der theoretischen Logik*, 3-е изд., Berlin (Springer), 1949. [Русский перевод второго издания: Гильберт Д. и Аккерман В., Основы теоретической логики, М., ИЛ, 1947.]

[17] Грассман Г. (Grassmann H.), *Gesammelte Werke*, 6 тт., Leipzig (Teubner), 1894.

[18] Даламбер (D'Alembert), *Encyclopédie*, Paris, 1751 —1765, статьи „Négatif", „Imaginaire", „Définition".

[19] Дедекинд Р. (Dedekind R.), *Gesammelte mathematische Werke*, 3 тт., Braunschweig (Vieweg), 1932.
На русском языке имеются:
а) Непрерывность и иррациональные числа, перевод с немецкого, Одесса, Mathesis, 1923.
б) Что такое числа и для чего они служат? перевод с немецкого, Казань, 1905.

[20] Декарт Р. (Descartes R.), *Oeuvres*, изд. Ch. Adam et P. Tannery, 11 тт., Paris (L. Cerf), 1897—1909). На русском языке имеется ряд сочинений Декарта, в том числе „Рассуждения о методе" с приложением „Диоптрика", „Метеоры", „Геометрия", М., АН СССР, 1953.

[21] Жирар А. (Girard A.), *Invention nouvelle en l'Algebre*, 1629 (новое изд. Bierens de Haan, 1884).

[22] Кантор Г. (Cantor G.), *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin (Springer), 1932.

[23] Кантор Г., Дедекинд Р. (Cantor G., Dedekind R.), *Briefwechsel*, изд. J.Cavaillès — E. Noether, *Actual. Scient. et Ind.*, n° 518, Paris (Hermann), 1937.

[24] Клини С. (Kleene S.), *Introduction to metamathematics*, New York, 1952. [Русский перевод: Клини С. К., Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957.]

[25] Куратовский К. (Kuratowski K.), Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques, *Fund. Math.*, V (1922), стр. 76—108.

[26] Кутюра Л. (Couturat L.), *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, Paris (Alcan), 1901.

[27] Лейбниц Г. (Leibniz G. W.), а) *Mathematische Schriften*, изд. C. I. Gerhardt, 7 тт., Berlin — Halle (Asher — Schmidt), 1849—1863; б) *Philosophische Schriften*, изд. C. I. Gerhardt, 7 тт., Berlin, 1840—1890; в) *Opuscules et fragments inédits*, изд. L. Couturat, Paris (Alcan), 1903.

[28] Лобачевский Н. (Lobatschevsky N.), *Pangeometrie*, Ostwald's Klassiker, n° 130, Leipzig (Engelmann), 1902. [Русский оригинал: Лобачевский Н., Пангеометрия, см. в книге Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. 3, М. — Л., Гостехиздат, 1951, стр. 435—524.]

[29] Мавролико Д. (Maurolyci D. Francisci), *Abbatis Messanensis, Mathematici Celeberrimi, Arithmeticorum Libri Duo*, Venise, 1575.

[30] Морган А. (de Morgan A.), а) On the syllogism (III), *Trans. Camb. Phil. Soc.*, т. X (1858), стр. 173—230; б) On the syllogism (IV) and on the logic of relations, *Trans Camb. Phil. Soc.*, т. X (1860), стр. 331—358.

[31] Нейгебауэр О. (Neugebauer O.), *Vorlesungen über die Geschichte der antiken Mathematik*, т. I. Vorgrieschische Mathematik, Berlin (Springer), 1934. [Русский перевод: Нейгебауэр Отто, Лекции по истории античных математических наук, т. I. Догреческая математика, М. — Л., ОНТИ, 1937.]

[32] Нейман Дж. (von Neimann J.), а) Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *J. de Crelle*, т. CLIV (1925), стр. 219—240; б) Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Zeitschr.*, т. XXVII (1928), стр. 669—752; в) Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math. Zeitschr.*, т. XXVI (1927), стр. 1—46.

[33] Паскаль Б. (Pascal B.), *Oeuvres*, изд. Brunschvicg, 14 тт., Paris (Hachette), 1904—1914.

[34] Паш М., Ден М. (Pasch M., Dehn M.), *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2-е изд., Berlin (Springer), 1926.

[35] Пеано Дж. (Peano G.), а) *Arithmeticas principia, novo methodo exposita*, Turin, 1889; б) *I principii di Geometria, logicamente esposti*, Turin, 1889; в) *Formulaire de Mathématiques*, 5 тт., Turin, 1895—1905.

[36] Пирс К. (Peirce C. S.), а) Upon the logic of mathematics, *Proc. Amer. Acad. Arts and Sci.*, т. VII (1865—1868), стр. 402—412; б) On the algebra of logic, *Amer. Journ. of Math.*, т. III (1880), стр. 49—57; в) On the algebra of logic, *Amer. Journ. of Math.*, т. VII (1884), стр. 190—202.

[37] Пуанкаре А. (Poincaré H.), а) *Science et hypothèse*, Paris (Flammarion), 1906 [русский перевод: Пуанкаре Анри, Наука и гипотеза, Спб., 1906]; б) *La valeur de la Science*, Paris (Flammarion), 1905 [русский перевод: Пуанкаре Анри, Ценность науки, М., 1906]; в) *Science et méthode*, Paris (Flammarion), 1920 [русский перевод по изд. 1908 г.: Пуанкаре А., Наука и метод, Спб., 1910].

[38] Рассел Б., Уайтхед А. (Russell B., Whitehead A. N.), *Principia Mathematica*, 3 тт., Cambridge, 1910—1913.

[39] Риман Б. (Riemann B.), *Gesammelte mathematische Werke*, 2-е изд., Leipzig (Teubner), 1892. [Русский перевод: Риман Б., Сочинения, М. — Л., Гостехиздат, 1948.]

[40] Ришар Ж. (Richard J.), Les principes des Mathématiques et le problème des ensembles, *Rev. Gén. des Sci. pures et appl.*, т. XVI (1905), стр. 541—543.

[41] Сколем Т. (Skolem T.), Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Wiss. Vorträge, 5 Kongress, Skand. Math.*, Helsingfors, 1922.

[42] Фреге Г. (Frege G.), а) *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle, 1879; б) *Die Grundlagen der Arithmetik*, 2-е изд. с английским переводом J. L. Austin, New York, 1950; в) *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, 2 тт., Iena, 1893—1903.

[43] Френкель А. (Fraenkel A.), а) Zu den Grundlagen der Cantor — Zermeloschen Mengenlehre, *Math. Ann.*, т. LXXXVI (1922), стр. 230—237; б) *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, Wiss. und Hypothese, т. 31, Leipzig — Berlin, 1927; в) *Einleitung in die Mengenlehre*, 3-е изд., Berlin (Springer), 1928.

[44] Хис Т. (Heath T. L.), *Mathematics in Aristotle*, Oxford (Clarendon Press), 1949.

[44а] *The thirteen books of Euclid's Elements...*, 3 тт., Cambridge, 1908.

[44б] *The metod of Archimedes*, Cambridge, 1912.

[45] Цермело Е. (Zermelo E.), а) Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, *Math. Ann.*, т. LIX (1904), стр. 514—516; б) Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, *Math. Ann.*, т. LXV (1908), стр. 107—128; в) Untersuchung über die Grundlagen der Mengenlehre, *Math. Ann.*, т. LXV (1908), стр. 261—281.

[46] Цорн М. (Zorn M.), A remark on method in transfinite algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, т. XLI (1935), стр. 667—670.

[47] Шрёдер Е. (Schröder E.), *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, 3 тт., Leipzig (Teubner), 1890.

[48] Эрбран Ж. (Herbrand J.), Recherches sur la théorie de la démonstration, *Trav. Soc. Sci. et Lett. Varsovie*, cl. II (1930), 33—160.

[49] Эрмит Ш., Стильтьес Т. (Hermite C., Stieltjes T.), *Correspondance*, 2 тт., Paris (Gauthier — Villars), 1905.

СВОДКА РЕЗУЛЬТАТОВ [1]

Введение

Читатель найдет в настоящей сводке все определения и результаты Теории множеств, используемые дальше в этом сочинении; он не найдет здесь никаких доказательств. Что касается понятий и терминов, вводимых ниже без определения, читатель может ограничиться их обычным смыслом; это не создаст никаких неудобств для чтения остальных частей этого трактата и сделает почти очевидным большинство предложений, формулируемых в настоящей сводке. Чтение Книги I („Теория множеств") необходимо для читателей, желающих знать, как можно преодолеть логические трудности, вызываемые присутствием этих неопределяемых терминов [2], а также для тех, кто захочет ознакомиться с доказательствами более трудных теорем, сформулированных в § 6 и 7 этой сводки (теорема Цорна и ее следствия) [3].

§ 1. Элементы и части множества

1. *Множество* образовано из *элементов*, способных обладать некими *свойствами* и находиться между собой или с элементами других множеств в неких *соотношениях* [4].

---

[1]) Сводка результатов Теории множеств составляет первый выпуск всего Трактата Бурбаки. Настоящий перевод выполнен с 3-го издания этого выпуска (1958 г.). Перевод со второго издания, осуществленный С. Н. Крачковским, помещен в качестве приложения в русском издании первых глав „Общей топологии" (Н. Бурбаки, „Общая топология. Основные структуры", М., 1958, стр. 264—309). Все существенные расхождения в терминологии между настоящим переводом и переводом С. Н. Крачковского отмечены ниже в подстрочных примечаниях. — *Прим. ред.*

[2]) Читатель не преминет заметить, что „наивная" точка зрения, на которую мы встали в этой сводке для изложения основ Теории множеств, прямо противоположна „формалистской" точке зрения, принятой в выпусках Книги I, резюме которых представляет собой эта сводка; разумеется, эта противоположность преднамеренна и соответствует различным целям, которые преследовались при написании этих двух частей нашего сочинения; за более подробными разъяснениями на этот счет мы отсылаем к введению Книги I.

[3]) Необходимо иметь в виду, что в самом французском оригинале имеются небольшие расхождения в терминологии и обозначениях между главами I—IV, с одной стороны, и Сводкой результатов — с другой. Эти расхождения сохранены в переводе, но оговорены ниже в подстрочных примечаниях. — *Прим. ред.*

[4]) В переводе С. Н. Крачковского — *отношениях*. — *Прим. ред.*

2. Множества и элементы в рассуждениях обозначаются графическими символами, которыми в основном являются буквы (различных алфавитов) или комбинации из букв и других знаков; соотношения между элементами одного или нескольких множеств записывают, вставляя символы, обозначающие эти элементы, в характеристическую схему рассматриваемого соотношения[1]); то же и для свойств.

Буква может обозначать как *определенный* элемент некоторого множества, так и *произвольный* его элемент (называемый также *переменной*, *аргументом* или *общим* элементом). Заменяя в соотношении (или свойстве) произвольный элемент определенным элементом (того же множества), говорят, что первому придан в качестве *значения* этот определенный элемент.

Для указания элементов, фигурирующих в некотором (явно не выписанном) соотношении, последнее представляют обозначением типа R$\{x, y, z\}$ (если x, y, z — элементы, участвующие в рассматриваемом соотношении).

3. Соотношение или свойство, в котором участвуют произвольные элементы[2]), называют *тождеством*, если, какие бы значения ни придавать этим элементам, оно становится истинным высказыванием. Пусть R и S — два соотношения (или свойства); говорят, что R *влечет* S, если S истинно всякий раз, когда произвольные элементы, входящие в эти соотношения, выбраны так, что R истинно; R и S называют *эквивалентными* или *равносильными*, если каждое из этих соотношений влечет другое.

4. Пусть R$\{x, y, z\}$ — соотношение между переменными x, y, z; фраза „каково бы ни было x, R$\{x, y, z\}$" (или „для всякого x R$\{x, y, z\}$") есть соотношение *между* y и z, которое считается истинным для данной системы значений переменных y и z, если R истинно для этих значений y и z и *любого* данного значения x. Аналогично фраза „существует такое x, что R$\{x, y, z\}$" есть соотношение между y и z, считающееся истинным для данной системы значений y и z, если, фиксируя эти значения, можно придать x *по крайней мере одно* значение, для которого R истинно. То же и для соотношения между любым числом переменных.

Если $\overline{R}$ обозначает *отрицание* соотношения R, отрицание соотношения „каково бы ни было x, R" есть „существует x, такое, что $\overline{R}$"; отрицание соотношения „существует x, такое, что R" есть „каково бы ни было x, $\overline{R}$".

[1]) Если символ, обозначающий элемент, является комбинацией нескольких знаков и требуется поставить его в некотором соотношении на место одной буквы, то во избежание возможных смешений его берут обычно в круглые или квадратные скобки.

[2]) Следует подчеркнуть, что когда говорят о *свойстве общего элемента* множества E, это означает отнюдь не то, что это свойство истинно для *каждого* элемента из E, а просто то, что оно *имеет смысл* для *каждого* элемента из E, являясь, может быть, истинным для некоторых из этих элементов и ложным для других. То же для соотношений.

5. Если R и S обозначают два соотношения, условимся, что „R и S" есть *одно* соотношение, считающееся истинным всякий раз, когда *оба* соотношения R и S истинны; аналогично „R или S" есть соотношение, считающееся истинным всякий раз, когда *по крайней мере одно* из соотношений R, S истинно (и, в частности, всякий раз, когда они оба истинны; слово „или" не имеет, таким образом, здесь разделительного смысла, которым оно иногда обладает в обычном языке). Обозначим через $\overline{R}$, $\overline{S}$ отрицания соотношений R, S соответственно; отрицание соотношения „R и S" есть „$\overline{R}$ или $\overline{S}$"; отрицание соотношения „R или S" есть „$\overline{R}$ и $\overline{S}$".

6. Записывая два символа по обе стороны от знака „$=$" (который читается: „равно", „равняется"), получаем соотношение, называемое соотношением *равенства*, означающее, что эти два символа изображают *один и тот же* элемент; отрицание этого соотношения получают, записывая те же символы по обе стороны от знака „$\neq$" (который читается „отлично от", „неравно").

7. Пусть даны множество E и некоторое *свойство* его общего элемента; элементы из E, обладающие этим свойством, образуют новое множество, называемое *частью* или *подмножеством* множества E. Таким образом, два *эквивалентных* свойства определяют *одну и ту* же часть множества E, и обратно.

Пусть A — часть множества E: если x — общий элемент множества E, свойство „x принадлежит A" (т. е. „x есть элемент множества A") записывается „$x \in A$"; очевидно, множество элементов, обладающих этим свойством, есть не что иное, как A.

Отрицание этого свойства обозначается „$x \notin A$" и читается „x не принадлежит A"; множество элементов из E, обладающих этим свойством, называется *дополнением множества* A и обозначается $\complement A$ или E — A.

8. Некоторые свойства, например $x = x$, истинны для *всех* элементов из E; любые два таких свойства эквивалентны; определяемая ими часть, называемая иногда *полной частью* множества E, есть не что иное, как само множество E.

Напротив, некоторые свойства, например $x \neq x$, не истинны ни для какого элемента из E; любые два таких свойства тоже эквивалентны; определяемая ими часть называется *пустой частью* множества E и обозначается $\varnothing$.

Заметим, что E и $\varnothing$ являются дополнениями одно для другого.

9. Пусть a — определенный элемент множества E; некоторые свойства истинны только для *одного* элемента a, например $x = a$; любые два таких свойства эквивалентны; определяемую ими часть обозначают $\{a\}$ и называют частью, *сводящейся к единственному элементу* a, или *состоящей из единственного элемента* a.

10. *Множеством (всех) частей* множества E называют и через $\mathfrak{P}$(E) обозначают множество, элементами которого являются все *части*

множества E. Имеем $\varnothing \in \mathfrak{P}(E)$, $E \in \mathfrak{P}(E)$ и, каков бы ни был $x \in E$, $\{x\} \in \mathfrak{P}(E)$. Если x обозначает общий элемент множества E, а X — общий элемент множества $\mathfrak{P}(E)$, соотношение „$x \in X$“ между x и X называют *соотношением принадлежности*.

11. Пусть x и y — два элемента из E, X — общий элемент множества $\mathfrak{P}(E)$; соотношение равенства „$x = y$“ *эквивалентно* соотношению „для всякого X, такого, что $x \in X$, имеет место $y \in X$“.

12. Пусть X, Y — две части множества E; если свойство $x \in X$ влечет свойство $x \in Y$, иными словами, если каждый элемент из X принадлежит также к Y, говорят, что X *содержится в* Y, или что Y *содержит* X, или что X *есть часть множества* Y; это соотношение между X и Y называется соотношением *включения* (множества X в Y) и обозначается „$X \subset Y$“ или „$Y \supset X$“; его отрицание обозначается „$X \not\subset Y$“ или „$Y \not\supset X$“.

Какова бы ни была часть X множества E, имеем $\varnothing \subset X$ и $X \subset E$. Соотношение принадлежности „$x \in X$“ эквивалентно „$\{x\} \subset X$“.

Соотношение „$X \subset Y$ и $Y \subset Z$“ влечет „$X \subset Z$“.

Соотношение „$X \subset Y$“ не исключает возможности „$X = Y$“; соотношение „$X \subset Y$ и $Y \subset X$“ эквивалентно „$X = Y$“.

13. Пусть X и Y — две произвольные части множества E; множество элементов, обладающих свойством „$x \in X$ или $x \in Y$“, обозначается $X \cup Y$ и называется *объединением* множеств X и Y; множество элементов, обладающих свойством „$x \in X$ и $x \in Y$“, обозначается $X \cap Y$ и называется *пересечением* множеств X и Y.

Аналогично определяют объединение и пересечение нескольких частей множества E.

Если x, y, z — три элемента из E, объединение $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\}$ обозначается также $\{x, y, z\}$. Так же для любого числа (индивидуально поименованных) элементов.

Пусть X и Y — две части множества E; смотря по тому, имеет ли место $X \cap Y \neq \varnothing$ или $X \cap Y = \varnothing$, говорят, что X и Y *пересекаются* или *не пересекаются*.

14. В формулировке следующих предложений X, Y, Z обозначают произвольные части одного и того же множества E.

а) $\varnothing = \complement E$, $E = \complement \varnothing$.

б) Каково бы ни было X,

$$\complement(\complement X) = X, \tag{1}$$

$$X \cup X = X, \qquad X \cap X = X; \tag{2}$$

$$X \cup (\complement X) = E, \quad X \cap (\complement X) = \varnothing; \tag{3}$$

$$X \cup \varnothing = X, \qquad X \cap E = X; \tag{4}$$

$$X \cup E = E, \qquad X \cap \varnothing = \varnothing. \tag{5}$$

в) Каковы бы ни были X и Y,

$$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X \text{ (коммутативность)}. \tag{6}$$

$$X \subset X \cup Y, \quad X \cap Y \subset X; \tag{7}$$

$$\complement(X \cup Y) = (\complement X) \cap (\complement Y), \quad \complement(X \cap Y) = (\complement X) \cup (\complement Y). \tag{8}$$

г) Соотношения

$$X \subset Y, \quad \complement X \supset \complement Y, \quad X \cup Y = Y, \quad X \cap Y = X$$

эквивалентны.

д) Соотношения

$$X \cap Y = \varnothing, \quad X \subset \complement Y, \quad Y \subset \complement X$$

эквивалентны.

е) Соотношения

$$X \cup Y = E; \quad \complement X \subset Y, \quad \complement Y \subset X$$

эквивалентны.

ж) Каковы бы ни были X, Y, Z,

$$\left.\begin{aligned} &X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z = X \cup Y \cup Z, \\ &X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z = X \cap Y \cap Z \text{ (ассоциативность)}; \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \\ &X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \text{ (дистрибутивность)}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

з) Соотношение $X \subset Y$ влечет соотношения

$$X \cup Z \subset Y \cup Z \quad \text{и} \quad X \cap Z \subset Y \cap Z.$$

и) Соотношение „$Z \subset X$ и $Z \subset Y$“ эквивалентно соотношению $Z \subset X \cap Y$; соотношение „$X \subset Z$ и $Y \subset Z$“ эквивалентно соотношению „$X \cup Y \subset Z$“.

15. На основании тождеств (8), если некоторая часть A множества E получается из других частей X, Y, Z множества E применением, не важно в каком порядке, одних только операций $\complement$, $\cup$, $\cap$, то дополнение $\complement A$ получается заменой частей X, Y, Z их дополнениями и операций $\cup$, $\cap$ на $\cap$, $\cup$ соответственно, причем порядок операций сохраняется; это — *правило двойственности*. Пусть дано равенство $A = B$ частей указанного вида; рассмотрим эквивалентное равенство $\complement A = \complement B$; если $\complement A$ и $\complement B$ заменить выражениями, получающимися применением правила двойственности, а затем в полученных выражениях заменить $\complement X$, $\complement Y$, $\complement Z$ на X, Y, Z и обратно, получим равенство, называемое *двойственным* к $A = B$; аналогично можно оперировать с соотношением включения $A \subset B$, не забывая только заменить знак „$\subset$“ на „$\supset$“.

Тождества, записанные выше под одним и тем же номером, двойственны друг другу.

16. В некоторых вопросах рассматривают определенную часть A множества E; пусть X — любая другая часть множества E; назовем тогда *следом* (от) множества X на A множество $A \cap X$, которое часто обозначается также X_A и в этом случае рассматривается всегда как часть множества A. Каковы бы ни были части X, Y множества E,

$$(X \cup Y)_A = X_A \cup Y_A, \quad (X \cap Y)_A = X_A \cap Y_A$$

и

$$\complement_A X_A = (\complement_E X)_A$$

(где $\complement_E X$ обозначает дополнение множества X, взятое относительно E, а $\complement_A X_A$ — дополнение множества X_A, взятое относительно A).

Если $\mathfrak{S}$ обозначает некоторое *множество подмножеств* множества E, назовем аналогично *следом* (от) множества $\mathfrak{S}$ на A множество $\mathfrak{S}_A$ следов множеств из $\mathfrak{S}$ на A.

§ 2. Функции

1. Пусть E и F — два множества, не обязательно различных. Соотношение между переменной x из E и переменной y из F называется *соотношением, функциональным* по y, если для любого $x \in E$ существует и единствен элемент y из F, находящийся с x в рассматриваемом соотношении.

Операцию, сопоставляющую таким способом всякому элементу $x \in E$ элемент $y \in F$, находящийся с x в данном соотношении, называют *функцией*; говорят, что y есть *значение* функции для элемента x и что функция *определяется* рассматриваемым функциональным соотношением. Два *эквивалентных* функциональных соотношения определяют *одну и ту же* функцию. Говорят, что такая функция „принимает свои значения в F“ и что она „определена на E“, или также, что это „функция аргумента (или переменной), пробегающего E“; более коротко говорят также, что это *отображение множества* E *в* F.

2. Отображения множества E в множество F являются *элементами* нового множества — *множества отображений множества* E *в* F. Если f — произвольный элемент этого множества, через $f(x)$ часто обозначают значение функции f для элемента x из E; в некоторых случаях предпочитают употреблять обозначение f_x, называемое *индексным* обозначением (множество E называется тогда множеством *индексов*). Соотношение „$y = f(x)$“ есть функциональное по y соотношение, определяющее f.

Если соотношение вида $y = \langle x \rangle$ (где $\langle x \rangle$ обозначает комбинацию знаков, в которой, быть может, фигурирует x) есть функциональное соотношение по y, функцию, им определенную, обозначают также

$$x \to \langle x \rangle$$

или даже просто $\langle x \rangle$ — весьма часто встречающаяся вольность обозначений. Например, если X и Y — две общие части множества E, соотношение $Y = \complement X$ функционально по Y; отображение множества $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{P}(E)$, им определенное, обозначают через $X \to \complement X$ или просто $\complement X$. Вместо того чтобы сказать „пусть f — отображение множества E в F“, часто говорят проще: „пусть f: $E \to F$“. Чтобы описать ситуацию, в которой фигурирует несколько отображений, употребляют также *диаграммы*, подобные такой

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & {}^{g}\nearrow & & \searrow^{h} & \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{v} & E \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle w} \\ & & D & \xleftarrow{t} & F \end{array},$$

где буква над стрелкой обозначает отображение множества, стоящего у начала этой стрелки, в множество, стоящее у ее конца.

Соотношение равенства „$f = g$“ между отображениями множества E в F эквивалентно соотношению „каково бы ни было $x \in E$, $f(x) = g(x)$“.

3. Функция, определенная в множестве E и принимающая одно и то же значение a для всякого элемента x из E, называется *постоянной* в E; она определена функциональным соотношением $y = a$.

Отображение множества E в E, ставящее в соответствие каждому элементу x из E сам этот элемент, называется *тождественным* отображением; оно определено функциональным соотношением $y = x$.

Пусть A — произвольная часть множества E; отображение множества A в E, которое каждому элементу x из A ставит в соответствие x, рассматриваемый как элемент множества E, называется *каноническим* отображением множества A в E.

Пусть f — отображение множества E в себя: элемент $x \in E$ называется *инвариантным* (или *неподвижным*) *для* (или *относительно*, или *при*) f, если $f(x) = x$.

Говорят, что x *инвариантен* (*неподвижен*) *относительно* (*для*, *при*) некоторого множества отображений множества E в E, если он инвариантен относительно каждого из них.

4. Пусть f — отображение множества E в F и X — какая-либо часть множества E. *Образом множества* X *при* (или *относительно*, или *по*) f или, иначе, *множеством значений, принимаемых отображением* f *на* X, называется часть Y множества F, образованная теми элементами y, которые обладают свойством:

„существует $x \in E$, такое, что $x \in X$ и $y = f(x)$“.

Этим определены соотношение между X и Y, функциональное по Y, и, следовательно, отображение множества $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{P}(F)$, называемое *распространением отображения* f *на множества подмножеств*; допуская вольность речи, его обозначают снова f и пишут $Y = f(X)$.

Каковы бы ни были f и x,

$$f(\varnothing)=\varnothing \quad \text{и} \quad f(\{x\})=\{f(x)\}.$$

Допуская вольность речи, *значение* $f(x)$ отображения f для x называют также *образом элемента* x *согласно* f.

Если y — общий элемент множества F, свойство „$y\in f(\mathrm{E})$“ выражают также, говоря, что „y имеет вид $f(x)$“.

Допуская вольность речи, образ $f(\mathrm{E})$ множества E относительно f называют иногда *образом отображения* f.

Если $f(\mathrm{E})=\mathrm{F}$, т. е. если для любого $y\in\mathrm{F}$ существует $x\in\mathrm{E}$, такое, что $y=f(x)$, говорят, что f есть отображение множества E *на* F. Говорят также, что f есть *сюръективное отображение* или *сюръекция*.

Пусть x — произвольный элемент и X — произвольная часть множества E. Вместо того чтобы говорить, что $f(x)$ есть значение отображения f для x, а $f(\mathrm{X})$ — образ множества X согласно f, говорят иногда, что f *преобразует* x в $f(x)$ и X в $f(\mathrm{X})$; $f(x)$ и $f(\mathrm{X})$ называются тогда *трансформатами* по (относительно, при) f от x и X соответственно. Этот язык особенно употребителен, когда f есть отображение множества E *на* F; в этом случае говорят также, что f есть *преобразование множества* E *в* F.

Если f — отображение множества E в себя, часть X множества E называют *устойчивой относительно* f, если $f(\mathrm{X})\subset\mathrm{X}$. Говорят, что X *устойчиво* относительно некоторого множества отображений множества E в E, если X устойчиво относительно каждого из этих отображений.

5. Пусть f — отображение множества E в F; имеют место следующие предложения, где X и Y обозначают произвольные части множества E:

а) Соотношение $\mathrm{X}\subset\mathrm{Y}$ влечет соотношение $f(\mathrm{X})\subset f(\mathrm{Y})$.

б) Свойство $\mathrm{X}\neq\varnothing$ эквивалентно свойству $f(\mathrm{X})\neq\varnothing$.

в) Каковы бы ни были X, Y,

$$f(\mathrm{X}\cup\mathrm{Y})=f(\mathrm{X})\cup f(\mathrm{Y}), \tag{11}$$

$$f(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})\subset f(\mathrm{X})\cap f(\mathrm{Y}). \tag{12}$$

6. Пусть f — отображение множества E в F, а Y — произвольная часть множества F. *Полным прообразом* множества Y относительно (при, по) f называется часть X множества E, образованная теми элементами x, которые обладают свойством

$$f(x)\in\mathrm{Y}.$$

Этим определены соотношение между X и Y, функциональное по X, и тем самым отображение множества $\mathfrak{P}(\mathrm{F})$ и $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$, называемое *обратным распространением отображения* f *на множества частей* и обозначаемое $\overset{-1}{f}$; таким образом, пишут $\mathrm{X}=\overset{-1}{f}(\mathrm{Y})$.

В частности, если y — элемент множества F, $\overset{-1}{f}(\{y\})$ будет множеством тех $x\in\mathrm{E}$, для которых $f(x)=y$; соотношения „$f(x)=y$“ и „$x\in\overset{-1}{f}(\{y\})$“ эквивалентны. Допуская вольность речи, вместо $\overset{-1}{f}(\{y\})$ пишут также $\overset{-1}{f}(y)$.

След $\mathrm{X_A}$ (от) части X множества E на определенной части A есть не что иное, как полный прообраз множества X согласно каноническому отображению множества A в E (п° 3).

7. Пусть f — отображение множества E в F; имеют место следующие предложения, где X и Y обозначают произвольные части множества F:

а) Соотношение $\mathrm{X}\subset\mathrm{Y}$ влечет $\overset{-1}{f}(\mathrm{X})\subset\overset{-1}{f}(\mathrm{Y})$.

б) Каковы бы ни были X, Y,

$$\overset{-1}{f}(\mathrm{X}\cup\mathrm{Y})=\overset{-1}{f}(\mathrm{X})\cup\overset{-1}{f}(\mathrm{Y}), \tag{13}$$

$$\overset{-1}{f}(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})=\overset{-1}{f}(\mathrm{X})\cap\overset{-1}{f}(\mathrm{Y}), \tag{14}$$

$$\overset{-1}{f}(\complement\mathrm{X})=\complement\overset{-1}{f}(\mathrm{X}). \tag{15}$$

Отметим различие между формулами (12) и (14); (14) не будет истинной для произвольных X и Y, если в ней $\overset{-1}{f}$ заменить произвольным отображением множества F в E. Аналогично и соотношение (15) не имеет аналога для распространения произвольного отображения.

Кроме того, $\overset{-1}{f}(\varnothing)=\varnothing$; но здесь и для непустого подмножества X множества F может иметь место $\overset{-1}{f}(\mathrm{X})=\varnothing$; для того чтобы $\mathrm{X}\neq\varnothing$ влекло $\overset{-1}{f}(\mathrm{X})\neq\varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы f было отображением множества E *на* F.

8. Если отображение f множества E в F таково, что для всякого $y\in\mathrm{F}$ существует *не более одного* $x\in\mathrm{E}$, для которого $f(x)=y$ (иначе говоря, $\overset{-1}{f}(\{y\})$ либо пусто, либо сводится к единственному элементу), f называется *взаимно однозначным* отображением множества E *в* множество F, или *инъективным отображением*, или *инъекцией*. В этом случае, каковы бы ни были части X, Y множества E,

$$f(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})=f(\mathrm{X})\cap f(\mathrm{Y}). \tag{16}$$

9. Если отображение f множества E в F таково, что для всякого $y\in\mathrm{F}$ *существует и единственно* $x\in\mathrm{F}$, для которого $f(x)=y$ (иначе говоря, $\overset{-1}{f}(\{y\})$ сводится к единственному элементу), f назы-

вается *взаимно однозначным* отображением множества E *на* множество F, или *биективным отображением*, или *биекцией*. Такое отображение можно охарактеризовать как отображение, являющееся одновременно отображением E на F и взаимно однозначным отображением E в F.

Если f — взаимно однозначное отображение множества E на F, соотношение $y = f(x)$ не только функционально по y, но также *функционально по* x. Как функциональное по x соотношение, оно определяет взаимно однозначное отображение множества F на E, называемое *отображением, обратным к* f.

Заметим, что *распространение отображения, обратного* к f, совпадает с *обратным распространением* отображения f.

Пусть g — отображение, обратное к f; соотношения „$y = f(x)$" и „$x = g(y)$" *эквивалентны*; отображение, обратное к g, есть f. Если f — взаимно однозначное отображение множества E на F, то не только имеет место соотношение (16), но также для любой части X множества E

$$f(\complement X) = \complement f(X).$$

Кроме того, распространение отображения f является взаимно однозначным отображением множества $\mathfrak{P}(E)$ на $\mathfrak{P}(F)$.

Говорят, что взаимно однозначное отображение множества E на F и обратное к нему отображение *осуществляют* (или *реализуют*) *взаимно однозначное соответствие* между E и F или что E и F *приводятся* или *ставятся* этими отображениями *во взаимно однозначное соответствие*.

Взаимно однозначное отображение множества E на себя называется *перестановкой* множества E; тождественное отображение есть перестановка. Если некоторая перестановка совпадает с обратным к ней отображением, она называется *инволютивной*; такой является, например, отображение $X \to \complement X$ множества $\mathfrak{P}(E)$ на себя.

10. В нижеследующих предложениях X обозначает произвольную часть множества E, а Y — произвольную часть множества F:

а) Если f — отображение множества E *в* F, то

$$\overset{-1}{f}(Y) = \overset{-1}{f}(Y \cap f(E)), \tag{17}$$

$$X \subset \overset{-1}{f}(f(X)), \tag{18}$$

$$f(\overset{-1}{f}(Y)) \subset Y. \tag{19}$$

б) Свойства „каково бы ни было Y, $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y$" и „$f$ есть отображение множества E *на* F" эквивалентны.

в) Свойства „каково бы ни было X, $\overset{-1}{f}(f(X)) = X$" и „$f$ есть *взаимно однозначное* отображение множества E *в* F" эквивалентны.

г) Свойства „каковы бы ни были X и Y, $\overset{-1}{f}(f(X)) = X$ и $f(\overset{-1}{f}(Y)) = Y$" и „$f$ есть *взаимно однозначное* отображение множества E *на* F" эквивалентны.

11. Пусть E, F, G — три множества, не обязательно различных; пусть f — отображение множества E в множество F, а g — отображение множества F в множество G. Отображение множества E в множество G, значением которого на любом элементе x из E является $g(f(x))$, называется (*составным*) *отображением, составленным* (или *скомпанованным*) *из* g *и* f [или (сложной) функцией, составленной (скомпанованной) из g и f], или *композицией* отображений g и f[1]) и обозначается $g \circ f$ или даже — когда это не приводит к двусмысленности — просто gf.

Равенство $h = g \circ f$ называется *факторизацией* отображения h.

Заметим, что если G отлично от E, нельзя говорить о композиции отображений f *и* g и запись $f \circ g$ не имеет никакого смысла; если G совпадает с E, то $f \circ g$ и $g \circ f$ являются элементами одного и того же множества лишь в том случае, когда F также совпадает с E; и даже в этом случае, вообще говоря, $f \circ g \neq g \circ f$; таким образом, *порядок*, в котором компонируются отображения f и g, существен.

Пусть φ — отображение, составленное из g и f, X — произвольная часть множества E, а Z — произвольное подмножество множества G; тогда

$$\varphi(X) = g(f(X)), \tag{20}$$

$$\overset{-1}{\varphi}(Z) = \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(Z)). \tag{21}$$

Если f — *взаимно однозначное* отображение множества E *на* F и g — *взаимно однозначное* отображение множества F *на* G, то $g \circ f$ — взаимно однозначное отображение множества E *на* G.

Пусть h — отображение множества G в множество H; тогда

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

---

[1]) В подлиннике: „s'appele *l'application composée de g et f* (ou fonction composée de g et f)". В приложении к русскому изданию первых глав „Общей топологии" Н. Бурбаки (М., 1958) эта фраза переводится так: „называется *суперпозицией* или *композицией отображений f и g*, или также *сложной функцией*, составленной из f и g". Разумеется, порядок, в котором перечисляются компонируемые отображения в *словесном* определении композиции $g \circ f$, существен. В настоящем переводе этот порядок оставлен таким же, как во французском оригинале (в частности, как в определении 7 из гл. II, § 3, п° 3); он совпадает также с порядком, указанным в статье „Композиция" во 2-м издании Большой советской энциклопедии. Читателю, однако, необходимо иметь в виду, что этот порядок расходится с порядком упоминания компонируемых отображений, принятым в уже вышедших русских переводах книг и глав трактата Бурбаки [в качестве примера можно привести текст определения 2 на стр. 18 русского издания первых глав „Алгебры" (М., 1962)]. — *Прим. ред.*

это отображение множества E в H обозначается также $h\circ g\circ f$; про него говорят, что оно *составлено* (*скомпоновано*) из трех отображений h, g, f (взятых в этом порядке) или что оно есть *композиция* отображений h, g, f (взятых в этом порядке[1])). Аналогично определяют композицию большего числа отображений (см. „Алгебра“, гл. I).

Если f — отображение множества E в себя, *итерациями* отображения f называют отображения f^n (n — целое, $n\geqslant 1$) множества E в себя, определенные с помощью индукции по n соотношениями $f^1=f$, $f^n=f^{n-1}\circ f$; отображение f^n называют *n-й итерацией* отображения f. Имеем $f^{m+n}=f^m\circ f^n$.

12. Вообще говоря, композиция $\overset{-1}{f}\circ f$ обратного распространения и распространения отображения f не является тождественным отображением множества $\mathfrak{P}(E)$ на себя; аналогично и $f\circ\overset{-1}{f}$ не является в общем случае тождественным отображением множества $\mathfrak{P}(F)$ на себя. Одновременно эти два свойства имеют место только тогда, когда f — *взаимно однозначное отображение множества* E *на* F.

Пусть в этом случае g обозначает отображение, обратное к f; тогда, кроме того, композиции $g\circ f$ и $f\circ g$ являются тождественными отображениями соответственно множества E на себя и множества F на себя.

Обратно, если f — отображение множества E в F и g — отображение множества F в E, такие, что $g\circ f$ является перестановкой множества E, а $f\circ g$ является перестановкой множества F, то f — взаимно однозначное отображение множества E на F, а g — взаимно однозначное отображение множества F на E. Если, кроме того, $g\circ f$ — тождественное отображение множества E на E, то g является отображением, обратным к f.

13. Пусть f — отображение множества E в F и A — произвольная часть множества E; отображение f_A[2]) множества A в F, значением которого на любом элементе x из A является $f(x)$, называется *сужением отображения f на часть* A; f_A есть не что иное, как композиция отображения f и канонического отображения множества A в E. Если два отображения f, g множества E в F имеют одинаковое сужение на A, говорят также, что они *совпадают на* A. Обратно, f называют *продолжением* отображения f_A на E.

14. Отображение множества E *на* множество F называют еще *параметрическим представлением множества* F *посредством множества* или *через множество* E; тогда E называется *множеством параметров* этого представления, а его элементы — *параметрами*.

Семейство элементов множества F есть, по определению, часть множества F, наделенная параметрическим представлением; другими словами, задание семейства элементов из F равнозначно заданию отображения какого-нибудь множества E в F. Образ множества E при этом отображении называется *множеством элементов семейства*; заметим, что два различных семейства элементов F могут иметь множеством своих элементов одну и ту же часть множества F.

Любой части A множества F всегда можно поставить в соответствие семейство элементов, множеством элементов которого является A; для этого достаточно рассмотреть семейство, определенное *каноническим* отображением множества A в F.

Если семейство элементов множества F определено отображением $\iota\to x_\iota$ множества I в F, его обозначают $(x_\iota)_{\iota\in I}$ или просто (x_ι), если невозможна неясность относительно множества индексов.

Если J — подмножество множества I, семейство $(x_\iota)_{\iota\in J}$ называется *подсемейством* семейства $(x_\iota)_{\iota\in I}$, соответствующим множеству J; оно определяется сужением отображения $\iota\to x_\iota$ на J.

[1]) В подлиннике: „on dit qu'elle est composée des trois applications h, g, f prises dans cet ordre“; в приложении к русскому изданию первых глав „Общей топологии“ эта фраза переведена так: „это отображение ... называют *суперпозицией* трех отображений f, g, h (взятых в этом порядке)“; см. предыдущее подстрочное примечание. — *Прим. ред.*

[2]) В гл. II, § 3, n° 5 это отображение обозначено через f/A. — *Прим. ред.*

§ 3. Произведение нескольких множеств

1. Пусть E и F — два множества, *не обязательно различных*. *Пары* (x, y), в которых первый элемент x есть произвольный элемент множества E, а второй y — произвольный элемент множества F, являются элементами нового множества, называемого *произведением множества* E *на множество* F и обозначаемого $E\times F$; множества E и F называются *множителями* или *сомножителями* множества $E\times F$. Две пары считаются тождественными только в том случае, если у них одни и те же первые элементы и одни и те же вторые элементы; иначе говоря, соотношение „$(x, y)=(x', y')$“ *эквивалентно* соотношению „$x=x'$ и $y=y'$“. Если z — произвольный элемент множества $E\times F$, соотношение „x есть первый элемент пары z“ есть функциональное соотношение по x; оно определяет отображение множества $E\times F$ *на* E, называемое *первой координатой* или *первой проекцией*[1]) и обозначаемое pr_1; вместо того чтобы сказать „x есть первый элемент пары z“, говорят также „x есть первая координата пары z“, „x есть первая проекция

[1]) Читатель заметит здесь расхождение с терминологией гл. II, в которой это отображение было названо *первой координатной функцией* (§ 3, n° 6), а *первой координатой* или *первой проекцией* пары z из множества $E\times F$ называлось *значение* этого отображения для пары z (§ 2, n° 1). Аналогично для *второй координаты*, *второй проекции* и распространения функций pr_1 и pr_2 на множества частей (см. ниже). — *Прим. ред.*

пары z“ [1]), „$x=\mathrm{pr}_1(z)$“. Аналогично определяется *вторая координата* или *вторая проекция*, являющаяся отображением множества $E\times F$ *на* F и обозначаемая через pr_2.

Соотношение „$x=\mathrm{pr}_1(z)$ и $y=\mathrm{pr}_2(z)$“ эквивалентно соотношению

$$„z=(x, y)“.$$

Распространение функции pr_1 на множества частей обозначается в соответствии с общими соглашениями тем же символом и также называется *первой проекцией* (здесь термин „координата“ не употребляется). Аналогично для распространения второй проекции [2]).

2. Соотношение R между общим элементом x множества E и общим элементом y множества F есть свойство пары (x, y) и, следовательно, определяет часть произведения $E\times F$, называемое *графиком* соотношения R; обратно, всякая часть A множества $E\times F$ есть график соотношения $(x, y)\in A$ между x и y.

Пусть A — часть множества E и B — часть множества F; через $A\times B$ обозначают часть произведения $E\times F$, определенную соотношением „$x\in A$ и $y\in B$“ между x и y.

3. В следующих предложениях X, X' обозначают произвольные части множества E; Y, Y' — произвольные части множества F; Z — произвольную часть множества $E\times F$.

а) Соотношение „$X\times Y=\varnothing$“ *эквивалентно* соотношению „$X=\varnothing$ или $Y=\varnothing$“.

б) Если $X\times Y\neq\varnothing$, соотношение „$X\times Y\subset X'\times Y'$“ *эквивалентно* соотношению „$X\subset X'$ и $Y\subset Y'$“.

в) Каковы бы ни были X, X', Y,

$$(X\times Y)\cup(X'\times Y)=(X\cup X')\times Y. \qquad (22)$$

г) Каковы бы ни были X, X', Y, Y',

$$(X\times Y)\cap(X'\times Y')=(X\cap X')\times(Y\cap Y'). \qquad (23)$$

д) Каковы бы ни были X, Y,

$$\overset{-1}{\mathrm{pr}_1}(X)=X\times F, \quad \overset{-1}{\mathrm{pr}_2}(Y)=E\times Y. \qquad (24)$$

е) Если $Y\neq\varnothing$, то, каково бы ни было X,

$$\mathrm{pr}_1(X\times Y)=X. \qquad (25)$$

[1]) В рамках введенной только что терминологии эти выражения (полностью соответствующие терминологии гл. II, § 2, n° 1) представляют собой вольности речи: без допущения вольностей надо было бы говорить „x есть значение первой координаты (или первой проекции) для пары z“. — *Прим. ред.*

[2]) Допуская вольность речи, *значение* так определенной проекции (первой или второй) для какой-либо части произведения $E\times F$ называют просто *проекцией* (*первой* или *второй*) этой части (см. ниже n° 6), что совпадает с употреблением термина „проекция“ в гл. II, § 3, n° 1. — *Прим. ред.*

ж) Каково бы ни было Z,

$$Z\subset \mathrm{pr}_1(Z)\times\mathrm{pr}_2(Z). \qquad (26)$$

з) Пусть a — элемент из E; отображение $(a, y)\to y$ множества $\{a\}\times F$ *на* F (т. е. сужение функции pr_2 на часть $\{a\}\times F$) *взаимно однозначно*.

4. Отображение

$$(x, y)\to(y, x) \qquad (27)$$

есть *взаимно однозначное* отображение множества $E\times F$ *на* $F\times E$, называемое *каноническим* отображением. В случае, когда E и F совпадают, отображение (27) называется *канонической симметрией*; оно тогда *инволютивно*. Элементы (x, y) множества $E\times E$, инвариантные относительно этой симметрии, это элементы, обладающие свойством $x=y$; множество Δ этих элементов называется *диагональю* произведения $E\times E$. Отображение

$$x\to(x, x)$$

есть *взаимно однозначное* отображение множества E *на* Δ, называемое *диагональным отображением* множества E в $E\times E$.

Если Z обозначает произвольную часть множества $E\times F$, через $\overset{-1}{Z}$ обозначается образ множества Z согласно каноническому отображению множества $E\times F$ на $F\times E$. Пусть X — произвольная часть множества E, Y — произвольная часть множества F; тогда $\overset{-1}{\widehat{X\times Y}}=Y\times X$.

Если соотношение R между x и y, рассматриваемое как свойство пары (x, y), определяет часть A произведения $E\times F$, то *это же* соотношение, рассматриваемое как свойство пары (y, x), определяет часть $\overset{-1}{A}$ произведения $F\times E$; соотношение R эквивалентно каждому из соотношений $(x, y)\in A$, $(y, x)\in\overset{-1}{A}$. Если E и F совпадают, соотношение R и соответствующая часть A называются *симметричными*, коль скоро $A=\overset{-1}{A}$. Диагональ Δ (определяемая соотношением равенства) симметрична; если Z — произвольная часть множества $E\times E$, то $Z\cup\overset{-1}{Z}$ и $Z\cap\overset{-1}{Z}$ симметричны.

5. Пусть A — часть множества E и f — отображение множества A в множество F; соотношение между общим элементом x множества E и общим элементом y множества F, выражаемое записью

$$„x\in A \quad \text{и} \quad y=f(x)“,$$

определяет часть произведения $E\times F$, называемую *графиком* функции f. Если B — часть множества E, содержащая A, и g — *продол-*

жение (§ 2, n° 13) функции f на B, график функции f *содержится* в графике функции g.

Обратно, пусть C — часть произведения $E \times F$, такая, что для всякого $x \in E$ существует *не более одного* $y \in F$, для которого $(x, y) \in C$; соотношение $(x, y) \in C$ между общим элементом x *множества* $\mathrm{pr}_1(C)$ и общим элементом y множества F есть функциональное соотношение по y, определяющее отображение множества $\mathrm{pr}_1(C)$ в множество F, графиком которого является C.

Множество частей C произведения $E \times F$, обладающих свойством „каков бы ни был $x \in E$, существует не более одного $y \in F$, такого, что $(x, y) \in C$" (множество, являющееся частью множества $\mathfrak{P}(E \times F)$), может быть, таким образом, поставлено во взаимно однозначное соответствие с *множеством отображений произвольной части множества* E *в* F.

Пусть f — инъективное отображение множества E в F, g — отображение, обратное к отображению f, рассматриваемому как биекция множества E на $f(E)$; если C есть график отображения f, то график отображения g есть $\overset{-1}{C}$.

6. Если f — отображение множества E в F и C — его график в $E \times F$, соотношение „$y = f(x)$" эквивалентно соотношению „$(x, y) \in C$"; соотношение „$y \in f(X)$" эквивалентно соотношению „существует такое x, что $x \in X$ и $(x, y) \in C$".

Пусть теперь K — *произвольная* часть множества $E \times F$ и X — произвольная часть множества E. Обозначим через $K(X)$ часть множества F, образованную элементами y, удовлетворяющими соотношению „существует x, такой, что $x \in X$ и $(x, y) \in K$"; таким образом, это соотношение эквивалентно соотношению

$$„y \in K(X)".$$

Говорят, что отображение $X \to K(X)$ множества $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{P}(F)$ *определено частью* K множества $E \times F$. Заметим, что $K(X)$ есть не что иное, как вторая проекция множества $K \cap (X \times F)$. Когда K есть график некоторого отображения f множества E в F, отображение $X \to K(X)$ совпадает с распространением отображения f на множества частей.

7. Если x — общий элемент множества E, то $x \to K(\{x\})$ есть отображение множества E в $\mathfrak{P}(F)$; значение $K(\{x\})$ этого отображения (обозначаемое также, допуская вольность речи, $K(x)$), называется *срезом части* K *по* x. Соотношение $(x, y) \in K$ эквивалентно соотношению $y \in K(x)$.

Обратно, *всякое* отображение $x \to \Phi(x)$ множества E в $\mathfrak{P}(F)$ может быть получено таким образом, ибо соотношение $y \in \Phi(x)$ определяет некоторую часть K множества $E \times F$ и $\Phi(x)$ есть не что иное, как срез части K по x. Тем самым множество $\mathfrak{P}(E \times F)$ и множество отображений множества E в $\mathfrak{P}(F)$ ставятся во взаимно однозначное соответствие.

8. Всякое отображение $X \to K(X)$, определенное частью K множества $E \times F$, обладает следующими свойствами, обобщающими свойства распространения отображения множества E в F (§ 2, n° 4 и 5):

а) $K(\varnothing) = \varnothing$.

б) „$X \subset Y$" влечет „$K(X) \subset K(Y)$".

в) Каковы бы ни были X, Y,

$$K(X \cup Y) = K(X) \cup K(Y), \tag{28}$$

$$K(X \cap Y) \subset K(X) \cap K(Y). \tag{29}$$

Если K и K′ — две части множества $E \times F$, такие, что $K \subset K'$, то $K(X) \subset K'(X)$ для всякого $X \subset E$; в частности, $K(x) \subset K'(x)$, каков бы ни был $x \in E$. Обратно, если $K(x) \subset K'(x)$, каков бы ни был $x \in E$, то $K \subset K'$.

9. Соотношение между общим элементом множества E и общим элементом множества F определяет часть K множества $E \times F$ и часть $\overset{-1}{K}$ множества $F \times E$ и, следовательно, отображение $X \to K(X)$ множества $\mathfrak{P}(E)$ в множество $\mathfrak{P}(F)$ и отображение $Y \to \overset{-1}{K}(Y)$ множества $\mathfrak{P}(F)$ в множество $\mathfrak{P}(E)$.

Когда K является графиком отображения f множества E в F, отображение $Y \to \overset{-1}{K}(Y)$ есть не что иное, как обратное распространение отображения f.

Следует заметить, что соотношения (18) и (19) не обобщаются на отображения $X \to K(X)$ и $Y \to \overset{-1}{K}(Y)$, если K — произвольная часть множества $E \times F$.

10. Пусть E, F, G — три множества, не обязательно различных, A — часть множества $E \times F$, B — часть множества $F \times G$. Элементы (x, z) множества $E \times G$, обладающие свойством

$$„\text{существует } y \in F, \text{ такое, что } (x, y) \in A \text{ и } (y, z) \in B",$$

образуют часть множества $E \times G$, называемую множеством, *составленным* (или *скомпонованным*) из B и A[1]), или *композицией* множеств B *и* A и обозначаемую $B \circ A$ или просто BA, если нет опасности смешения. И здесь порядок, в котором компонируются два множества, существен.

Отображение $X \to BA(X)$ множества $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{P}(G)$ есть композиция отображения $Y \to B(Y)$ и отображения $X \to A(X)$; иначе говоря,

[1]) В подлиннике: „qu'on appelle l'ensemble *composé de* B *et* A". В приложении к русскому изданию первых глав „Общей топологии" Н. Бурбаки (М., 1958) эта фраза переводится так: „называемое *композицией* множеств A и B". Мы сохраняем порядок оригинала (ср. подстрочное примечание на стр. 363, а также определение 6 из гл. II, § 3, n° 3). — *Прим. ред.*

каково бы ни было $X \subset E$,

$$BA(X) = B(A(X)). \quad (30)$$

Пусть H — множество, не обязательно отличное от E, F, G, и C — часть множества $G \times H$. Тогда $C \circ (B \circ A) = (C \circ B) \circ A$; это множество обозначается также $C \circ B \circ A$ (или просто CBA) и называется *составленным* из, или *скомпанованным* из, или *композицией* множеств C, B, A, взятых в указанном порядке[1].

Пусть f — отображение множества E в F, а g — отображение множеств F в G; если A и B — графики отображений соответственно f и g, то композиция BA есть график композиции $g \circ f$.

11. Имеем

$$\overset{-1}{\widehat{(B \circ A)}} = \overset{-1}{A} \circ \overset{-1}{B}. \quad (31)$$

Пусть A, A′ — две части произведения $E \times F$, B, B′ — две части произведения $F \times G$; соотношение „$A \subset A'$ и $B \subset B'$“ влечет „$B \circ A \subset B' \circ A'$“.

Пусть A — часть множества $E \times F$, Δ — диагональ множества $E \times E$, Δ′ — диагональ множества $F \times F$; тогда

$$A \circ \Delta = \Delta' \circ A = A. \quad (32)$$

12. Пусть теперь E, F, G — три не обязательно различных множества; их *произведение* $E \times F \times G$ есть множество *троек* (x, y, z), где $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$; соотношение $(x, y, z) = (x', y', z')$ эквивалентно соотношению „$x = x'$ и $y = y'$, и $z = z'$“. Три отображения

$$(x, y, z) \to x, \quad (x, y, z) \to y, \quad (x, y, z) \to z$$

множества $E \times F \times G$ соответственно на E, F, G называются *первой*, *второй* и *третьей координатами* (или *проекциями*); аналогично, например, отображение

$$(x, y, z) \to (x, y)$$

множества $E \times F \times G$ на $E \times F$ называется *проекцией индекса* (1, 2) и обозначается $pr_{1,2}$[2].

Определения и предложения n° 2, 3, 4 легко обобщаются на произведение трех множеств.

Кроме того, рассмотрение произведения $E \times F \times G$ трех множеств можно заменить рассмотрением произведения $(E \times F) \times G$, полученного двукратным применением операции „произведение двух множеств“. В самом деле,

$$(x, y, z) \to ((x, y), z)$$

есть *взаимно однозначное* отображение множества $E \times F \times G$ *на* $(E \times F) \times G$, называемое еще *каноническим*; аналогично определяются взаимно однозначные отображения (также называемые *каноническими*) множества $E \times F \times G$ на множество $E \times (F \times G)$ и все множества, получающиеся из $E \times F \times G$, $(E \times F) \times G$ и $E \times (F \times G)$ перестановкой трех букв E, F, G.

Аналогичные определения и свойства имеют место для произведения более чем трех множеств.

13. Если функция f, принимающая свои значения в каком-нибудь множестве E′, определена на произведении трех множеств E, F, G, говорят также, что это функция *трех аргументов*, каждый из которых пробегает одно из множеств E, F, G; значение функции f на элементе (x, y, z) множества $E \times F \times G$ обозначается $f(x, y, z)$.

Пусть a — какой-нибудь элемент множества E; $(y, z) \to f(a, y, z)$ есть отображение множества $F \times G$ в E′; оно называется *частным*, или *парциальным*, *отображением* (а также *частной*, или *парциальной*, *функцией*[1]), *порожденным функцией* f и соответствующим значению a аргумента x; оно является также композицией функции f и отображения $(y, z) \to (a, y, z)$ множества $F \times G$ в множество $E \times F \times G$.

Аналогично если b есть элемент множества F,

$$z \to f(a, b, z)$$

есть отображение множества G в E′, называемое еще частным отображением, порождаемым функцией f и соответствующим значениям a, b аргументов x, y.

Обратно, пусть g — отображение множества E в E′; тогда

$$(x, y, z) \to g(x)$$

есть отображение h множества $E \times F \times G$ в E′, такое, что всякое частное отображение множества E в E′, порождаемое отображением h и соответствующее любым значениям для y и z, совпадает с g; этот факт часто выражают, говоря, что функцию одного аргумента x всегда можно считать функцией всех аргументов, которые нужно рассматривать в данный момент и среди которых, разумеется, встречается x.

---

[1]) В подлиннике: „s'appele le *composé* de C, B, A pris dans cet ordre“; в приложении к русскому изданию первых глав „Общей топологии“: „называется *композицией* множеств A, B, C, взятых в указанном порядке“. — *Прим. ред.*

[2]) См. подстрочное примечание на стр. 365. — *Прим. ред.*

[1]) В приложении к русскому изданию первых глав „Общей топологии“ Н. Бурбаки (М., 1958) подобные отображения и функции названы *частичными*. Мы предпочитаем переводить здесь французское прилагательное „partiel“ русским прилагательным „частный“, устойчиво встречающимся — в данном значении — в сочетании „частная производная“ (по-французски — „dérivée partielle“). Кроме того, *частичным отображением* множества A в множество B удобно называть всякое отображение всякой части множества A в множество B. — *Прим. ред.*

14. Пусть f, g, h — три отображения соответственно множества E в E′, F в F′ и G в G′; отображение

$$(x, y, z) \to (f(x), g(y), h(z))$$

множества $E \times F \times G$ в $E' \times F' \times G'$ обозначается (f, g, h) или $f \times g \times h$ и называется *распространением отображений f, g, h на произведения множеств*. Если f, g, h — *все три* — инъективны (соответственно сюръективны, биективны), $f \times g \times h$ инъективно (соответственно сюръективно, биективно).

В этом и предыдущем пунктах мы рассматривали случай только *трех* множеств единственно для определенности изложения; аналогичные рассмотрения справедливы для любого конечного числа множеств.

§ 4. Объединение, пересечение, произведение семейства множеств

1. В этом параграфе мы рассматриваем семейство $(X_\iota)_{\iota \in I}$ *частей* множества E с произвольным множеством индексов I; через $\mathfrak{F}$ мы будем обозначать *множество принадлежащих этому семейству частей множества* E (часть множества $\mathfrak{P}(E)$).

Когда I конечно, рассмотрение семейства (X_ι) сводится к рассмотрению нескольких, не обязательно отличных друг от друга, частей множества E в числе, равном числу элементов множества I; например, три произвольных подмножества X_1, X_2, X_3 множества E образуют семейство частей множества E, причем множество I образовано здесь числами 1, 2, 3.

2. Пусть J — произвольная часть множества I; рассмотрим множество элементов x, обладающих свойством

„существует такое $\iota \in J$, что $x \in X_\iota$“.

Это множество называется *объединением семейства множеств* $(X_\iota)_{\iota \in J}$ и обозначается $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota$.

Это определение можно сформулировать еще следующим образом: отображению $\iota \to X_\iota$ множества I в $\mathfrak{P}(E)$ соответствует вполне определенная часть C множества $I \times E$, такая, что $X_\iota = C(\iota)$ (§ 3, n° 7); имеем $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota = C(J)$.

В частности,

$$\bigcup_{\iota \in \varnothing} X_\iota = C(\varnothing) = \varnothing. \qquad (33)$$

При $J = I$ вместо $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ часто пишут $\bigcup_{\iota} X_\iota$ или просто $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$.

Объединение $\bigcup_{\iota} X_\iota$ *зависит только от множества* $\mathfrak{F}$; другими словами, оно одинаково для всех семейств, соответствующих одной и той же части $\mathfrak{F}$ множества $\mathfrak{P}(E)$; в частности, оно равно объединению семейства, определяемого каноническим отображением множества $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{P}(E)$, и потому его можно записать $\bigcup_{X \in \mathfrak{F}} X$; оно называется также *объединением множеств, принадлежащих к* $\mathfrak{F}$.

Если I — множество, элементы которого названы явно, например числа 1, 2, 3, то $\bigcup_{\iota \in I} X_\iota = X_1 \cup X_2 \cup X_3$, чем оправдывается наименование „объединение“, данное в общем случае множеству $\bigcup_{\iota} X_\iota$.

3. Каково бы ни было $J \subset I$, имеет место включение $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota \subset \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$. В частности, каково бы ни было $\varkappa \in I$, имеем $X_\varkappa \subset \bigcup_{\iota} X_\iota$; обратно, если Y — часть множества E, такая, что $X_\iota \subset Y$, каково бы ни было $\iota \in I$, то $\bigcup_{\iota} X_\iota \subset Y$. Более общо, если (Y_ι) — какое-либо другое семейство частей множества E, соответствующее тому же множеству индексов I, и если $X_\iota \subset Y_\iota$, каково бы ни было ι, то $\bigcup_{\iota} X_\iota \subset \bigcup_{\iota} Y_\iota$.

Пусть F — какое-то второе множество и $X \to K(X)$ — отображение множества $\mathfrak{P}(E)$ в $\mathfrak{P}(F)$, определенное частью K множества $E \times F$; тогда

$$K\Big(\bigcup_{\iota \in J} X_\iota\Big) = \bigcup_{\iota \in J} K(X_\iota). \qquad (34)$$

Пусть теперь L — другое множество индексов и $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — семейство частей множества I; тогда

$$\bigcup_{\iota \in \bigcup_{\lambda \in L} J_\lambda} X_\iota = \bigcup_{\lambda \in L} \Big(\bigcup_{\iota \in J_\lambda} X_\iota\Big). \qquad (35)$$

Это общая формула *ассоциативности* объединения; когда I и L — множества явно названных элементов, снова получаются известные соотношения (см. § 1, n° 14); если таким является только L, образованное, например, числами 1 и 2, то

$$\bigcup_{\iota \in J_1 \cup J_2} X_\iota = \Big(\bigcup_{\iota \in J_1} X_\iota\Big) \cup \Big(\bigcup_{\iota \in J_2} X_\iota\Big). \qquad (36)$$

Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ и $(Y_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ — два произвольных семейства частей множества E; тогда имеет место

$$\Big(\bigcup_{\iota \in I} X_\iota\Big) \cap \Big(\bigcup_{\varkappa \in K} Y_\varkappa\Big) = \bigcup_{(\iota, \varkappa) \in I \times K} (X_\iota \cap Y_\varkappa) \qquad (37)$$

— формула *дистрибутивности*; она, как частный случай, содержит вторую формулу (10).

Если $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство частей множества E, $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ — семейство частей множества F, то

$$\Big(\bigcup_{\iota\in I} X_\iota\Big)\times\Big(\bigcup_{\varkappa\in K} Y_\varkappa\Big)=\bigcup_{(\iota,\,\varkappa)\in I\times K}(X_\iota\times Y_\varkappa). \tag{38}$$

4. Семейство $(X_\iota)_{\iota\in I}$ частей множества E образует *покрытие* части A множества E, если $A\subset\bigcup_{\iota\in I}X_\iota$; в частности, если (X_ι) есть покрытие множества E, то $\bigcup_{\iota\in I}X_\iota=E$.

Разбиением множества E называют такое покрытие (X_ι) множества E, что

a) $X_\iota\neq\varnothing$, каково бы ни было $\iota\in I$;

б) $X_\iota\cap X_\varkappa=\varnothing$ для всякой пары *различных* индексов $(\iota,\varkappa)$ из I (это последнее условие выражают еще, говоря, что множества X_ι *попарно не пересекаются* или *попарно не имеют общих элементов*).

Из этих условий вытекает, что $\iota\to X_\iota$ — *взаимно однозначное* отображение множества I *на* множество $\mathfrak{F}$ частей разбиения. Таким образом, задание множества $\mathfrak{F}$ определяет семейство с точностью до взаимно однозначного соответствия между множествами индексов; в частности, безразлично, говорить ли о разбиении как о *множестве* или как о *семействе* частей.

5. Пусть $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — произвольное семейство непустых частей множества E; в произведении $I\times E$ рассмотрим для каждого $\iota\in I$ часть $X'_\iota=\{\iota\}\times X_\iota$; множество $S=\bigcup_{\iota\in I}X'_\iota$ называется *суммой* семейства $(X_\iota)_{\iota\in I}$. Ясно, что семейство $(X'_\iota)_{\iota\in I}$ есть разбиение множества S и что для всякого $\iota\in I$ отображение $x_\iota\to(\iota,x_\iota)$ есть биекция множества X_ι на X'_ι. Допуская вольность речи, мы будем часто суммой семейства $(X_\iota)_{\iota\in I}$ называть множество, находящееся во взаимно однозначном соответствии с S, и будем множества X_ι отождествлять с соответствующими им частями этого множества.

Часто говорят, что сумма двух непустых множеств E и F получается *присоединением* множества F к множеству E.

6. В обозначениях п° 2 множество элементов x из E, обладающих свойством

„каково бы ни было $\iota\in J$, $x\in X_\iota$“,

называется *пересечением семейства множеств* $(X_\iota)_{\iota\in J}$ и обозначается $\bigcap_{\iota\in J}X_\iota$; при $J=I$ вместо $\bigcap_{\iota\in I}X_\iota$ часто пишут $\bigcap_\iota X_\iota$ или просто $\bigcap X_\iota$.

Имеем

$$\mathbf{C}\Big(\bigcup_{\iota\in J}X_\iota\Big)=\bigcap_{\iota\in J}(\mathbf{C}X_\iota). \tag{39}$$

В частности, если $J=\varnothing$,

$$\bigcap_{\iota\in\varnothing}X_\iota=E. \tag{40}$$

Пересечение $\bigcap_\iota X_\iota$ зависит только от множества $\mathfrak{F}$ и может быть записано в виде $\bigcap_{X\in\mathfrak{F}}X$; если I образовано, например, числами 1, 2, 3, то $\bigcap_\iota X_\iota=X_1\cap X_2\cap X_3$.

7. Формула (39) позволяет обобщить *правило двойственности*: если часть A множества E получается из других частей X, Y, Z и семейств (X_ι), $(Y_\varkappa)$, (Z_λ) частей множества E применением, безразлично в каком порядке, *одних только* операций $\mathbf{C}$, $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$, то дополнение $\mathbf{C}A$ получается заменой частей X, Y, Z, X_ι, $Y_\varkappa$, Z_λ их дополнениями и операций $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$ на соответственно операции $\cap$, $\cup$, $\bigcap$, $\bigcup$ с сохранением их порядка; разумеется, в операциях пересечения и объединения, применяемых к частям множеств *индексов*, которые могут оказаться подписанными под знаками $\bigcup$ и $\bigcap$, ничего менять не следует.

Соотношение, *двойственное* к соотношению $A=B$ или $A\subset B$, где A и B — части множества E вышеуказанного вида, определяется, как и в § 1, п° 15.

8. Каково бы ни было $J\subset I$, имеет место включение $\bigcap_{\iota\in I}X_\iota\subset\bigcap_{\iota\in J}X_\iota$. В частности, каково бы ни было $\varkappa\in I$, имеем $\bigcap_\iota X_\iota\subset X_\varkappa$; обратно, если $Y\subset X_\iota$, каково бы ни было ι, то $Y\subset\bigcap_\iota X_\iota$.

Более общо, если (Y_ι) — какое-либо другое семейство частей множества E, соответствующее тому же множеству индексов I, и если $X_\iota\subset Y_\iota$, каково бы ни было ι, то

$$\bigcap_\iota X_\iota\subset\bigcap_\iota Y_\iota.$$

Объединение множеств X_ι есть *пересечение* множеств Y, таких, что $X_\iota\subset Y$, каково бы ни было ι; *пересечение* множеств X_ι есть *объединение* множеств Z, таких, что $X_\iota\supset Z$, каково бы ни было ι.

Следующие формулы двойственны соответственно формулам (35) и (37):

$$\bigcap_{\iota\in\bigcup_{\lambda\in L} J_\lambda} X_\iota = \bigcap_{\lambda\in L}\left(\bigcap_{\iota\in J_\lambda} X_\iota\right) \quad \text{(ассоциативность)}, \tag{41}$$

$$\left(\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\right)\cup\left(\bigcap_{\varkappa\in K} Y_\varkappa\right) = \bigcap_{(\iota,\varkappa)\in I\times K} (X_\iota\cup Y_\varkappa) \quad \text{(дистрибутивность)}. \tag{42}$$

Если $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство частей множества E, а $(Y_\varkappa)_{\varkappa\in K}$ — семейство частей множества F, то

$$\left(\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\right)\times\left(\bigcap_{\varkappa\in K} Y_\varkappa\right) = \bigcap_{(\iota,\varkappa)\in I\times K} (X_\iota\times Y_\varkappa). \tag{43}$$

Кроме того, если (X_ι) и (Y_ι) — семейства частей соответственно множества E и множества F, отвечающие *одному и тому же* множеству индексов I, то

$$\left(\bigcap_{\iota\in I} X_\iota\right)\times\left(\bigcap_{\iota\in I} Y_\iota\right) = \bigcap_{\iota\in I} (X_\iota\times Y_\iota). \tag{44}$$

Формула (34) не имеет двойственной; в общем случае имеем только

$$K\left(\bigcap_{\iota\in J} X_\iota\right)\subset\bigcap_{\iota\in J} K(X_\iota). \tag{45}$$

Для произвольного семейства (X_ι) равенство имеет место только в случае, когда $X\to K(X)$ есть *обратное распространение* отображения некоторой части множества F в E; следовательно, если *f — отображение множества* F *в* E, то имеет место

$$\overset{-1}{f}\left(\bigcap_{\iota\in J} X_\iota\right) = \bigcap_{\iota\in J} \overset{-1}{f}(X_\iota) \tag{46}$$

— формула, обобщающая (14).

9. Пусть E — произвольное множество, I — произвольное множество индексов; множество *семейств* $(x_\iota)_{\iota\in I}$ *элементов* из E, имеющих в качестве множества индексов I, обозначается E^I, а операция, переводящая E в E^I, называется *возведением в степень*; таким образом, E^I находится во взаимно однозначном соответствии с множеством отображений множества I в E (которое по этой причине, допуская вольность речи, часто обозначают E^I), а также, если рассмотреть графики этих отображений, с некоторым подмножеством множества $\mathfrak{P}(I\times E)$. Множества E^J, соответствующие частям J множества I, можно, таким образом, рассматривать как части одного и того же множества, находящегося во взаимно однозначном соответствии с некоторой частью множества $\mathfrak{P}(I\times E)$.

Пусть теперь $(X_\iota)_{\iota\in I}$ — семейство частей множества E, соответствующее тому же множеству индексов I, и пусть J — произвольная часть множества I; свойство

„каково бы ни было $\iota\in J$, $x_\iota\in X_\iota$"

семейства $(x_\iota)_{\iota\in J}$ определяет часть множества E^J, называемую *произведением семейства множеств* $(X_\iota)_{\iota\in J}$ и обозначаемую $\prod_{\iota\in J} X_\iota$ (или просто $\prod_\iota X_\iota$, когда $J = I$). Множества X_ι называются *множителями* или *сомножителями*. Заметим, что $\prod_{\iota\in\varnothing} X_\iota$ есть множество, состоящее из одного элемента (соответствующее пустой части множества $I\times E$). Если $X_\iota = E$, каково бы ни было $\iota\in J$, то $\prod_{\iota\in J} X_\iota = E^J$.

Если I образовано, например, тремя числами 1, 2, 3, $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $X_1\times X_2\times X_3$.

10. Пусть $R\{x, y\}$ — соотношение между общим элементом x множества E и общим элементом y множества F. Имеет место *эквивалентность* между следующими двумя предложениями:

„каково бы ни было x, существует такое y, что $R\{x, y\}$"

и

„существует такое отображение f множества E в F, что для всякого x $R\{x, f(x)\}$".

Утверждение об этой эквивалентности называется *аксиомой выбора* (или *аксиомой Цермело*). Мы будем иногда отмечать, зависит ли доказательство той или иной теоремы от этой аксиомы.

Аксиома выбора есть предложение, *эквивалентное* следующему предложению:

„Если для всякого $\iota\in I$ $X_\iota\neq\varnothing$, то $\prod_{\iota\in I} X_\iota\neq\varnothing$".

· 11. В этом и следующем пунктах рассматривается непустое произведение $\prod_{\iota\in I} A_\iota$, где (A_ι) — произвольное семейство (непустых) частей множества E.

Пусть J — часть множества I; отображение

$$(x_\iota)_{\iota\in I}\to(x_\iota)_{\iota\in J}$$

множества $\prod_{\iota\in I} A_\iota$ *на* $\prod_{\iota\in J} A_\iota$ называется *проекцией* произведения $\prod_{\iota\in I} A_\iota$

на произведение $\prod_{\iota \in J} A_\iota$ и обозначается pr_J[1]); в частности, отображение $(x_\iota)_{\iota \in I} \to x_\varkappa$ множества $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ на $A_\varkappa$ обозначают $pr_\varkappa$ и называют также *координатой индекса* $\varkappa$[2]).

Таким образом, для элемента z произведения $\prod_\iota A_\iota$ имеем $z = (pr_\iota(z))_{\iota \in I}$.

Пусть J_1, J_2 — два множества, образующих *разбиение* множества I; тогда

$$z \to (pr_{J_1}(z),\ pr_{J_2}(z))$$

есть *взаимно однозначное* отображение множества $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ *на*

$$\prod_{\iota \in J_1} A_\iota \times \prod_{\iota \in J_2} A_\iota.$$

Более общо, если $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ — произвольное *разбиение* множества I, отображение $z \to (pr_{J_\lambda}(z))_{\lambda \in L}$ есть взаимно однозначное отображение (называемое *каноническим*) множества $\prod_{\iota \in I} A_\iota$ на произведение $\prod_{\lambda \in L}\left(\prod_{\iota \in J_\lambda} A_\iota\right)$; этот факт выражают еще говоря, что произведение семейства множеств *ассоциативно*.

12. Следующие предложения обобщают предложения § 3, n° 3; (X_ι), (Y_ι) обозначают семейства частей множества E, такие, что $X_\iota \subset A_\iota$ и $Y_\iota \subset A_\iota$, каково бы ни было $\iota \in I$; Z обозначает произвольную часть множества $\prod_\iota A_\iota$.

а) Если $\prod_\iota X_\iota \neq \varnothing$ соотношение „$\prod_\iota X_\iota \subset \prod_\iota Y_\iota$" *эквивалентно* соотношению „каково бы ни было $\iota \in I$, $X_\iota \subset Y_\iota$".

б) $\overset{-1}{pr_\varkappa}(X_\varkappa) = \prod_\iota Y_\iota$, где $Y_\varkappa = X_\varkappa$ и $Y_\iota = A_\iota$ для $\iota \neq \varkappa$. Отсюда

$$\prod_{\iota \in I} X_\iota = \bigcap_{\iota \in I} \overset{-1}{pr_\iota}(X_\iota). \tag{47}$$

в) Если $\prod_\iota X_\iota \neq \varnothing$, то

$$pr_\varkappa\left(\prod_\iota X_\iota\right) = X_\varkappa. \tag{48}$$

[1]) В гл. II, § 5, n° 4, это отображение было названо *проектированием по индексу* J. — *Прим. ред.*

[2]) В гл. II, § 5, n° 3, это отображение было названо *координатной функцией* индекса $\varkappa$ или проектированием по индексу $\varkappa$; координатой индекса $\varkappa$ элемента z из $\prod_\iota A_\iota$ был назван там элемент $pr_\varkappa(z)$. — *Прим. ред.*

г) Каково бы ни было Z,

$$Z \subset \prod_\iota pr_\iota(Z). \tag{49}$$

д) Пусть (J_1, J_2) — разбиение множества I на два множества, $(a_\iota)_{\iota \in J_1}$ — семейство элементов множества E, а $(X_\iota)_{\iota \in J_2}$ — семейство частей множества E, такие, что $a_\iota \in A_\iota$, каково бы ни было $\iota \in J_1$, $X_\iota \subset A_\iota$, каково бы ни было $\iota \in J_2$; тогда произведение $\prod_{\iota \in I} Y_\iota$, где $Y_\iota = \{a_\iota\}$, если $\iota \in J_1$, и $Y_\iota = X_\iota$, если $\iota \in J_2$, может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с $\prod_{\iota \in J_2} X_\iota$ при помощи проекции на это последнее множество.

13. Пусть $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство частей множества F, и пусть f — отображение множества E в произведение $\prod_{\iota \in I} A_\iota$. Если положить $f_\iota(x) = pr_\iota(f(x))$, то f_ι будет отображением множества E в A_ι, а f — не чем иным, как отображением $x \to (f_\iota(x))$. Обратно, если для каждого индекса ι f_ι есть отображение множества E в A_ι, то $x \to (f_\iota(x))$ есть отображение множества E в $\prod_\iota A_\iota$; его обозначают (f_ι) (допуская вольность речи, так как эта запись обозначает также семейство отображений f_ι). Так определяется взаимно однозначное отображение (называемое *каноническим*) множества $\left(\prod_{\iota \in I} A_\iota\right)^E$ на множество $\prod_{\iota \in I} (A_\iota^E)$.

14. Пусть E, F, G — три множества. Для всякого отображения f множества $F \times G$ в E и для всякого $y \in G$ обозначим через f_y частное отображение (§ 3, n° 13) $x \to f(x, y)$ множества F в E; $y \to f_y$ есть отображение множества G в E^F. Обратно, для всякого отображения g множества G в E^F существует и единственно отображение f множества $F \times G$ в E, такое, что $f_y = g(y)$ для всякого $y \in G$. Так определяется взаимно однозначное отображение (называемое *каноническим*) множества $E^{F \times G}$ на множество $(E^F)^G$.

15. Пусть $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство непустых частей множества E. Для всякого $\iota \in I$ пусть f_ι — отображение множества A_ι в множество F, такое, что для всякой пары индексов $(\iota, \varkappa)$ отображения f_ι и $f_\varkappa$ совпадают на $A_\iota \cap A_\varkappa$. При этих условиях, если $A = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota$, существует и единственно отображение f множества A в F, такое, что *сужение* отображения f на каждое из A_ι равно f_ι. В частности, если $A_\iota \cap A_\varkappa = \varnothing$ для всякой пары различных индексов, множества F^A и $\prod_{\iota \in I} F^{A_\iota}$ оказываются поставленными этим во взаимно однозначное соответствие (называемое *каноническим*).

§ 5. Соотношения эквивалентности; фактормножество

1. Пусть $(A_\iota)_{\iota \in I}$ — *разбиение* множества E; соотношение R$\{x, y\}$ между двумя общими элементами x, y из E

„существует $\iota \in I$, такое, что $x \in A_\iota$ и $y \in A_\iota$"

удовлетворяет следующим условиям:

а) R$\{x, x\}$ есть *тождество* (*рефлексивность* соотношения R).

б) R$\{x, y\}$ и R$\{y, x\}$ *эквивалентны* (*симметричность* соотношения R).

в) Соотношение „R$\{x, y\}$ и R$\{y, z\}$" *влечет* R$\{x, z\}$ (*транзитивность* соотношения R).

Если C обозначает часть множества $E \times E$, определенную соотношением R, условия а), б), в) эквивалентны соответственно следующим условиям: а′) $\Delta \subset C$; б′) $\overset{-1}{C} = C$; в′) $C \circ C \subset C$. Из а′) и в′) вытекает $C \circ C = C$.

2. Обратно, пусть R$\{x, y\}$ — *рефлексивное, симметричное* и *транзитивное* соотношение и C — его график в $E \times E$. Образ $\mathfrak{F}$ множества E при отображении $x \to C(x)$ множества E в $\mathfrak{P}(E)$ есть *разбиение* множества E, а соотношение „существует часть $X \in \mathfrak{F}$, такая, что $x \in X$ и $y \in X$" *эквивалентно* R$\{x, y\}$.

Всякое соотношение R, удовлетворяющее условиям а), б), в), называется *соотношением эквивалентности* в E; определяемое им разбиение $\mathfrak{F}$, рассматриваемое как часть множества $\mathfrak{P}(E)$, называется *фактормножеством множества* E *по соотношению* R и обозначается E/R; его элементы называются *классами эквивалентности по* R. Отображение $x \to C(x)$ множества E на E/R, сопоставляющее всякому элементу x из E класс эквивалентности, которому принадлежит x, называется *каноническим отображением* множества E на E/R.

Соотношение *равенства* $x = y$ есть соотношение эквивалентности; каноническое отображение множества E на соответствующее фактормножество есть не что иное, как $x \to \{x\}$; оно *биективно*.

Когда R есть соотношение эквивалентности, иногда в качестве синонима для R$\{x, y\}$ употребляется запись

„$x \equiv y \pmod{R}$".

Она читается „*x эквивалентно y по модулю* R (или *по* R, или *согласно* R)".

3. В произведении $E \times F$ соотношение „$\mathrm{pr}_1(z) = \mathrm{pr}_1(z')$" есть некоторое соотношение эквивалентности R и фактормножество $(E \times F)/R$ может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие с E (что и лежит в основе наименования *фактормножество*).

Более обще, пусть f — отображение множества E в множество F; соотношение „$f(x) = f(y)$" есть соотношение эквивалентности в E; если его обозначить через R, отображение $z \to \overset{-1}{f}(z)$ (где $\overset{-1}{f}(z)$ рассматривается как элемент множества E/R есть *взаимно однозначное отображение* множества $f(E)$ *на* E/R.

Отсюда вытекает, что f можно рассматривать как *композицию* трех следующих отображений, берущихся в указанном порядке:

1° *канонического* отображения части $f(E)$ множества F в F;

2° *взаимно однозначного* отображения множества E/R на $f(E)$, обратного определенному выше отображению;

3° *канонического* отображения E на E/R.

Это разложение отображения называется *каноническим разложением* или *канонической факторизацией*.

4. Всякое соотношение эквивалентности R в множестве E может быть определено с помощью некоторого отображения как в предыдущем п°, ибо если C есть график соотношения R, то соотношение „$C(x) = C(y)$" эквивалентно соотношению R$\{x, y\}$.

5. Пусть R — соотношение эквивалентности в множестве E и A — часть множества E; соотношение R$\{x, y\}$ между двумя общими элементами x, y *множества* A есть соотношение эквивалентности в A; говорят, что оно *индуцировано* в A соотношением R и обозначают его R^A. Пусть f — каноническое отображение множества E на E/R, а g — каноническое отображение множества A на A/R_A. Поставим в соответствие друг другу элемент из E/R и элемент из A/R_A, если они являются образами одного и того же элемента из E относительно f и g соответственно; тем самым определяем *взаимно однозначное* соответствие между образом $f(A)$ множества A относительно f и фактормножеством A/R_A. Если через φ обозначить каноническое отображение множества A в E, это соответствие будет осуществляться отображением

$$z \to f(\varphi(\overset{-1}{g}(z)))$$

и обратным к нему, также называемыми *каноническими*.

6. Говорят, что часть A множества E *насыщено* для соотношения эквивалентности R, если для всякого $x \in A$ класс эквивалентности элемента x по R содержится в A; иначе говоря, множества, насыщенные для R, являются *объединениями классов эквивалентности по* R. Если f есть каноническое отображение множества E на E/R, можно еще сказать, что множество насыщено, если оно имеет вид $\overset{-1}{f}(X)$, где X — некоторая часть множества E/R.

Пусть A — часть множества E; пересечение насыщенных множеств, содержащих A, есть множество $\overset{-1}{f}(f(A))$, которое можно определить так же, как объединение классов эквивалентности элементов из A, и которое называется *насыщением* множества A (для R).

7. Пусть $P\{x, y, z\}$ — соотношение, в которое входит общий элемент x множества E. Говорят, что P *совместимо* [1]) (по x) *с соотношением эквивалентности* R, если соотношение „$P\{x, y, z\}$ и $x \equiv x' \pmod{R}$“ *влечет* $P\{x', y, z\}$.

Пусть f — каноническое отображение множества E на E/R и t — общий элемент множества E/R; соотношение „существует $x \in \overset{-1}{f}(t)$, такое, что $P\{x, y, z\}$“ эквивалентно тогда соотношению „каково бы ни было $x \in \overset{-1}{f}(t)$, $P\{x, y, z\}$“; это есть соотношение между t, y, z, о котором говорят, что оно *выведено* из P *переходом к фактормножеству* [2]) (по x); если его обозначить через $P'\{t, y, z\}$, то $P\{x, y, z\}$ будет эквивалентно соотношению $P'\{f(x), y, z\}$.

Для соотношения, в которое входит произвольное число аргументов, и для случая, когда это соотношение совместимо с R по *нескольким* из этих аргументов, определения аналогичны.

Например, если A — часть множества E, то сказать, что „$x \in A$“ совместимо (по x) с R, все равно, что сказать, что A насыщено для R; если φ — отображение множества E в множество F, то сказать, что функциональное соотношение „$y = \varphi(x)$“ совместимо (по x) с R, все равно, что сказать, что функция φ остается постоянной на каждом классе эквивалентности по R; переходом к фактормножеству получаем тогда соотношение между y и общим элементом t фактормножества E/R; это соотношение функционально по y и определяет, следовательно, отображение φ' фактормножества E/R в F, удовлетворяющее тождеству $\varphi(x) = \varphi'(f(x))$.

8. Пусть R — соотношение эквивалентности в множестве E, S — соотношение эквивалентности в множестве F и f — отображение множества E в F. Говорят, что f *совместимо с* R *и* S, если соотношение $x \equiv x' \pmod{R}$ *влечет* $f(x) \equiv f(x') \pmod{S}$; если g — каноническое отображение множества F на F/S, то композиция $g \circ f$ имеет одно и то же значение для всех элементов класса эквивалентности z по R; если это значение обозначить через $h(z)$, то h будет отображением множества E/R в F/S; говорят, что оно *выведено* из f *переходом к фактормножествам* [3]).

9. Пусть R — соотношение эквивалентности в E, S — соотношение эквивалентности в E/R; если f — каноническое отображение множества E на E/R, то „$f(x) \equiv f(y) \pmod{S}$“ есть некоторое соотношение эквивалентности T в E; таким образом, класс эквивалентности по T есть объединение в E классов эквивалентности по R, эквивалентных между собой по S, и „$x \equiv y \pmod{R}$“ влечет „$x \equiv y \pmod{T}$“. Если g и φ — канонические отображения множества E/R на (E/R)/S и множества E на E/T соответственно, то, поставив в соответствие друг другу элемент из (E/R)/S и элемент из E/T, являющиеся образами одного и того же элемента из E относительно $g \circ f$ и φ соответственно, мы получим взаимно однозначное соответствие между (E/R)/S и E/T (называемое *каноническим*).

Обратно пусть R и T — два соотношения эквивалентности в E, такие, что „$x \equiv y \pmod{R}$“ влечет „$x \equiv y \pmod{T}$“. Тогда T совместимо (в смысле n° 7) с R одновременно по x и по y, и из T переходом к фактормножеству E/R (по x и y) получается соотношение эквивалентности S в E/R. Если через f снова обозначить каноническое отображение множества E на E/R, то соотношение „$f(x) \equiv f(y) \pmod{S}$“ будет эквивалентно соотношению „$x \equiv y \pmod{T}$“. Соотношение S называется *факторсоотношением* соотношения T по R и обозначается T/R. По предыдущему, существует взаимно однозначное (а именно каноническое) соответствие между (E/R)/(T/R) и (E/T).

10. Пусть теперь E, F — два произвольных множества (не обязательно различные), $R\{x, y\}$ — соотношение эквивалентности в E, $S\{z, t\}$ — соотношение эквивалентности в F. Соотношение „$R\{x, y\}$ и $S\{z, t\}$“ между элементами (x, z) и (y, t) произведения $E \times F$ есть соотношение эквивалентности в $E \times F$, называемое *произведением соотношения* R *на соотношение* S и обозначаемое $R \times S$; всякий класс эквивалентности по $R \times S$ есть произведение некоторого класса эквивалентности по R на некоторый класс эквивалентности по S. Если u обозначает общий элемент множества E/R и v — общий элемент множества F/S, то $(u, v) \to u \times v$ есть *взаимно однозначное отображение* множества $(E/R) \times (F/S)$ *на* $(E \times F)/(R \times S)$ (называемое *каноническим*).

---

1) В подлиннике „*compatible*“; в приложении к русскому переводу первых глав „Общей топологии“ Н. Бурбаки (М., 1958) — „*согласуется*“. — *Прим. ред.*

2) В подлиннике „*déduite* de P par *passage au quotient*“; в приложении к русскому переводу первых глав „Общей топологии“ „*получено из* P *факторизацией*“. — *Прим. ред.*

3) См. предыдущее примечание. — *Прим. ред.*

§ 6. Упорядоченные множества

1. Соотношение $\omega\{x, y\}$ между двумя общими элементами множества E называется *соотношением порядка* в E, если оно удовлетворяет двум следующим условиям:

а) Соотношение „$\omega\{x, y\}$ и $\omega\{y, z\}$“ *влечет* $\omega\{x, z\}$ (транзитивность).

б) Соотношение „$\omega\{x, y\}$ и $\omega\{y, x\}$“ *эквивалентно* „$x = y$“.

Условие б) влечет рефлексивность соотношения ω.

Пусть C — часть множества $E \times E$, определяемая соотношением $\omega\{x, y\}$ как свойством пары (x, y); условия а) и б) эквивалентны соответственно условиям: а′) $C \circ C \subset C$; б′) $C \cap \overset{-1}{C} = \Delta$. Из этих свойств, впрочем, вытекает, что $C \circ C = C$.

Когда рассматривается конкретное соотношение порядка в множестве E, говорят, что E *упорядочено* этим соотношением и что это

соотношение определяет на E *структуру упорядоченного множества* (см. § 8) или *структуру порядка* (или просто *порядок*) [1].

Если $\omega\{x, y\}$ — соотношение порядка в E, то и $\omega\{y, x\}$ — соотношение порядка в E; эти два соотношения порядка, как и определяемые ими структуры порядка, называются *противоположными*.

Пусть $\omega\{x, y\}$ — соотношение порядка в E и A — произвольная часть множества E; соотношение $\omega\{x, y\}$ между двумя общими элементами x, y *множества* A есть соотношение порядка в A; говорят, что определяемый им на A порядок *индуцируется* порядком, определяемым на E соотношением $\omega\{x, y\}$. Порядок, рассматриваемый на E, называется *продолжением* порядка, индуцируемого им на A.

Рефлексивное и *транзитивное* соотношение $\tilde{\omega}\{x, y\}$ между двумя общими элементами множества E называется *соотношением предпорядка в* E; соотношение „$\tilde{\omega}\{x, y\}$ и $\tilde{\omega}\{y, x\}$" есть *соотношение эквивалентности* R в E, причем $\tilde{\omega}\{x, y\}$ совместимо по x и по y с этим соотношением; переход к фактормножеству (по x и y) дает в множестве E/R *соотношение порядка*, которое называют *ассоциированным* с $\tilde{\omega}\{x, y\}$.

2. Соотношение включения „$X\subset Y$" есть соотношение порядка в множестве $\mathfrak{P}(E)$ частей произвольного множества.

Если E и F — два не обязательно различных множества, соотношение „g есть продолжение функции f" есть соотношение порядка в множестве отображений произвольной части множества E в F.

Множество N положительных целых чисел [2]) упорядочено соотношением „$x \leqslant y$".

3. По аналогии с этим последним примером часто, когда множество E упорядочено соотношением $\omega\{x, y\}$, уславливаются обозначать соотношение $\omega\{x, y\}$ через $x \leqslant y$ или $y \geqslant x$; эти соотношения читаются соответственно „*x минорирует y*" и „*y превышает x*" (или „*y мажорирует x*"). В этом случае соотношения „$x < y$" и „$y > x$" [которые читаются „*x строго минорирует y*" или „*y строго превышает* (*строго мажорирует*) *x*"] по определению эквивалентны соотношению „$x \leqslant y$ и $x \neq y$".

Соотношение „$x \leqslant y$" *эквивалентно* соотношению „$x < y$ или $x = y$". Соотношение „$x \leqslant y$ и $y < z$" *влечет* „$x < z$"; аналогично „$x < y$ и $y \leqslant z$" *влечет* „$x < z$".

4. Часть X множества E, упорядоченного соотношением „$x \leqslant y$", называется *совершенно упорядоченной* [1]) этим соотношением, если, каковы бы ни были $x \in X$ и $y \in X$, $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ (или еще, если имеет место одно из трех взаимно исключающих соотношений: $x < y$, $x = y$ или $x > y$).

Пустая часть упорядоченного множества всегда совершенно упорядочена. Может быть совершенно упорядоченным и все множество E, например множество N, упорядоченное соотношением $x \leqslant y$.

Всякая часть совершенно упорядоченного множества также совершенно упорядочена индуцированным порядком.

Пусть a и b — два таких элемента *совершенно упорядоченного* множества E, что $a \leqslant b$; часть множества E, образованная элементами x, для которых $a \leqslant x \leqslant b$, называется *замкнутым интервалом с началом a и концом b* и обозначается $[a, b]$; если $a < b$, множество элементов x, для которых $a \leqslant x < b$ (соответственно $a < x \leqslant b$), называется *полуоткрытым справа* (соответственно *слева*) интервалом с началом a и концом b и обозначается $[a, b[$ (соответственно $]a, b]$); наконец, если $a < b$, множество элементов x, для которых $a < x < b$, называется *открытым* интервалом с началом a и b и обозначается $]a, b[$.

Множество элементов x, для которых $x \leqslant a$ (соответственно $x < a$), называется *безграничным* [2]) *слева замкнутым* (соответственно *открытым*) интервалом с концом a и обозначается $]\leftarrow, a]$ (соответственно $]\leftarrow, a[$); аналогично множество элементов x, для которых $x \geqslant a$ (соответственно $x > a$), называется *безграничным справа замкнутым* (соответственно *открытым*) интервалом с началом a и обозначается $[a, \rightarrow[$ (соответственно $]a, \rightarrow[$). Наконец, само E рассматривается как *безграничный с обеих сторон* (или *в обоих направлениях*) *открытый* интервал и обозначается $]\leftarrow, \rightarrow[$.

5. В части X упорядоченного множества E существует не более одного элемента a, такого, что $a \leqslant x$ для всех $x \in X$; если элемент a

---

[1]) То, что Н. Бурбаки называет „порядком", „упорядоченным множеством" и т. п., в русской математической литературе называется обычно *частичным порядком*, *частично упорядоченным множеством* и т. п. Эти термины иногда снабжают еще словами „нестрогий", „нестрого" (и говорят „нестрогий частичный порядок", „нестрого частично упорядоченное множество"), чтобы отличить от *строгого частичного порядка и строго частично упорядоченного множества*, которые задаются соотношением $\alpha(x, y)$, являющимся транзитивным и *антирефлексивным* (т. е. таким, что „не $\alpha(x, x)$" выполняется для любого элемента из E). Слова „строгий", „строго" (как и „нестрогий", „нестрого") часто опускаются (что, конечно, приводит к двусмысленности). — *Прим. ред.*

[2]) В согласии с характером этой сводки мы предполагаем здесь известной теорию целых чисел. Но не следует думать, что эта теория необходима для построения теории множеств; напротив, обратившись к Книге I, читатель увидит, что можно, исходя из результатов теории множеств, определить целые числа и доказать все их известные свойства.

В нашей терминологии 0 принадлежит множеству N и рассматривается, таким образом, как положительное число; положительные целые числа, отличные от 0, называются *строго положительными*.

[1]) Совершенно упорядоченные множества нередко называют *линейно упорядоченными*, а соответствующие порядки (*совершенные порядки*) — *линейными порядками*. В той терминологии, в которой упорядоченные (в смысле Бурбаки) множества называют *частично-упорядоченными*, совершенно упорядоченные множества называют просто *упорядоченными* (а совершенные порядки — просто *порядками*). Сделанные выше замечания об употреблении слов „строгий", „строго" и „нестрогий", „нестрого" остаются в силе и в этом случае. — *Прим. ред.*

[2]) В приложении к русскому изданию первых глав „Общей топологии" здесь и далее вместо „*безграничный*" — „*неограниченный*". — *Прим. ред.*

с таким свойством существует, он называется *наименьшим элементом множества* X. Аналогично существует не более одного элемента $b \in X$, такого, что $x \leqslant b$ для всех $x \in X^-$; если такой элемент существует, он называется *наибольшим элементом множества* X.

В *совершенно упорядоченном* множестве E каждая непустая *конечная* часть имеет наибольший и наименьший элемент, называемый *максимумом* и соответственно *минимумом* этой части.

Упорядоченное множество, каждая непустая часть которого обладает наименьшим элементом, называется *вполне упорядоченным*. Множество **N** положительных целых чисел вполне упорядочено; чтобы часть множества **N** имела наибольший элемент, необходимо и достаточно, чтобы она была конечной и непустой. С помощью аксиомы выбора доказывается, что на всяком множестве существует структура вполне упорядоченного множества (*теорема Цермело*).

Упорядочим множество $\mathfrak{P}(E)$ частей произвольного множества E соотношением включения. Для того чтобы часть $\mathfrak{F}$ множества $\mathfrak{P}(E)$ (т. е. некоторое множество частей множества E) обладало наименьшим элементом, необходимо и достаточно, чтобы пересечение всех множеств из $\mathfrak{F}$ принадлежало $\mathfrak{F}$; тогда это пересечение и будет наименьшим элементом в $\mathfrak{F}$; аналогично, чтобы $\mathfrak{F}$ имело наибольший элемент, необходимо и достаточно, чтобы объединение всех множеств из $\mathfrak{F}$ принадлежало $\mathfrak{F}$; тогда это объединение и будет наибольшим элементом в $\mathfrak{F}$.

Говорят, что часть X упорядоченного множества E *конфинальна* (соответственно *коинициальна*) множеству E, если для всякого $y \in E$ существует такое $x \in X$, что $y \leqslant x$ (соответственно $x \leqslant y$). Сказать, что упорядоченное множество E имеет наибольший (соответственно наименьший) элемент, все равно, что сказать, что существует конфинальная (соответственно коинициальная) часть множества E, сводящаяся к единственному элементу.

6. Пусть X — часть упорядоченного множества E; всякий элемент $x \in X$, для которого не существует ни одного $z \in X$, такого, что $z < x$, называется *минимальным* элементом множества X; всякий $y \in X$, для которого не существует ни одного $z \in X$, такого, что $z > y$, называется *максимальным* элементом множества X. Множество максимальных элементов (или множество минимальных элементов) может быть пустым; оно может также быть бесконечным; если X имеет наименьший элемент a, он является *единственным* минимальным элементом множества X; аналогично, если X имеет наибольший элемент b, он является *единственным* максимальным элементом множества X.

7. Пусть X — часть упорядоченного множества E; если элемент $x \in E$ таков, что $z \leqslant x$ для всякого $z \in X$, говорят, что x *мажорирует* X или что x есть *мажоранта* (или *верхний ограничитель*) множества X; если $y \in E$ таков, что $z \geqslant y$ для всякого $z \in X$, говорят, что y *минорирует* X или что y есть *миноранта* (или *нижний ограничитель*) множества X.

Множество мажорант (или множество минорант) части X может быть пустым. Часть X, множество мажорант (соответственно минорант) которой не пусто, называется *мажорированной* или *ограниченной сверху* (соответственно *минорированной* или *ограниченной снизу*). Множество, ограниченное одновременно и сверху и снизу, называется *ограниченным*. Всякий элемент, мажорирующий некоторую мажоранту множества X, сам является мажорантой множества X; всякий элемент, минорирующий некоторую миноранту множества X, сам является минорантой множества X.

Если множество мажорант части X имеет наименьший элемент a, то a называют *верхней гранью* части X; аналогично, если множество минорант множества X имеет наибольший элемент b, его называют *нижней гранью* части X; если эти грани существуют, то по самому их определению они единственны; обозначают их $\sup_E X$ или $\sup X$ и соответственно $\inf_E X$ или $\inf X$. Если X имеет наибольший элемент, этот элемент является ее верхней гранью; если X имеет наименьший элемент, этот элемент является ее нижней гранью. Обратно, если верхняя (соответственно нижняя) грань множества X существует и принадлежит X, она является наибольшим (соответственно наименьшим) элементом этого множества.

Пусть f — отображение множества A в E. Говорят, что f *ограничено сверху* (соответственно *ограничено снизу*, *ограничено*), если $f(A)$ есть ограниченная сверху (соответственно ограниченная снизу, ограниченная) часть множества E; если $f(A)$ обладает *верхней* (соответственно *нижней*) гранью в E; эта грань называется *верхней* (соответственно *нижней*) *гранью* функции f и обозначается $\sup_{x \in A} f(x)$ (соответственно $\inf_{x \in A} f(x)$).

8. Упорядоченное множество E, всякая непустая *конечная* часть которого ограничена сверху (соответственно снизу), называется множеством, *фильтрующимся вправо* [1]) (соответственно *фильтрующимся влево*).

Упорядоченное множество E, всякая непустая *конечная* часть которого обладает верхней гранью и нижней гранью, называется *сетчатым множеством* или *упорядоченной сетью* (или *решеткой*) [2]).

Множество частей произвольного множества, упорядоченное включением, есть сеть, всякое совершенно упорядоченное множество есть сеть.

9. Упорядоченное множество E называется *индуктивным*, если оно удовлетворяет следующему условию: всякое совершенно упорядоченное подмножество множества E имеет можоранту.

[1]) В русской математической литературе фильтрующиеся вправо множества называют также *направленными*. — *Прим. ред.*

[2]) Такие упорядоченные множества называются в русской математической литературе *структурами*. В трактате Бурбаки, однако, термин „струк-

Множество $\mathfrak{P}(E)$, упорядоченное включением, — индуктивное множество; то же верно для множества всевозможных отображений частей множества E в множество F, упорядоченного соотношением „g есть продолжение отображения f“.

Произвольная часть индуктивного множества, вообще говоря, не является индуктивным множеством; но, если a — произвольный элемент индуктивного множества E, часть множества E, образованная элементами x, для которых $x \geqslant a$, также является индуктивным множеством.

10. С помощью аксиомы выбора доказывается следующее предложение, которое будет именоваться *теоремой Цорна*:

Всякое индуктивное упорядоченное множество обладает по крайней мере одним максимальным элементом.

11. В множестве $\mathfrak{P}(E)$ частей произвольного множества E, упорядоченном включением, верхней гранью любого множества $\mathfrak{F}$ частей множества E является *объединение* множеств из $\mathfrak{F}$. Применение теоремы Цорна дает следующий результат:

Если $\mathfrak{F}$ — такое множество частей множества E, *что для всякой части $\mathfrak{S}$ множества $\mathfrak{F}$, совершенно упорядоченной соотношением включения, объединение множеств из $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ обладает по крайней мере одним максимальным элементом* (т. е. в данном случае некоторой такой принадлежащей к $\mathfrak{F}$ частью множества E, которая не содержится ни в какой другой части множества E, принадлежащей $\mathfrak{F}$).

Говорят, что множество $\mathfrak{F}$ частей множества E есть множество *конечного характера*, если свойство „$X \in \mathfrak{F}$“ *эквивалентно* свойству „всякая *конечная* часть множества X принадлежит $\mathfrak{F}$“. Это определение позволяет сформулировать следующую теорему:

Всякое множество частей множества E, *являющееся множеством конечного характера, обладает по крайней мере одним максимальным элементом.*

12. Отображение f части A упорядоченного множества E в упорядоченное множество F называется *возрастающим* (соответственно *убывающим*), если соотношение $x \leqslant y$ между общими элементами множества A влечет $f(x) \leqslant f(y)$ (соответственно $f(x) \geqslant f(y)$); таким образом, всякая функция, постоянная на A, является одновременно возрастающей и убывающей; обратное верно, если A — *фильтрующееся* (вправо или влево) множество.

Отображение f называется *строго возрастающим* (соответственно *строго убывающим*), если соотношение $x < y$ влечет $f(x) < f(y)$ (соответственно $f(x) > f(y)$).

Если E — *совершенно упорядоченное*, всякое *строго возрастающее* (или *строго убывающее*) отображение части A множества E в упорядоченное множество F *инъективно*.

тура“ (фигурирующий в самом наименовании всей первой части трактата) употребляется в совершенно ином смысле. — *Прим. ред.*

Если I — *упорядоченное* множество индексов, семейство $(X_\iota)_{\iota \in I}$ частей множества E называется *возрастающим* (соответственно *убывающим*), если $\iota \to X_\iota$ есть возрастающее (соответственно убывающее) отображение множества I в $\mathfrak{P}(E)$, упорядоченное включением.

13. Пусть I — упорядоченное множество, фильтрующееся вправо, $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство множеств с множеством индексов I. Для всякой пары (α, β) индексов из I, такой, что $\alpha \leqslant \beta$, пусть $f_{\beta\alpha}$ будет отображением *множества* E_α в E_β. Предположим, что соотношения $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ влекут $f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha}$.

Пусть F — сумма семейства множеств $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$; допуская вольность речи, мы отождествляем множества E_α с соответствующими частями множества F. Пусть $R\{x, y\}$ — следующее соотношение между двумя элементами x и y множества F (α и β обозначают здесь такие элементы множества I, что $x \in E_\alpha$ и $y \in E_\beta$):

существует такое $\gamma \in I$, что $\gamma \geqslant \alpha$, $\gamma \geqslant \beta$ и $f_{\gamma\alpha}(x) = f_{\gamma\beta}(y)$.

Тогда R является соотношением эквивалентности на F. Пусть F есть фактормножество F/R и f — каноническое отображение: $F \to F/R$. Говорят, что E есть *индуктивный предел семейства* $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ *для семейства отображений* $(f_{\beta\alpha})$, а сужение f_α отображения f на E_α называется *каноническим отображением множества* E_α *в* E. Для $\alpha \leqslant \beta$ имеем $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$. Пишут $E = \varinjlim (E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ или, если от этого не получается никакого смешения, просто $E = \varinjlim E_\alpha$. Допуская вольность речи, мы будем говорить также, что пара $((E_\alpha), (f_{\beta\alpha}))$ есть *индуктивная система множеств относительно множества* I.

Если все отображения $f_{\beta\alpha}$ инъективны, то все отображения f_α тоже инъективны. В этом случае E_α и $f_\alpha(E_\alpha)$ вообще отождествляют и, таким образом, рассматривают E как *объединение* множеств E_α. Обратно, если некоторое множество E′ есть объединение семейства $(E'_\alpha)_{\alpha \in I}$ частей, таких, что соотношение $\alpha \leqslant \beta$ влечет $E'_\alpha \subset E'_\beta$, и если (при $\alpha \leqslant \beta$) через $j_{\beta\alpha}$ обозначить каноническую инъекцию множества E'_α в E'_β, то можно отождествить E′ с $\varinjlim (E'_\alpha, j_{\beta\alpha})$, а канонические отображения множеств E'_α в $\varinjlim (E'_\alpha, j_{\beta\alpha})$ — с каноническими инъекциями множеств E'_α в E′.

Более общо, пусть $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ — индуктивная система множеств относительно I и для всякого $\alpha \in I$ пусть g_α — такое отображение множества E_α в множество E′, что соотношение $\alpha \leqslant \beta$ влечет $g_\beta \circ f_{\beta\alpha} = g_\alpha$. Тогда существует и единственно отображение g множества $E = \varinjlim E_\alpha$ в E′, такое, что $g_\alpha = g \circ f_\alpha$ для всякого $\alpha \in I$. Для

того чтобы g было сюръективным, необходимо и достаточно, чтобы E' было объединением множеств $g_\alpha(E_\alpha)$. Чтобы g было инъективным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\alpha \in I$ соотношения $x \in E_\alpha$, $y \in E_\alpha$, $g_\alpha(x) = g_\alpha(y)$ влекли существование $\beta \geqslant \alpha$, для которого $f_{\beta\alpha}(x) = f_{\beta\alpha}(y)$. Если g биективно, иногда отождествляют E' и индуктивный предел множеств E_α.

Пусть $(A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ и $(B_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ — две индуктивные системы множеств относительно одного и того же множества индексов I; пусть $A = \varinjlim (A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$, $B = \varinjlim (B_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ и для всякого $\alpha \in I$ пусть φ_α (соответственно ψ_α) — каноническое отображение множества A_α в A (соответственно множества B_α в B). Для всякого $\alpha \in I$, пусть u_α — отображение множества A_α в B_α, такое, что для $\alpha \leqslant \beta$ имеем $u_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha} = \psi_{\beta\alpha} \circ u_\alpha$. Говорят, что (u_α) есть *индуктивная система отображений системы* $(A_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ *в* $(B_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$. При этих условиях существует и единственно отображение u: $A \to B$, такое, что для всякого $\alpha \in I$ имеем $u \circ \varphi_\alpha = \psi_\alpha \circ u_\alpha$. Говорят, что u есть *индуктивный предел* отображений u_α, и пишут $u = \varinjlim u_\alpha$, если можно не опасаться никакого смешения. Пусть $(C_\alpha, \theta_{\beta\alpha})$ — третья индуктивная система множеств относительно I, (v_α) — индуктивная система отображений системы $(B_\alpha, \psi_{\beta\alpha})$ в $(C_\alpha, \theta_{\beta\alpha})$ и $v = \varinjlim v_\alpha$. Тогда $\varinjlim (v_\alpha \circ u_\alpha) = v \circ u$.

Сохраняя предыдущие обозначения, положим $D_\alpha = A_\alpha \times B_\alpha$ и $\omega_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta\alpha} \times \psi_{\beta\alpha}$. Тогда семейство $(D_\alpha, \omega_{\beta\alpha})$ является индуктивной системой множеств. Пусть $D = \varinjlim (D_\alpha, \omega_{\beta\alpha})$, ω_α — каноническое отображение множества D_α в D, $D' = A \times B$ и $\omega'_\alpha = \varphi_\alpha \times \psi_\alpha$. Тогда существует и единственна биекция f: $D \to D'$ (называемая *канонической*), такая, что $f \circ \omega_\alpha = \omega'_\alpha$ для всякого $\alpha \in I$. Вообще произведение D' индуктивных пределов отождествляют с индуктивным пределом D произведений D_α.

Пусть J — конфинальная часть множества I. Тогда J есть множество, фильтрующееся вправо. Пусть $\left((E_\alpha)_{\alpha \in I}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \in I, \beta \in I}\right)$ есть индуктивная система множеств относительно I с индуктивным пределом E; тогда прежде всего $\left((E_\alpha)_{\alpha \in J}, (f_{\beta\alpha})_{\alpha \in J, \beta \in J}\right)$ есть индуктивная система множеств относительно J; пусть E' — ее индуктивный предел и для $\alpha \in J$ пусть f'_α — каноническое отображение множества E_α в E'. Тогда существует и единственно отображение $g: E' \to E$, такое, что $g(f'_\alpha(x)) = f_\alpha(x)$ для $\alpha \in J$ и $x \in E_\alpha$ (где f_α обозначает каноническое отображение множества E_α в E). Это отображение есть биекция, при помощи которой E' и E обычно отождествляют.

14. Пусть I — упорядоченное множество, фильтрующееся вправо, $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ — семейство множеств с множеством индексов I. Для всякой пары (α, β) индексов из I, такой, что $\alpha \leqslant \beta$, пусть $f_{\alpha\beta}$ будет отображением *множества* E_β *в* E_α. Предположим, что соотношения $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$ влекут $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}$.

Пусть G — произведение семейства множеств $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$. Пусть E — часть множества G, образованная элементами x, удовлетворяющими каждому из соотношений $\mathrm{pr}_\alpha x = f_{\alpha\beta}(\mathrm{pr}_\beta x)$ для всякой пары индексов (α, β), такой, что $\alpha \leqslant \beta$. Говорят, что E есть *проективный предел семейства* $(E_\alpha)_{\alpha \in I}$ *для семейства отображений* $f_{\alpha\beta}$, а сужение f_α отображения pr_α на E называется *каноническим отображением множества* E *в* E_α. Для $\alpha \leqslant \beta$ имеем $f_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ f_\beta$. Пишут $E = \varprojlim (E_\alpha, f_{\alpha\beta})$ или, если можно не опасаться никакого смешения, просто $E = \varprojlim E_\alpha$. Допуская вольность речи, мы будем говорить также, что пара $((E_\alpha), (f_{\alpha\beta}))$ есть *проективная система множеств относительно множества* I.

Заметим, что E может быть пустым, даже если все E_α не пусты и все отображения $f_{\alpha\beta}$ сюръективны.

Для всякого $\alpha \in I$ пусть g_α — отображение некоторого множества E' в E_α, такое, что соотношение $\alpha \leqslant \beta$ влечет $f_{\alpha\beta} \circ g_\beta = g_\alpha$. Тогда существует и единственно отображение g множества E' в E, такое, что $g_\alpha = f_\alpha \circ g$ для всякого $\alpha \in I$. Для того чтобы g было инъективным, необходимо и достаточно, чтобы для всякой пары различных элементов x', y' из E' существовал такой индекс $\alpha \in I$, что $g_\alpha(x') \neq g_\alpha(y')$.

Пусть $(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ и $(B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ — две проективные системы множеств относительно одного и того же множества индексов I; пусть $A = \varprojlim (A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$, $B = \varprojlim (B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ и для всякого $\alpha \in I$ пусть φ_α (соответственно ψ_α) — каноническое отображение множества A в A_α (соответственно множества B в B_α). Для всякого $\alpha \in I$ пусть u_α — отображение множества A_α в B_α, такое, что для $\alpha \leqslant \beta$ имеем $\psi_{\alpha\beta} \circ u_\beta = u_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}$. Говорят, что (u_α) есть *проективная система отображений системы* $(A_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$ *в* $(B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$. При этих условиях существует и единственно отображение u: $A \to B$, такое, что для всякого $\alpha \in I$ имеем $\psi_\alpha \circ u = u_\alpha \circ \varphi_\alpha$. Говорят, что u есть *проективный предел* отображений u_α, и пишут $u = \varprojlim u_\alpha$, если можно не опасаться никакого смешения. Пусть $(C_\alpha, \theta_{\alpha\beta})$ — третья проективная система множеств относительно I, (v_α) — проективная система отображений системы $(B_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ в $(C_\alpha, \theta_{\alpha\beta})$ и $v = \varprojlim v_\alpha$. Тогда $\varprojlim (v_\alpha \circ u_\alpha) = v \circ u$.

Пусть J — конфинальная часть множества I. Пусть $\left((E_\alpha)_{\alpha \in I}, (f_{\alpha\beta})_{\alpha \in I, \beta \in I}\right)$ — проективная система множеств относительно I с проективным пределом E; тогда прежде всего $\left((E_\alpha)_{\alpha \in J}, (f_{\alpha\beta})_{\alpha \in J, \beta \in J}\right)$ есть проективная система множеств относительно J; пусть E' — ее проек-

тивный предел и для $\alpha \in J$ f'_α — каноническое отображение множества E′ в E_α. Для $x \in E$ пусть $g(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J} \in E'$ (f_α обозначает каноническое отображение множества E в E_α). Тогда g есть биекция множества E на E′, при помощи которой E′ и E обычно отождествляют.

§ 7. Мощности. Счетные множества

1. Два множества E, F называются *равномощными*, если они могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие.

Два множества, равномощные одному и тому же третьему множеству, равномощны.

Если E и F равномощны, то $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathfrak{P}(F)$ тоже равномощны.

Если E и F, E′ и F′, E″ и F″ соответственно равномощны, то $E \times E' \times E''$ и $F \times F' \times F''$ равномощны; это предложение распространяется на произведение любого числа множеств.

2. Пусть X и Y — две общие части множества E; соотношение „X и Y равномощны" есть *соотношение эквивалентности* в $\mathfrak{P}(E)$; класс эквивалентности (по этому соотношению), к которому принадлежит X, называется *мощностью*[1]) части X, а множество этих классов (фактормножество множества $\mathfrak{P}(E)$ по указанному соотношению) — *множеством мощностей* частей множества E.

Пусть E и F — два различных множества; соотношение „X и Y равномощны" между частью X множества E и частью Y множества F выражают еще, говоря, что мощность множества X и мощность множества Y *эквивалентны*; этим определено *взаимно однозначное* соотношение между некоторой частью множества мощностей частей из E и некоторой частью множества мощностей частей из F.

3. Пусть E, F — два произвольных множества, не обязательно различных; пусть $\mathfrak{a}$ — элемент множества мощностей частей из E, $\mathfrak{b}$ — элемент множества мощностей частей из F; говорят, что $\mathfrak{a}$ *минорирует* $\mathfrak{b}$ или что $\mathfrak{b}$ *превышает* (или *мажорирует*) $\mathfrak{a}$, если существует взаимно однозначное отображение части $X \subset E$ мощности $\mathfrak{a}$ в часть $Y \subset F$ мощности $\mathfrak{b}$; говорят, что $\mathfrak{a}$ *строго минорирует* $\mathfrak{b}$ или $\mathfrak{b}$ *строго превышает* (*строго мажорирует*) $\mathfrak{a}$, если, кроме того, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ не являются эквивалентными мощностями.

[1]) В формализованной теории множеств (см. гл. III, § 3) определяют понятие *кардинального числа* некоторого множества, которое, допуская вольность речи, называют также *мощностью* этого множества. Однако эта вольность речи не вызывает смешения, ибо для того, чтобы две части некоторого множества имели одну и ту же мощность (в вышеуказанном смысле), необходимо и достаточно, чтобы они имели одно и то же кардинальное число; аналогично, чтобы мощность части A множества E превышалась мощностью части B множества F (n° 3), необходимо и достаточно, чтобы кардинальное число множества A превышалось кардинальным числом множества B; наконец, если мощность множества A есть сумма (n° 5) мощностей семейства (A_ι) частей множества E, то кардинальное число множества A есть сумма кардинальных чисел множеств A_ι.

Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ эквивалентны, $\mathfrak{a}$ одновременно мажорирует и минорирует $\mathfrak{b}$; обратно, доказывается, что *если* $\mathfrak{b}$ *одновременно мажорирует и минорирует* $\mathfrak{b}$, то $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ *эквивалентны*. Из этого, в частности, вытекает, что множество мощностей частей множества E *упорядочено* соотношением „$\mathfrak{a}$ минорирует $\mathfrak{b}$"; когда об этом множестве говорят как об упорядоченном множестве, всегда имеют в виду порядок, определенный указанным соотношением.

Кроме того, используя теорему Цорна (и, следовательно, аксиому выбора), доказывают, что *множество мощностей частей множества* E *вполне упорядочено*.

4. Мощность множества E *строго минорирует* мощность множества $\mathfrak{P}(E)$.

Если f — отображение множества E в множество F, мощность образа $f(X)$ любой части X множества E *минорирует* мощность множества X.

5. Пусть $(X_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство частей множества E, такое, что $\iota \neq \varkappa$ влечет $X_\iota \cap X_\varkappa = \varnothing$; пусть $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство частей множества F, соответствующее тому же множеству индексов I и такое, что мощность множества Y_ι *минорирует* мощность множества X_ι, каково бы ни было $\iota \in I$; тогда мощность объединения $\bigcup_{\iota \in J} Y_\iota$ *минорирует* мощность множества $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota$, какова бы ни была часть J множества I.

Если, кроме того, $\iota \neq \varkappa$ влечет $Y_\iota \cap Y_\varkappa = \varnothing$ и если X_ι и Y_ι *равномощны*, каково бы ни было ι, то $\bigcup_{\iota \in J} X_\iota$ *равномощно* $\bigcup_{\iota \in J} Y_\iota$.

В частности, если F совпадает с E, видно, что мощность объединения множества частей из E, *попарно не имеющих общих элементов*, зависит только от мощностей этих частей; ее называют *суммой* этих мощностей (функция, которая, таким образом, определена для семейства $(\mathfrak{a}_\iota)$ элементов множества мощностей только в том случае, когда можно найти семейство (X_ι) попарно не пересекающихся частей множества E, такое, что X_ι имеет мощность $\mathfrak{a}_\iota$).

Если $(X_\iota)_{\iota \in I}$ и $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ — семейства частей множеств E и F соответственно, имеющие одно и то же множество индексов и такие, что X_ι и Y_ι *равномощны*, каково бы ни было ι, то произведения $\prod_\iota X_\iota$ и $\prod_\iota Y_\iota$ *равномощны*.

6. Множество **N** положительных целых чисел может рассматриваться как множество мощностей *конечных частей* некоторого *бесконечного* множества; соотношение порядка „$x \leqslant y$" в **N** есть не что иное, как соотношение, упорядочивающее это множество мощностей; *сумма* же двух положительных целых чисел есть функция, совпадающая с суммой двух мощностей, такой, как она только что была определена.

7. Множество называется *счетным*[1]), если оно равномощно части множества N положительных целых чисел. Таким образом, всякое *конечное* множество счетно; если n — число его элементов, оно равномощно интервалу $[0, n-1]$ множества N. Всякое *счетное бесконечное* множество *равномощно* N; в частности, всякая бесконечная часть множества N имеет ту же мощность, что и N.

Если E — *бесконечное* множество, существует *разбиение* множества E, образованное *счетными бесконечными* множествами; в частности, мощность всякого бесконечного множества мажорирует мощность множества N.

Если E — *бесконечное* множество, множества $E \times E$ и $E \times N$ *равномощны* E; множество *конечных частей* множества E *равномощно* E. В частности, $N \times N$ есть *счетное бесконечное* множество.

8. *Последовательностью элементов* множества E называется семейство элементов множества E, множеством индексов которого является множество N положительных целых чисел или какая-нибудь часть множества N; таким образом, последовательность, множеством индексов которой служит N, обозначается $(x_n)_{n \in N}$ или проще (x_n), когда можно не опасаться никакого смешения; если n обозначает общее целое число, x_n называется *общим членом* последовательности или еще *членом с индексом n* (это последнее наименование употребляют также при замене n каким-либо определенным целым числом). Множество элементов последовательности счетно.

Последовательность называется *бесконечной* или *конечной*, смотря по тому, является ли множество индексов бесконечной или конечной частью множества N. Множество элементов конечной последовательности конечно.

Всякое подсемейство последовательности есть последовательность, называемая *подпоследовательностью* данной последовательности; всякая подпоследовательность конечной последовательности есть конечная последовательность.

Двойной последовательностью (или последовательностью *с двумя индексами*) называется семейство элементов, множеством индексов которого является $N \times N$ или какая-нибудь часть множества $N \times N$; двойная последовательность, множеством индексов которой служит $N \times N$, обозначается $(x_{m,n})$, или, проще (x_{mn}), если это не дает повода к смешению. Аналогично определяются последовательности с более чем двумя индексами.

Говорят, что две последовательности (x_n), (y_n) *отличаются только порядком членов*, если существует перестановка f множества индексов, такая, что $y_n = x_{f(n)}$, каково бы ни было n.

[1]) В русской математической литературе *счетными* называются обычно множества, равномощные всему множеству N; множества, равномощные частям множества N, называют тогда *не более чем счетными* или *разве что счетными*. — *Прим. ред.*

С семейством элементов $(x_\iota)_{\iota \in I}$, имеющим счетное бесконечное множество индексов I, можно следующим образом ассоциировать бесконечную последовательность: существует взаимно однозначное отображение $n \to f(n)$ множества N на I; положив $y_n = x_{f(n)}$, говорят, что последовательность (y_n) получается *расположением* семейства (x_ι) *в порядке, определенном отображением f*. Последовательности, таким образом соответствующие двум различным взаимно однозначным отображениям множества N на I, отличаются только порядком членов.

Действуя таким же образом в случае *конечного* множества I, получим *конечную последовательность*, ассоциированную с семейством (x_ι).

9. Объединение, пересечение или произведение семейства $(X_\iota)_{\iota \in I}$ частей множества E называются *счетными*, если I — счетное множество, и *конечными*, если I конечно.

Если I *счетно* и, каково бы ни было ι, мощность множества X_ι минорирует заданную бесконечную мощность $\mathfrak{a}$, то мощность объединения $\bigcup_\iota X_\iota$ *минорирует* $\mathfrak{a}$; если, кроме того, по крайней мере одно из X_ι имеет мощность $\mathfrak{a}$, $\bigcup_\iota X_\iota$ также имеет мощность $\mathfrak{a}$. В частности, всякое счетное объединение множеств мощности $\mathfrak{a}$ имеет мощность $\mathfrak{a}$; всякое счетное объединение счетных множеств есть счетное множество.

§ 8. Шкалы множеств и структуры

1. Если даны, например, три *различных* множества E, F, G, из них можно образовывать другие множества, беря множества их частей или составляя произведение одного из этих множеств на себя или, наконец, составляя произведение двух из этих множеств, взятых в некотором порядке. Таким образом получается *двенадцать* новых множеств; присоединив их к трем множествам E, F, G, можно вновь применить к этим пятнадцати множествам те же операции, отбрасывая те, которые дают уже полученные множества; и т. д. Вообще о любом из множеств, полученных этим процессом (по определенной схеме), говорят, что оно составляет часть *шкалы множеств, имеющей в качестве базы* E, F, G.

Пусть, например, M, N, P — три множества этой шкалы и $R\{x, y, z\}$ — соотношение между общими элементами, принадлежащими соответственно к каждому из этих множеств; R определяет некоторую часть множества $M \times N \times P$, следовательно (при помощи канонического соответствия), некоторую часть множества $(M \times N) \times P$ и, наконец, некоторый элемент множества

$$\mathfrak{P}((M \times N) \times P);$$

таким образом, задание *соотношения* между элементами нескольких множеств одной и той же шкалы сводится к заданию *элемента* некоторого другого множества этой шкалы. Аналогично задание отображения, например, множества M в N сводится (если рассмотреть график этого отображения) к заданию части множества $M \times N$, т. е. к заданию элемента множества $\mathfrak{P}(M \times N)$, также принадлежащего к шкале. Наконец, задание двух элементов (например) множества M сводится к заданию одного-единственного элемента произведения $M \times M$.

Таким образом, задание некоторого числа элементов множеств шкалы, соотношений между общими элементами этих множеств, отображений частей некоторых из этих множеств в другие сводится в конечном счете к заданию *одного-единственного элемента* одного из множеств шкалы.

2. Выше было сказано (§ 6), что задание элемента C множества $\mathfrak{P}(E \times E)$ определяет на E *структуру упорядоченного множества*, если имеют место свойства:

a) $C \circ C \subset C$; б) $C \cap \overset{-1}{C} = \Delta$.

Более общо, рассмотрим некоторое множество M шкалы, база которой образована, например, тремя множествами E, F, G; зададим некоторое число явно сформулированных свойств общего элемента множества M, и пусть T — пересечение частей множества M, определенных этими свойствами; говорят, что элемент σ множества T определяет на E, F, G *структуру рода* T; таким образом, структуры рода T характеризуются схемой образования множества M, исходя из E, F, G, и свойствами, определяющими T, которые называются *аксиомами* этих структур; всем стуктурам одного и того же рода придается специальное название. Всякое предложение, являющееся следствием предложения „$\sigma \in T$" (т. е. аксиом, определяющих T), называется принадлежащим к *теории* структур рода T; например, предложения, сформулированные в § 6, принадлежат к теории структур упорядоченного множества.

Заметим, что в этом последнем примере аксиомы могут формулироватся для множества с совершенно произвольной базой E; поэтому структурам, удовлетворяющим этим аксиомам, дают одно и то же наименование независимо от множества, на котором они определены; и предложения, выведенные из этих аксиом, применимы к произвольному множеству, ибо для их формулирования не нужно вводить особенности множества E. Эти замечания применяются каждый раз, когда формулируются аксиомы этого типа[1]).

[1]) Читатель заметит, что указания, данные в этом абзаце, остаются довольно неопределенными; здесь они приводятся только в эврнстическом плане и, по-видимому, почти невозможно сформулировать общие и точные определения, касающиеся структур, вне рамок формальиой математики (см. гл. IV).

Чаще всего при использовании шкалы с базой, составленной из нескольких множеств E, F, G, одно из этих множеств, например E, играет в рассматриваемых структурах преобладающую роль; поэтому, допуская вольность речи, говорят, что эти структуры определены на множестве E, а множества F и G рассматриваются как вспомогательные множества.

Наконец, для облегчения речи множеству, наделенному структурой определенного рода, часто дают специальное название; именно так мы говорим об *упорядоченном множестве* и определяем далее в этом Трактате понятия *группы, кольца, тела, топологического пространства, равномерного пространства* и т. д. — все это слова, означающие множества, наделенные определенными структурами.

3. Рассмотрим структуры одного и того же рода T, где T — часть множества M некоторой шкалы множеств; если добавить новые „аксиомы" к тем, которые определяют T, полученная система аксиом определит некоторую часть U множества M, содержащуюся в T; говорят, что структуры рода U *богаче*, чем структуры рода T. Например, структуры *совершенно упорядоченного* множества богаче, чем структуры упорядоченного множества, ибо элемент C множества $\mathfrak{P}(E \times E)$, определяющий такую структуру, удовлетворяет дополнительной аксиоме $C \cup \overset{-1}{C} = E \times E$.

4. Пусть M, M′ — два множества одной и той же шкалы с базой, например, E, F, G; пусть T — часть множества M и T′ — часть множества M′, определенные каждое некоторыми явно сформулированными аксиомами. Всякий раз, когда будет явно задано *взаимно однозначное отображение множества* T *на* T′, мы будем считать, что элементы $\sigma \in T$ и $\sigma' \in T'$, соответствующие друг другу при этом отображении, определяют на E, F, G *одну и ту же* структуру, и будем говорить, что системы аксиом, определяющие T и T′, *эквивалентны*.

Пример такого положения доставляется *топологическими* структурами, которые могут быть определены несколькими эквивалентными системами аксиом; две из этих систем особенно удобны (см. „Общая топология", гл. I, § 1).

5. Пусть E, F, G — три множества; предположим, что даны *взаимно однозначные* отображения множеств E, F, G соответственно *на* три других множества E′, F′, G′. Поскольку мы умеем определять *распространения* взаимно однозначных отображений на множества частей (§ 2, n° 9) и произведения множеств (§ 3, n° 14), шаг за шагом определится *распространение* заданных взаимно однозначных отображений на два множества M, M′, построенные по *одной и той же* схеме соответственно в шкале множеств с базой E, F, G и в шкале множеств с базой E′, F′, G′. Пусть f — полученное таким путем взаимно однозначное отображение множества M на M′. Если σ — структура на E, F, G, представляющая собой элемент некоторой

части T множества M, то мы будем говорить, что $f(\sigma)$ есть структура, полученная *переносом* структуры σ на E′, F′, G′ посредством взаимно однозначных отображений E на E′, F на F′ и G на G′. Всякое предложение относительно структуры σ на E, F, G дает одновременно (при использовании надлежащих распространений) предложение о структуре $f(\sigma)$ на E′, F′, G′.

Обратно, пусть даны структура σ на E, F, G и структура σ' на E′, F′, G′; мы будем говорить, что они *изоморфны* (или что между этими структурами существует *изоморфия*), если σ' может быть получена *переносом* σ посредством взаимно однозначных отображений соответственно E на E′, F на F′ и G на G′; в этом случае говорят, что эти отображения образуют *изоморфизм* структуры σ на σ'.

Когда речь идет о структурах на о д н о м множестве E, взаимно однозначное отображение множества E на E′, переносящее σ на σ', называется также *изоморфизмом множества* E, *наделенного структурой* σ, *на множество* E′, *наделенное структурой* σ'.

Этому отображению дают название изоморфизма также и в случае, когда F и G — два вспомогательных множества, а взаимно однозначными отображениями этих множеств являются *тождественные* отображения множеств F и G на себя.

Изоморфизм множества E, наделенного структурой σ, на себя называется *автоморфизмом*.

В случае существования изоморфизма f множества E, наделенного структурой σ, на множество E′, наделенное структурой σ', часто бывает удобно *отождествлять* E и E′, т. е. давать *одно и то же имя* элементу множества M шкалы с базой E и элементу, являющемуся его образом при надлежащем распространении отображения f на множество M.

6. Формулируя систему аксиом, определяющую часть T множества M некоторой шкалы множеств, следует, перед тем как говорить о структурах, удовлетворяющих этим аксиомам, убедиться в том, что множество T *не является необходимо пустым*; в противном случае говорят, что аксиомы *противоречивы*.

7. Может случиться, что система аксиом, определяющая на некотором множестве структуру, может быть сформулирована для произвольного множества, но если рассмотреть две структуры, удовлетворяющие этим аксиомам и определенные на двух различных множествах E, F, то из аксиом вытекает, что эти структуры (если они существуют) необходимо *изоморфны* (а это влечет, в частности, *равномощность* множеств E и F). В таком случае говорят, что теория структур, удовлетворяющих этим аксиомам, *однозначна*; в противоположном случае говорят, что она *многозначна*.

Теория целых чисел, теория действительных чисел, классическая эвклидова геометрия — однозначные теории; теория упорядоченных множеств, теория групп, топология — многозначные теории. Изучение многозначных теорий — самая резкая черта, отличающая современную математику от классической.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Цифры при обозначениях и терминах указывают главу, параграф и пункт книги соответственно: так, 1 3 3 означает гл. I, § 3, п. 3. Обозначения, вводимые в Сводке результатов (Рез.), приведены отдельно в конце настоящего указателя

$\overset{\circ}{\ }\ldots{}_{\circ}$, $\overset{*}{\ }\ldots{}_{*}$, Z, ¶

$\square$, τ, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$	I	1	1	
$\tau_x(A)$, $(B \mid x)A$, $A\{x\}$, $A\{x, y\}$, $A\{B\}$, $A\{B, C\}$	I	1	1	
ие (A), (A) или (B), $(A) \Rightarrow (B)$	I	2	0	
$\mathcal{T}$	I	3	1	(I 4 3)
„A и B“	I	3	4	
$\Leftrightarrow$, $A \Leftrightarrow B$	I	3	5	
$(\exists x)R$, $(\forall x)R$	I	4	1	
$\mathcal{T}_0$	I	4	3	
$(\exists_A x)R$, $(\forall_A)R$	I	4	4	
$=$, $\neq$, $T = U$, $T \neq U$	I	5	1	
$\in$, $\notin$, $T \in U$, $T \notin U$	II	1	1	
$\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$, $x \subset y$, $x \supset y$	II	1	2	
$\mathrm{Coll}_x R$, $\mathcal{E}_x(R)$	II	1	4	
$\{x, y\}$, $\{x\}$	II	1	5	
$\complement_X A$, $X = A$, $\complement A$, $\varnothing$	II	1	7	
$\supset$, (T, U), $\mathrm{pr}_1 z$, $\mathrm{pr}_2 z$	II	2	1	
$A \times B$, $A \times B \times C$, $A \times B \times C \times D$, (x, y, z)	II	2	2	
$\mathrm{pr}_1 \langle G \rangle$, $\mathrm{pr}_2 \langle G \rangle$, $\mathrm{pr}_1 G$, $\mathrm{pr}_2 G$ (G — график)	II	3	1	
$G\langle X \rangle$, $G(X)$, $G(x)$ (G — график, X — множество, x — объект)	II	3	1	
$\Gamma\langle X \rangle$, $\Gamma(X)$, $\Gamma(x)$ (Γ — соответствие, X — множество, x — объект)	II	3	1	
$\overset{-1}{G}$ (G — график), $\overset{-1}{\Gamma}$ (Γ — соответствие)	II	3	2	
$G' \circ G$, $G'G$ (G, G′ — графики), $\Gamma' \circ \Gamma$, $\Gamma'\Gamma$ (Γ, Γ′ — соответствия)	II	3	3	
Δ_A, I_A (A — множество)	II	3	3	
$f(x)$, f_x (f — функция), $F(x)$, F_x (F — функциональный график)	II	3	4	
$f: A \to B$, $A \xrightarrow{f} B$	II	3	4	
f/A	II	3	5	
$x \to T$ ($x \in A$, $T \in C$), $x \to T$ ($x \in A$), $x \to T$, $T_{x \in A}$, T (вольность речи) (T — терн)	II	3	6	

pr_1, pr_2	II	3	6
gf (g, f — отображения) (вольность речи)	II	3	7
$f(x, y)$, $f(.\,, y)$, $f(x, .)$, $f(.\,y)$, $f(x.)$	II	3	9
$u \times v$ (u, v — функции), (u, v) (вольность речи)	II	3	9
$\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, $\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$	II	4	1
$\bigcup_{X \in \mathfrak{F}} X$, $\bigcap_{X \in \mathfrak{F}} X$	II	4	1
$A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap B \cap C$	II	4	5
$\{x, y, z\}$	II	4	5
$\mathfrak{P}(X)$	II	5	1
$\widehat{\Gamma}$	II	5	1
$\mathcal{F}(E, F)$, F^E	II	5	2
$\prod_{\iota \in I} X_\iota$, pr_ι	II	5	3
pr_J	II	5	4
$(g_\iota)_{\iota \in I}$ [распространение на произведения семейства $(g_\iota)_{\iota \in I}$ (вольности речи)]	II	5	7
$x \equiv y \pmod{R}$ (R — соотношение эквивалентности)	II	6	1
E/R (E — множество, R — соотношение эквивалентиости)	II	6	2
R_A (R — соотношение эквивалентности, A — множество)	II	6	6
R/S (R, S — соотношения эквивалентности)	II	6	7
$R \times R'$ (R, R′ — соотношеиия эквивалентности)	II	6	8
$x \leqslant y$, $y \geqslant x$, $x \neq y$	III	1	3
$x < y$, $y > x$	III	1	3
$\sup_E X$, $\inf_E X$	III	1	9
$\sup X$, $\inf X$	III	1	9
$\sup(x, y)$, $\inf(x, y)$	III	1	9
$\sup_{x \in A} f(x)$, $\inf_{x \in A} f(x)$	III	1	9
$\sup_{x \in A} x$, $\inf_{x \in A} x$	III	1	9
$\varinjlim E_\alpha$	III	1	11
$\varprojlim E_\alpha$	III	1	12
$[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$	III	1	15
$]\leftarrow, a]$, $]\leftarrow, a[$, $[a, \rightarrow[$, $]a, \rightarrow[$, $]\leftarrow, \rightarrow[$	III	1	15
$\sum_{\iota \in I} E_\iota$	III	1	Упр.
S_x	III	2	1
$E \cdot I$, $E.\,I$ (E, I — упорядоченные множества)	III	2	Упр.
Ord (Γ) (Γ — порядок), Ord (E) (E — упорядоченное множество)	III	2	Упр.
$\lambda < \mu$, $\lambda + \mu$, $\mu\lambda$, $\mu \cdot \lambda$, $\mu.\lambda$, $\lambda \leqslant \mu$ (λ, μ — ординальные числа)	III	2	Упр.

$\mathbf{P}_{\iota \in I} \lambda_\iota$	III	2	Упр.
Eq (X, Y), Card (X)	III	3	1
0, 1, 2	III	3	1
$\mathfrak{x} \leqslant \mathfrak{y}$ ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ — кардинальные числа)	III	3	2
$\sup_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota$ ($(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство кардинальных чисел)	III	3	2
$\sum_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota$, $\mathbf{P}_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota$, $\prod_{\iota \in I} \mathfrak{a}_\iota$ ($(\mathfrak{a}_\iota)_{\iota \in I}$ — семейство кардинальных чисел)	III	3	3
$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — кардинальные числа)	III	3	3
$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — кардинальные числа)	III	3	5
3, 4	III	4	1
$a - b$ (a, b — целые числа, такие, что $b \leqslant a$)	III	5	2
$(t_i)_{P\{i\}}$, $(t_i)_{a \leqslant i \leqslant b}$	III	5	4
$\prod_{P\{i\}} X_i$, $\prod_{i=a}^{b} X_i$	III	5	4
φ_A (A — часть множества E)	III	5	5
$\frac{a}{b}$, a/b (a, b — целые числа, такие, что a делит b)	III	5	6
5, 6, 7, 8, 9	III	5	7
$n!$ (n — целое число)	III	5	8
$\binom{n}{p}$ (n, p — целые числа)	III	5	8
$\frac{a}{b} c$	III	5	8
(—1)	III	5	Упр.
$\mathbf{N}$, $\aleph_0$	III	6	1
$(x_n)_{P\{n\}}$, $(x_n)_{k \leqslant n}$, $(x_n)_{n \geqslant k}$, (x_n)	III	6	1
$\prod_{P\{n\}} X_n$, $\prod_{n=k}^{\infty} X_n$	III	6	1
ω, ω_0, ω_α	III	6	Упр.
$W(\mathfrak{a})$	III	6	Упр.
$\aleph_\alpha$	III	6	Упр.
f^n (f — отображение)	III	6	2
$S(E_1, \ldots, E_n)$ (S — схема конструкции ступени, $E_1, \ldots, E_n$ — множества)	III	1	1
$\langle f_1, \ldots, f_n \rangle^S$ (S — схема конструкции ступени, $f_1, \ldots, f_n$ — отображения)	IV	1	2
$\mathcal{T}_\Sigma$	IV	1	4
$S \times S'$, $\mathfrak{P}(S)$ (S, S′ — схемы конструкции ступени)	IV	Прил.	1

$R\{x, y, z\}$	Рез.	1	2
$=$, $\neq$	Рез.	1	6
$\in$, $\notin$	Рез.	1	7
$\complement_A$, $E - A$	Рез.	1	7
$\varnothing$	Рез.	1	8
$\{a\}$	Рез.	1	9
$\mathfrak{P}(E)$	Рез.	1	10
$\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$	Рез.	1	12
$\cup$, $\cap$	Рез.	1	13
$\{x, y, z\}$	Рез.	1	13
X_A (X — часть)	Рез.	1	16
$\mathfrak{E}_A$ ($\mathfrak{E}$ — множество частей)	Рез.	1	16
$f(x)$, f_x, $x \to f(x)$ (f — отображение, x — элемент)	Рез.	2	2
$f(X)$ (X — часть)	Рез.	2	4
f^{-1} (f — отображение)	Рез.	2	6
$g \circ f$, gf, $h \circ g \circ f$ (f, g, h — отображение)	Рез.	2	11
f_A, f/A (f — отображение)	Рез.	2	13
$(x_\iota)_{\iota \in I}$, (x_ι)	Рез.	2	14
(x, y)	Рез.	3	1
$E \times F$ (E, F — множества)	Рез.	3	1
pr_1, pr_2	Рез.	3	1
Δ	Рез.	3	4
Z^{-1} (Z — часть произведеиия)	Рез.	3	4
$K(X)$ (K — часть $E \times F$, X — часть E)	Рез.	3	6
$K(x)$ (K — $E \times F$, x — элемент E)	Рез.	3	9
$B \circ A$, BA, $C \circ B \circ A$, CBA (A — часть $E \times F$, B — часть $F \times G$, C — элемент $G \times H$)	Рез.	3	10
(x, y, z)	Рез.	3	12
$E \times F \times G$	Рез.	3	12
$pr_{1,2}$	Рез.	3	12
(f, g, h) (f, g, h — отображения)	Рез.	3	12
$\bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, $\bigcup_\iota X_\iota$, $\bigcup_{X \in \mathfrak{F}} X$	Рез.	4	4
$\bigcap_{\iota \in I} X_\iota$, $\bigcap_\iota X_\iota$, $\bigcap_{X \in \mathfrak{F}} X$	Рез.	4	9
$\prod_{\iota \in I} X_\iota$, $\prod_\iota X_\iota$	Рез.	4	9
E^I (E, I — множества)	Рез.	4	9
pr_J, $pr_\varkappa$	Рез.	4	11
(f_ι) (f_ι — отображения)	Рез.	4	13
E/R (E — множество, R — соотношение эквивалентности)	Рез.	5	2
$x \equiv y \pmod{R}$	Рез.	5	2
R_A (R — соотношение эквивалентности, A — часть)	Рез.	5	5

T/R (T, R — соотношение эквивалентности)	Рез.	5	9
$R \times S$ (R, S — соотиошение эквивалентности)	Рез.	5	10
$\mathbf{N}$, 0	Рез.	6	2
$\leqslant$, $\geqslant$, $<$, $>$	Рез.	6	3
$[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $]\leftarrow, a]$, $]\leftarrow, a[$, $[a, \to[$, $]a, \to[$, $]\leftarrow, \to[$	Рез.	4	6
$\sup_E X$, $\sup X$, $\inf_E X$, $\inf X$	Рез.	6	7
$\sup_{x \in A} f(x)$, $\inf_{x \in A} f(x)$	Рез.	6	7
$\underrightarrow{\lim}\,(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$, $\underrightarrow{\lim}\,E_\alpha$, $\underrightarrow{\lim}\,u_\alpha$	Рез.	6	13
$\underleftarrow{\lim}\,(E_\alpha, f_{\alpha\beta})$, $\underleftarrow{\lim}\,E_\alpha$, $\underleftarrow{\lim}\,u_\alpha$	Рез.	6	14
(x_n), $(x_{m,n})$ (m, n — положительные целые числа)	Рез.	7	8

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ [1])

В настоящем указателе в необходимых случаях после русского термина (который может быть словом или группой слов), являющегося переводом какого-либо французского термина (опять-таки слова или группы слов), помещен в угловых скобках этот французский термин. При замене по обычным правилам повторяющегося русского слова или цепочки русских слов посредством тире (соответственно цепочки тире) французский перевод этого слова или цепочки не повторяется; подразумевается, что он остается тем же самым (в противном случае замена слов на тире не производится). При этом французские прилагательные, различающиеся лишь родовыми окончаниями, мы уславливаемся считать одним и тем же переводом; так что для образования французского словосочетания с участием прилагательного необходимо еще придать этому прилагательному правильное окончание.

Заключенный в ломаные скобки французский термин считается переводом всей предшествующей группы русских слов, если ранее в той же строке не встречается никакой французский термин; если же ранее в строке имеется другой французский термин (в том числе и не представленный явно, а „подразумеваемый" после тире), то последующий термин считается переводом той группы русских слов, которая заключена между ним и предшествующим.

Как правило, французские предлоги приводятся в указателе, исключение составляет предлог *de*, который считается переводом русского родительного падежа во всех случаях, где не указан иной перевод, и потому в этих случаях обычно не приводится.

Абсурд: приведение к абсурду ⟨réduction à l'absurde⟩	I	3	3
Автоморфизм ⟨automorphisme⟩	IV	1	5
	Рез.	8	5
Аксиома ⟨axiome⟩ бесконечности ⟨de l'infini⟩	III	6	1
— выбора ⟨de choix⟩	Рез.	4	10
— двухэлементного множества ⟨de l'ensemble à deux éléments⟩	II	1	5
— множества частей ⟨de l'ensemble des parties⟩	II	5	1
— независимая от других ⟨indépendant des autres⟩	I	2	Упр.
— неявная ⟨implicite⟩	I	2	1
— пары ⟨du couple⟩	II	2	1
— рода структуры ⟨d'une espèce de structure⟩	IV	1	4

[1]) Как и во французском оригинале, указатель не охватывает исторических очерков.

Аксиома Цермело ⟨de Zermelo⟩	Рез.	4	10
— экстенсиональности ⟨d'extensionalité⟩	II	1	3
— явная ⟨explicite⟩	I	2	1
Аксиоматический метод ⟨méthode axiomatique⟩	Введение		
Аксиомы противоречивые ⟨axiomes contradictores⟩	Рез.	2	6
— рода структуры ⟨axiomes d'une espèce de structure⟩	IV	1	4
— структур одного и того же рода ⟨des structure de même espèce⟩	Рез.	8	2
— эквивалентные ⟨équivalents⟩	Рез.	8	4
Алгебраическая структура ⟨structure algébrique⟩	IV	1	4
Алеф индекса α ⟨aleph d'indice α⟩	III	6	Упр.
Антецедентные знакосочетания ⟨assemblages antécédents⟩	I	Прил.	4
Антирефлексивное соотношение	Рез.	6	1
Аргумент ⟨argument⟩	Рез.	1	2
Ассоциативность ⟨associativité⟩ объединения и пересечения двух множеств	Рез.	1	14
— объединения семейства множеств	Рез.	4	3
— пересечения семейства множеств	Рез.	4	8
— произведения семейства множеств	Рез.	4	11
Ассоциированная ретракция с некоторой инъекцией ⟨rétraction associeé à une injection⟩	II	3	8
Ассоциированное иссечение с некоторой сюръекцией ⟨section associée à une surjection⟩	II	3	8
— соотношение порядка с некоторым соотношением предпорядка ⟨relation d'ordre associée a une relation de préordre⟩	III	1	2
	Рез.	6	1
— соотношение эквивалентности с некоторой функцией ⟨relation d'équivalence associée à une fonction⟩	II	6	2
База шкалы множеств ⟨base d'une échelle d'ensembles⟩	Рез.	8	1
Базисные множества ⟨ensembles de base⟩	IV	1	3
	IV	1	4
— — вспомогательные ⟨auxiliaires⟩	IV	1	3
	IV	1	4
— — основные ⟨principaux⟩	IV	1	3
	IV	1	4
Беднее ⟨moins riche⟩ [о роде структуры]	IV	1	6
Безграничный в обоих направлениях (*или* с обеих сторон) интервал ⟨intervalle illimité dans les deux sens⟩	III	1	15
	Рез.	6	15
— слева замкнутый (соответственно открытый) интервал ⟨intervalle fermé (resp. ouvert) à gauche⟩	III	1	15
	Рез.	6	4

Безграничный справа замкнутый (соответственно открытый) интервал	III	1	15
	Рез.	6	4
Бесконечная последовательность (suite infinie)	Рез.	7	8
Бесконечное множество (ensemble infini)	III	6	1
Биективное отображение (application bijective)	II	3	7
	Рез.	2	9
Биекция (bijection)	II	3	7
— каноническая (canonique) (см. также Каноническая биекция)	II	5	2
Биномиальный коэффициент с индексами *n* и *p* (coefficient binomial d'indices *n* et *p*)	III	5	8
Богаче (plus riche) [о роде структуры]	IV	1	6
— [о структуре]	Рез.	8	3
Более бедный (moins riche) род структуры	IV	1	6
— богатый (plus riche) род структуры	IV	1	6
— грубая (moins fine) структура	IV	2	2
— грубое (moins fin) покрытие	II	4	6
— — соотношение эквивалентности	II	6	7
— грубый (moins fin) предпорядок	III	1	4
— крупная (moins fine) структура	IV	2	2
— крупное (moins fin) покрытие	II	4	6
— — соотношение эквивалентности	II	6	7
— крупный (moins fin) предпорядок	III	1	4
— мелкая (plus fine) структура	IV	2	2
— мелкий (plus fin) предпорядок	II	1	4
— мелкое (plus fin) покрытие	II	4	6
— — соотношение эквивалентности	II	6	7
— сильная (plus forte) теория	I	2	4
— тонкая (plus fine) структура	IV	2	2
— тонкий (plus fin) предпорядок	III	1	4
— тонкое (plus fin) покрытие	II	4	6
— — соотношение эквивалентности	II	6	7
„Больше" („est plus grand que")	III	1	3
„— или равно" („est au moins égal à")	III	1	3
Буква (lettre)	I	1	1
Верное соотношение (relation vraie)	I	2	2
Верхний ограничитель (majorant)	III	1	8
	Рез.	6	7
Верхняя грань (borne supérieure)	III	1	9
	Рез.	6	7
— — семейства кардинальных чисел	III	2	1
Вес знака (poids de signe)	I	1	3
	I	Прил.	1

Взаимно однозначное (biunivoque) отображение	II	3	7
	Рез.	2	8
	Рез.	2	9
— — соответствие	II	3	7
	Рез.	2	9
Вид (forme)	II	1	6
	Рез.	2	4
Включения соотношение (relation d'inclusion)	II	1	2
	III	1	1
	Рез.	1	12
Влечь (entraîner)	I	1	3
	Рез.	1	3
Внутренний терм (terme intrinsèque)	IV	1	6
	IV	II	4
Возведение в степень (exponentiation)	Рез.	4	9
Возрастающее (croissante) отображение	III	1	5
	Рез.	6	12
— семейство частей	III	1	5
	Рез.	6	12
— фильтрующееся множество	III	1	1
Вполне упорядоченное множество (ensemble bien ordonné)	III	2	1
	Рез.	6	5
Вспомогательная (auxiliaire) гипотеза	I	3	3
— константа	I	3	3
Вспомогательные базисные множества (см. Базисные множества вспомогательные)			
Вторая (seconde) координата (элемент)	II	2	1
	Рез.	3	1
— — (функция)	Рез.	3	1
	Рез.	3	12
— координатная функция (fonction coordonnée)	III	3	6
	Рез.	3	1
— проекция (projection) (множество)	II	3	1
— — (функция)	Рез.	3	1
	Рез.	3	12
— — (элемент)	II	2	1
	Рез.	3	1
	Рез.	3	12
— — графика	II	3	1
	Рез.	3	1
— — пары	II	2	1
	Рез.	3	1
Второй множитель (сомножитель) произведения множеств (second ensemble facteur d'un produit)	II	2	2
Выбора аксиома (axiome de choix)	Рез.	4	10

Выведенная из структуры некоторым способом вывода структур (déduite d'une structure par un procédé de déduction de structures) [о структуре]	IV	1	6
Выведенное (déduite) из некоторого соотношения переходом к фактормножеству (по x) (d'une relation par passage au quotient (par rapport à x; pour x)) [о соотношении]	II	6	3
	Рез.	5	7
— из отображения переходом к фактормножеству по R (déduite d'une application par passage au quotient suivant R) [об отображении]	II	6	5
Вывода структур способ (procédé de déduction de structures)	IV	1	6
Гипотеза континуума (hypothèse du continu)	III	6	4
— — обобщенная (généralisée)	III	6	4
Гипотезы вспомогательной метод (méthode de l'hypothèse auxiliaire)	I	3	3
Гомоморфизм (homomorphisme)	IV	2	1
Грань (borne) верхняя (supérieure) множества	III	1	9
	Рез.	6	7
— — отображения	III	1	9
	Рез.	6	7
— — семейства кардинальных чисел	III	3	2
— нижняя (inférieure) множества	III	1	9
	Рез.	6	7
— — отображения	III	1	9
	Рез.	6	7
График (graphe)	II	3	1
— обратный к данному графику (réciproque d'un graphe)	II	3	2
— отображения	Рез.	3	5
— симметричный (symétrique)	II	3	2
— соответствия	II	3	1
— соотношения	II	3	1
	Рез.	3	2
— функции	Рез.	3	5
— функциональный (fonctionnel)	II	3	4
Грубое (moins fin) [о покрытиях]	II	4	6
— [о предпорядках]	III	1	4
— [о соотношениях эквивалентности]	II	6	7
— [о структурах]	IV	2	2
Группа (groupe)	Рез.	8	2
— компактная (compact)	IV	3	3
— свободная топологическая (topologique libre)	IV	3	3
Двоичная система (système dyadique)	III	5	7
Двойная последовательность (suite double)	III	6	1
	Рез.	7	8

Двойное семейство (famille double)	II	3	4
Двойственности правило (règle de dualité)	Рез.	1	15
	Рез.	4	7
Двойственные формулы (formules duales)	Рез.	1	15
	Рез.	4	7
Двухэлементного множества аксиома (axiome de l'ensemble à deux éléments)	II	1	5
Дедуктивный критерий (critère déductif)	Введение		
	I	2	2
Дедукции критерий (critère de la déduction)	I	3	3
Делитель целого числа (diviseur d'un entier)	III	5	6
Делить: „b делит a" („b divise a")	III	5	6
Делиться на целое число (être divisible par un entier)	III	5	6
Десятичная система (système décimal)	III	5	7
Диагональ (diagonale) A в A × A	II	3	3
	Рез.	3	4
— в E^I	II	5	3
Диагональное отображение (application diagonale)	II	3	7
	Рез.	3	4
— — E в E	II	5	3
Диаграмма (diagramme)	II	3	4
	Рез.	2	2
Дизъюнкция (disjonction) двух соотношений	I	1	3
Дисперсное (dispersé) множество	III	1	Упр.
Дистрибутивное (distributif) сетчатое множество	III	1	Упр.
Дистрибутивность (distributivité) объединения и пересечения двух множеств	Рез.	1	14
— — — — семейства множеств	Рез.	4	3
	Рез.	4	8
Длина (longueur) конечной последовательности	III	5	4
— слова	I	Прил.	1
„Для всякого xR" (pour tout x R)	I	4	1
	Рез.	1	4
Доказательный текст (texte démonstratif)	I	2	2
Доказательство (démonstration)	I	2	2
Доминантное (dominant) кардинальное число	III	6	Упр.
Дополнение множества (complémentaire d'un ensemble)	II	1	7
	Рез.	1	7
Дыры: множество без дыр (ensemble sans trous)	III	1	Упр.
Закон внутренней композиции (loi de composition interne)	IV	1	4
Замкнутый интервал (intervalle fermé)	III	1	15
	Рез.	6	4

Замыкание (fermeture)	III	1	Упр.
Знак (signe)	I	1	1
	I	Прил.	1
— логический (logique)	I	1	1
— реляционный (relationnel)	I	1	3
— специальный (spécifique)	I	1	1
— субстантивный (substantifique)	I	1	3
Знаковое каноническое распространение отображения, соответствующее S	IV	2	Упр.
Знаковый тип ступени (type d'échelon signé)	IV	2	Упр.
— — — ковариантный (covariant)	IV	2	Упр.
— — — контравариантный (contravariant)	IV	2	Упр.
Знакосочетание (assemblage)	I	1	1
— второго рода (de seconde espèce)	I	1	3
— первого рода (de première espèce)	I	1	3
— равновесное (équilibré)	I	Прил.	4
— совершенно равновесное (parfaiment équilibré)	I	Прил.	4
Знакосочетание теории (d'une théorie)	I	1	1
Знакосочетание, антецедентное к другому (assemblages antécédents à un autre)	I	Прил.	4
Знаменательная последовательность (suite significative)	I	Прил.	2
Знаменательное слово (mot significatif)	I	Прил.	2
Значение (valeur) переменной (d'une variable)	Рез.	1	2
— принимаемое соответствием (une valeur d'une correspondance)	II	3	1
— функции (d'une fonction)	II	3	4
	Рез.	2	1
Значений область (ensemble de valeurs)	II	3	1
	I	3	4
	Рез.	1	5
Изоморфизм (isomorphisme) обратный (résiproque)	IV	1	5
— относительно рода структуры множества	IV	1	5
— упорядоченных множеств (d'ensembles ordonné)	III	1	3
— A на B	IV	1	5
Изоморфия	Рез.	8	5
Изоморфные множества (ensembles)	IV	1	5
— структуры (structures)	IV	1	5
	Рез.	8	5
„Или" („ou")	I	1	3
	I	2	0
	Рез.	1	5
Иметь вид (être d'une forme)	Рез.	2	4
Имплицировать (impliquer)	I	1	3
Инвариантный (invariant) терм	IV	Прил.	4

Инвариантный элемент	II	3	4
	Рез.	2	3
Инверсия (inverse) левая (à gauche) данной сюръекции	II	3	8
— правая (à droite) данной инъекции	II	3	8
Инволютивная перестановка (permutation involutive)	II	3	7
	Рез.	2	9
Индексное обозначение (notation indicielle)	Рез.	2	2
Индексов множество (ensemble des indices)	Рез.	2	2
— семейства множество (ensemble des indices d'une famille)	II	3	4
Индуктивная система (système inductif) множеств (d'ensembles) относительно множества индексов	III	1	11
	Рез.	6	13
— — отображений	III	1	11
	Рез.	6	13
Индуктивное множество (ensemble inductive)	III	2	4
	Рез.	6	9
Индуктивный предел семейства множеств для семейства отображений (limite inductive d'une famille d'ensembles pour une famille d'applications)	III	1	11
	Рез.	6	13
— — — отображений	III	1	11
	Рез.	6	13
Индукции (de récurrence) предположение (hypothèse de)	III	2	2
	III	4	3
— принцип (principe)	III	4	3
— трансфинитной (transfinie) принцип (principe)	III	2	2
Индукция (récurrence) начиная с k (à partir de k)	III	4	3
— ограниченная интервалом (limitée à un intervalle)	III	4	3
— спуска (descendante)	III	4	3
Индуцированная структура (structure induite)	IV	2	4
Индуцированное соотношение (relation induite) порядка	III	1	1
	III	1	4
— — эквивалентности	II	6	6
	Рез.	5	5
Индуцированный порядок (ordre induit)	III	1	4
	Рез.	6	1
Интервал (intervalle) безграничный (illimité)	III	1	15
— замкнутый (fermé)	Рез.	6	4
— неограниченный (illimité)	III	1	15
	Рез.	6	4
— открытый (ouvert)	III	1	15
	Рез.	6	4
— полуоткрытый (semi-ouvert)	III	1	15
	Рез.	6	4

Интервал с концом b ⟨d'extrémité b⟩	III	1	5
	Рез.	6	4
— — началом a ⟨d'origine a⟩	III	1	15
	Рез.	6	4
Интранзитивное ⟨intransitive⟩ соотношение	II	6	4
Инъективное отображение ⟨application injective⟩	II	3	7
	Рез.	2	8
Инъекция ⟨injection⟩	II	3	7
	Рез.	2	8
— каноническая ⟨canonique⟩ части множества E в B ⟨d'une partie de E dans E⟩	II	3	7
— ⟨injection⟩ множества для данного соотношения эквивалентности ⟨d'un ensemble pour une relation d'equivalence⟩	II	6	2
Иссечение ⟨section⟩, ассоциированное с данной сюръекцией ⟨associée à une surjection⟩	II	3	8
Истинное соотношение ⟨relation vraie⟩	I	2	2
Истинный ⟨propre⟩ сегмент	I	Прил.	1
Исходные ⟨initiaux⟩ буквы и термы	IV	Прил.	1
Итерация n-я отображения ⟨n-ème itérée d'une application⟩	III	6	2
	Рез.	2	11
„Каково бы ни было x, R" ⟨„pour tout x, R"⟩	I	4	1
	Рез.	1	4
Каноническая биекция ⟨bijection canonique⟩			
$A^{B\times C}$ на $(A^B)^C$	II	5	2
— — $A^{B\times C}$ на $(A^C)^B$	II	5	2
— — $E\times F$ на $F\times E$	Рез.	3	4
— — $E\times F\times G$ на $(E\times F)\times G$	Рез.	3	12
— — F^E на $\mathcal{F}(E, F)$	II	5	2
— — $\mathcal{F}(B\times C, A)$ на $\mathcal{F}(B, \mathcal{F}(C, A))$	II	5	2
— — $\mathcal{F}(B\times C, A)$ на $\mathcal{F}(C, \mathcal{F}(B, A))$	II	5	2
— — G на $\overset{-1}{G}$ [G — график]	II	3	7
— — $\prod_{\iota\in\{\alpha\}} X_\iota$ на X_α	II	5	3
— — $\prod_{\iota\in\{\alpha,\beta\}} X_\iota$ на $X_\alpha\times X_\beta$	II	5	3
— — $\prod_{\iota\in\{\alpha,\beta,\gamma\}} X_\iota$ на $X_\alpha\times X_\beta\times X_\gamma$	II	5	5
— — $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ на $\prod_{\varkappa\in L}\left(\prod_{\iota\in J_\varkappa} X_\iota\right)$	II	5	5
	Рез.	4	11

Каноническая биекция $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ на $\left(\prod_{\iota\in J_\alpha} X_\iota\right)\times\left(\prod_{\iota\in J_\beta} X_\iota\right)$ [(J_α, J_β) — разбиение множества I]	II	5	5
	Рез.	4	11
— — $\prod_{\iota\in I} X_\iota^E$ на $\left(\prod_{\iota\in I} X_\iota\right)^E$	II	5	7
— — $\left(\prod_{\iota\in I} X_\iota\right)^E$ на $\prod_{\iota\in I} X_\iota^E$	Рез.	4	13
— — F^A на $\prod_{\iota\in I} F^{A_\iota}$ $\left[A=\bigcup_{\iota\in I} A_\iota;\ A_\iota\cap A_\varkappa=\varnothing \text{ при } \iota\neq\varkappa\right]$	Рез.	4	15
— — A/R_A на $f\langle A\rangle$	II	6	6
	Рез.	5	5
— — $(E/S)/(R/S)$ на E/R	II	6	7
— — $(E/R)/S$ на E/T	Рез.	5	9
— — $(E/R)/(T/R)$ на E/T	Рез.	5	9
— — $(E\times E')/(R\times R')$ на $(E/R)\times(E'/R')$	II	6	8
— — $(E/R)\times(E'/R')$ на $(E\times E')/(R\times R')$	Рез.	5	10
— инъекция ⟨injection canonique⟩	II	3	7
	Рез.	2	3
— — части в множество	II	3	7
	Рез.	2	3
— симметрия ⟨symétrie canonique⟩	Рез.	3	4
— сюръекция ⟨surjection canonique⟩ E на E/R	II	6	2
	Рез.	5	2
— факторизация ⟨factorisation canonique⟩	Рез.	5	3
Каноническое отображение ⟨application canonique⟩ (см. также Каноническая биекция, Каноническая инъекция)			
— — для родовой структуры ⟨pour une structure générique⟩	IV	Прил.	4
— — E_α в $\varinjlim E_\alpha$	III	1	11
	Рез.	6	13
— — $\varprojlim E_\alpha$ в E_α	III	1	12
	Рез.	6	14
— разложение ⟨décomposition canonique⟩ функции	II	6	5
	Рез.	5	3
— распространение ⟨extension canonique⟩ двух функций на произведения множеств ⟨de deux fonctions aux ensembles produit⟩	II	3	9
— — знаковое ⟨signée⟩	IV	2	Упр.
— — отображений по схеме S ⟨de schéma S, des applications⟩	IV	1	2

Каноническое отображение семейства функций на произведения (d'une famille de fonctions aux ensembles produits)	II	5	7
— — соответствия на множества частей (d'une correspondance aux ensembles de parties)	II	5	
— соответствие (correspondance canonique) между F^A и $\prod_{\iota\in I} F^{A_\iota}$ $\left[A=\bigcup_{\iota\in I} A_\iota;\ A_\iota\cap A_\varkappa=\varnothing \text{ при } \iota\neq\varkappa\right]$	Рез.	4	15
— — — $f(A)$ и A/R_A	Рез.	5	5
— — — (E/R)/S и E/T	Рез.	5	9
— — — (E/R)/(T/R) и E/T	Рез.	5	9
— — (для родовой структуры)	IV	Прил.	4
Кантора теорема (théorème de Cantor)	III	3	6
Кардинальная сумма (somme cardinale)	III	3	3
Кардинальное произведение (produit)	III	3	3
— число (cardinal)	III	3	1
	Рез.	7	2
— — доминантное (dominant)	III	6	Упр.
— — конечное (fini)	III	4	1
— — недостижимое (inaccessible)	III	6	Упр.
— — регулярное (régulier)	III	6	Упр.
— — сильно недостижимое (fortement inaccesible)	III	6	Упр.
— — сингулярное (singulier)	III	6	Упр.
— — множества	III	3	1
	Рез.	7	2
Квантор (quantificateur) общности (universel)	I	4	1
— существования (existentiel)	I	4	1
— типовый (typique)	I	4	4
Кванторная теория (théorie quantifiée)	I	4	2
Класс объектов, эквивалентных x (согласно соотношению R) (la classe d'objets équivalents à x (pour la relation R))	II	6	9
— эквивалентности по соотношению (classe d'équivalence suivant une relation)	II	6	2
	Рез.	5	2
Ковариантный (covariant) знаковый тип ступени	IV	2	Упр.
Когерентное (cohérente) семейство	III	6	Упр.
Коинициальная часть (partie coinitiale)	III	1	7
	Рез.	6	5
Коллективизирующее соотношение (relation collectivisante)	II	1	4
Кольцо (anneau)	Рез.	8	2
Коммутативная (commutatif) диаграмма	III	1	11
Компактное расширение Стоуна — Чеха (compactifié de Stone — Čech)	IV	3	3
Компактная группа, ассоциированная с E (groupe compact associée à E)	IV	3	3
Композиции внутренний закон (loi de composition interne)	IV	1	4
Композиция графиков G′ и G (composé de G′ et de G)	II	3	3
— множеств B и A (composé de B et A)	Рез.	3	10
— — C, B, A (composé de C, B, A)	Рез.	3	10
— отображений (composée des applications)	II	3	7
— — g и f (composée de g et f)	Рез.	2	11
— — h, g, f (composée de h, g, f)	Рез.	2	11
— прямая (composée direct)	IV	3	Упр.
Конец (extrémité) интервала	III	1	11
Конечная последовательность (suite finie)	III	5	4
	Рез.	7	8
— — элементов некоторого множества (d'éléments d'un ensemble)	III	5	4
Конечного характера множество (ensemble de caractère fini)	III	4	5
	Рез.	6	11
— — свойство (propriété de caractère fini)	III	4	5
Конечное (fini) кардинальное число	III	4	1
— множество	III	4	1
— объединение	Рез.	7	9
— семейство	III	4	1
— пересечение	Рез.	7	9
— произведение	Рез.	7	9
Константа теории (constante d'une théorie)	I	2	1
Константы вспомогательной метод (méthode de la constante auxiliaire)	I	3	3
Конструкция (construction) логическая (logique)	I	Прил.	Упр.
— ступени (d'échelon) над $E_1, \ldots, E_n$ по схеме S (de schéma S, sur $E_1, \ldots, E_n$)	IV	1	1
— формативная (formative)	I	1	3
Континуума (du continu) гипотеза	III	6	4
— — обобщенная	III	6	4
— мощность	III	6	4
Контравариантный знаковый тип ступени	IV	2	Упр.
Конфинальная часть (partie cofinal)	III	1	7
	Рез.	6	5
Концевой сегмент (segment final) слова	I	Прил.	1
Конъюнкция (conjonction) двух соотношений	I	3	4

Координата ⟨coordonnée⟩ [функция]	Рез.	3	1
	Рез.	3	12
	Рез.	4	11
— [элемент]	II	2	1
— вторая (см. Вторая координата)	II	5	3
— индекса λ ⟨d'indice λ⟩	II	5	3
	Рез.	4	11
— пары	II	2	1
	Рез.	3	1
— первая (см. Первая координата)			
Координатная функция ⟨fonction coordonnée⟩ вторая	II	3	6
	Рез.	3	1
— — индекса λ ⟨d'indice λ⟩	II	5	3
	Рез.	4	11
— — первая	II	3	6
Кортеж ⟨multiplet⟩	II	2	2
Коэффициент биномиальный с индексами n и p ⟨coefficient binomial d'indices n et p⟩	III	5	8
Кратная последовательность ⟨suite multiple⟩	III	6	1
Кратное (для) целого числа ⟨multiple d'un entier⟩	III	5	6
	Введение		
Критерий ⟨critère⟩ дедуктивный ⟨déductif⟩	I	2	2
— дедукции ⟨de la déduction⟩	I	3	3
— подстановки ⟨de substitution⟩	I	1	2
— формативный ⟨formatif⟩	I	1	4
Критическое для f ⟨critique pour f⟩ ординальное число	III	6	Упр.
Крупнее ⟨moins fin⟩			
— [о покрытиях]	II	4	6
— [о предпорядках]	III	1	4
— [о соотношениях эквивалентности]	II	6	7
— [о структурах]	IV	2	2
Левая инверсия ⟨inverse à gauche⟩	II	3	8
Лексикографический порядок ⟨ordre lexicographique⟩	III	2	6
Лексикографическое произведение ⟨produit lexicographique⟩ множества E на множество I ⟨de E par I⟩	III	2	Упр.
— — семейства множеств	III	2	6
Лемма ⟨lemme⟩	I	2	2
Линейно упорядоченное множество	Рез.	6	4
Линейный порядок	Рез.	6	4
Логическая конструкция ⟨construction logique⟩	I	Прил.	Упр.
— теория ⟨théorie⟩	I	3	1
Логически ⟨logiquement⟩ неприводимое ⟨irréductible⟩ соотношение	I	Прил.	Упр.
— построенное ⟨construite⟩ соотношение	I	Прил.	Упр.

Логические составляющие ⟨composante logique⟩	I	Прил.	Упр.
Логический знак ⟨signe logique⟩	I	1	1
Ложное соотношение ⟨relation fausse⟩	I	2	2
Мажоранта ⟨majorant⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— строгая ⟨strict⟩	III	2	4
Мажорированная часть ⟨partie majorée⟩	III	1	8
Мажорировать часть X ⟨majorer une partie X⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
„Мажорирует мощность $\mathfrak{a}$" ⟨„est supérieure à $\mathfrak{a}$"⟩	Рез.	7	3
„Мажорирует элемент x" ⟨„est supérieure à x"⟩	III	1	3
	Рез.	6	7
Максимальный элемент ⟨élément maximal⟩	III	1	6
	Рез.	6	6
Максимум ⟨maximum⟩	Рез.	6	5
Математическая теория ⟨théorie mathématique⟩	I	1	1
	I	2	1
	I	2	2
Мельче ⟨plus fin⟩ [о покрытиях]	II	4	6
— [о предпорядках]	III	1	4
— [о соотношениях эквивалентности]	II	6	7
— [о структурах]	IV	2	2
„Меньше" ⟨„est plus petit que"⟩ *или* ⟨„est inferieur à"⟩	III	1	3
„Меньше или равен" ⟨„est au plus égal à"⟩	III	1	3
Метаматематика ⟨métamathématique⟩	Введение		
Метод ⟨methode⟩ аксиоматический	Введение		
— вспомогательной гипотезы			
— — константы			
— приведения к абсурду			
— разделения случаев	I	3	3
Минимальности условие ⟨condition minimale⟩	III	6	Упр.
Минимальный элемент ⟨élément minimal⟩	III	1	6
	Рез.	6	6
Минимум ⟨minimum⟩	Рез.	6	5
Миноранта ⟨minorant⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
Минорированная часть ⟨partie minorée⟩	III	1	8
Минорировать часть X ⟨minorer une partie X⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
„Минорирует мощность $\mathfrak{b}$" ⟨„est inférieure à $\mathfrak{b}$"⟩	Рез.	3	7
— элемент y ⟨est inférieur à y⟩	III	1	3
	Рез.	6	3
Многозначная теория ⟨théorie multivalente⟩	Рез.	8	7
Многообразие Альбанезе ⟨variété d'Albanese⟩	IV	3	3
Множеств теория ⟨théorie des ensembles⟩	II	1	1

Множества ⟨ensembles⟩ базисные ⟨de base⟩ вспомогательные ⟨auxiliaires⟩	IV	1	3
	IV	1	4
— — основные ⟨principaux⟩	IV	1	3
	IV	1	4
— из которых никакие две не имеют общих элементов ⟨deux à deux sans élément commun⟩	Рез.	4	4
— изоморфные ⟨isomprphes⟩	IV	1	5
— наделенные некоторой структурой ⟨munis d'une structure⟩	IV	1	4
— не имеющие общих элементов ⟨sans elément commun⟩	II	4	7
— непересекающиеся ⟨disjoints⟩	II	4	7
— попарно непересекающиеся ⟨mutuellement disjoints⟩	II	4	7
	Рез.	4	4
— пересекающиеся ⟨qui se rencontrent⟩	II	4	7
— равномощные ⟨équipotents⟩	III	3	1
	Рез.	7	1
Множество ⟨ensemble⟩ (см. также Часть)	II	1	1
	Рез.	1	1
— без дыр ⟨sans trous⟩	III	1	Упр.
— бесконечное ⟨infini⟩	III	6	1
— вполне упорядоченное ⟨bien ordonné⟩	III	2	1
	Рез.	6	5
— единственный элемент которого есть x ⟨dont de seul élément est x⟩	II	1	5
— значений, принимаемых f на X ⟨des valeurs prises par f sur X⟩	Рез.	2	4
— из n элементов ⟨à n éléments⟩	III	4	1
— индексов ⟨des indices⟩	II	3	4
— индуктивное ⟨inductif⟩	III	2	4
	Рез.	6	9
— кардинальных чисел $\leqslant \mathfrak{a}$ ⟨des cardinaux $\leqslant \mathfrak{a}$⟩	III	3	2
— классов эквивалентных объектов для соотношения R ⟨des classes d'objets èquinvalents suivant R⟩	II	6	9
— конечного характера ⟨de caractère fini⟩	III	4	5
	Рез.	6	11
— конечное ⟨fini⟩	III	4	1
— линейно упорядоченное	0	0	0
— мажорированное ⟨majoré⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— минорированное ⟨minoré⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— мощностей ⟨des puissances⟩ частей множества	Рез.	7	2
— направленное	Рез.	6	8
— не более чем счетное	Рез.	7	7

Множество объектов вида T для $x \in A$ ⟨des objets d'une forme T pour $x \in A$⟩	II	1	6
— ограниченное ⟨borné⟩	III	1	8
— — сверху ⟨majoré⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— — снизу ⟨minoré⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— открытое в некоторой топологии ⟨ouvert pour une topologie⟩	IV	1	4
— отображений ⟨des applications⟩ E в F	II	5	2
	Рез.	2	2
— параметров ⟨des paramètres⟩ параметрического представления	II	3	7
	Рез.	2	14
— подмножеств ⟨des parties⟩	II	5	1
	Рез.	1	10
— представляющее ⟨représentatif⟩ соотношения по (относительно) x и y ⟨d'une relation par rapport á x et y⟩	II	3	1
— предупорядоченное предпорядком Г ⟨ensemble préordonné par un ordre Г⟩	III	1	3
— пустое ⟨vide⟩	II	1	7
	Рез.	1	8
— равномощное другому множеству ⟨équipotent à un autre ensemble⟩	Рез.	7	I
— разве что счетное	Рез.	7	7
— сводящееся к единственному элементу ⟨rèduit à une seul élément⟩	II	1	5
— сетчатое ⟨réticulé⟩	III	1	13
	Рез.	6	8
— скомпонованное из B и A ⟨composé de B et A⟩	Рез.	3	10
— совершенно упорядоченное ⟨totalement ordonné⟩	III	1	14
	Рез.	6	4
— составленное из B и A ⟨composé de B et A⟩	Рез.	3	10
— состоящее из единственного элемента x ⟨dont le seul élément est x⟩	II	1	5
— счетное ⟨dénombrable⟩	III	6	4
	Рез.	7	7
— универсальное ⟨universel⟩	IV	3	1
— упорядоченное ⟨ordonné⟩	III	1	3
	IV	1	4
	Рез.	6	1
	Рез.	6	4
	Рез.	8	2
— — порядком Г ⟨par un ordre Г⟩	III	1	3
— — соотношением порядка ω ⟨par une relation d'ordre ω⟩	Рез.	6	1
— фильтрующееся ⟨filtrant⟩ влево ⟨à gauche⟩	III	1	10
	Рез.	6	8

Множество фильтрующееся возрастающее (croissant)	III	1	10
— — вправо (à droite)	III	1	10
	Рез.	6	8
— — по соотношению $\leqslant$ (соответственно $\subset$, $\supset$) (pour la relation $\leqslant$ (resp. $\subset$, $\supset$))	III	1	10
— — убывающее (décroissant)	III	1	10
— частей (des parties)	II	5	1
	Рез.	1	10
— — конечного характера (de caractère fini)	III	4	5
— частично вполне упорядоченное (partiellement bien ordonné)	III	2	Упр.
— — упорядоченное	Рез.	6	1
— элементов семейства (des éléments d'une famille)	II	3	1
	Рез.	2	14
— x, таких, что R (des x tels que R)	II	1	4
— $x \in$ A, таких, что P (des $x \in$ A tels que P)	II	1	6
Множитель (facteur)	II	5	3
— индекса ι в произведении (d'indice ι d'un produit)	II	5	3
— произведения (ensemble facteur d'un produit)	II	2	2
	II	5	3
	Рез.	3	1
Модель теории (modèle d'une théorie)	I	2	4
Монотонное отображение (application monotone)	III	1	5
Морфизм (morphisme)	IV	2	1
	IV	2	2
Мощностей множество	Рез.	7	2
— сумма	Рез.	7	5
Мощности эквивалентные (puissances équivalentes)	Рез.	7	2
Мощность (puissance)	III	3	1
	Рез.	7	2
— континуума (du continu)	III	6	4
— „мажорирует“ („est supérieure à“)	Рез.	7	3
— „минорирует“ („est inférieure á“)	Рез.	7	3
— множества	III	3	1
— „превышает“ („est supérueure à“)	Рез.	7	3
— „строго мажорирует“ („est strictement supérieure à“)	Рез.	7	3
— „строго минорирует“ („est strictement inférieure à“)	Рез.	7	3
— „строго превышает“ („est strictement supérieure à“)	Рез.	7	3
— части	Рез.	7	2
Наделять структурой (munir d'une structure)	IV	1	4
Наибольший элемент (le plus grand élément) множества	III	1	7
— — — части	Рез.	6	5
Наименьший элемент (le plus petit élément) множества	III	1	7
— — — части	Рез.	6	5
Накрытие универсальное (revêtement universel)	IV	3	3

Направленное множество	Рез.	6	4
Насыщенная часть (partie saturée)	II	6	4
	Рез.	5	6
Насыщение (saturation)	II	6	4
	Рез.	5	6
Натуральное целое число (entier naturel)	III	4	1
Начало (origine) интервала	III	1	15
Начальная структура (structure initiale)	IV	2	3
Начальное (initiale) ординальное число	III	6	Упр.
Начальный сегмент слова	I	Прил.	1
„Не“ („non“)	I	1	3
— более чем счетное множество	Рез.	7	7
Не зависеть (ne dependre pas) от аргумента	II	3	9
— пересекаться (être disjoints)	II	4	7
Недостижимое (inaccessible) кардинальное число	III	6	Упр.
— ординальное число	III	6	Упр.
Независимая (independent) аксиома	I	2	Упр.
Неограниченный интервал	Рез.	6	4
Неподвижный (invariant) элемент	II	3	4
	Рез.	2	3
Непрерывное (continue) отображение	IV	2	1
Неприводимый (irreductible) элемент	III	4	Упр.
„Не равно“ („différent de“)	I	5	1
	Рез.	1	6
Нестрогий, нестрого [о порядке, частичном порядке и т. п.]	Рез.	6	1
	Рез.	6	4
Нечетное целое число (entier impair)	III	5	6
Неявная аксиома (axiome implicite)	I	2	1
Нижележащая структура (structure sous-jacente)	IV	1	6
Нижний ограничитель (minorant)	III	1	8
	Рез.	6	7
Нижняя грань (borne inférieur)	III	1	9
	Рез.	6	7
Нормальный символ (symbole normal)	III	2	Упр.
Обладать графиком (admettre un graphe) (по буквам или относительно букв) (par rapport aux lettres)	II	3	1
Область (ensemble) значений (des valeurs) графика	II	3	1
— — соответствия	II	2	1
— определения (de définition) графика	II	3	1
— — соответствия	II	3	1
— отправления (de départ) соответствия	II	3	1
— прибытия (d'arrivée) соответствия	II	3	1
Обобщенная гипотеза континуума (hypothèse de continu généralisée)	III	6	4
Обозначение индексное (notation indicielle)	Рез.	2	2

Образ ⟨image⟩ множества ⟨d'un ensemble⟩ относительно (по, при) ⟨par⟩ графика II 3 1
Образ множества относительно отображения Рез. 2 4
— — — — — соответствия II 3 1
— объекта ⟨d'un objet⟩ относительно (по, при) ⟨par⟩ функции II 3 4
— покрытия ⟨d'un recouverement⟩ относительно (по, при) ⟨par⟩ функции II 4 6
— прямой ⟨directe⟩ некоторой структуры ⟨d'une structure⟩ IV 2 6
— функции ⟨d'une fonction⟩ [вольность речи] Рез. 2 4
— элемента ⟨d'un élément⟩ относительно (по, при) ⟨par⟩ отображения Рез. 2 4
Образовывать изоморфизм ⟨constituer un isomorphisme⟩ Рез. 8 5
Обратное ⟨réciproque⟩ отображение II 3 7; Рез. 2 9
— распространение ⟨extension⟩ Рез. 2 6
— соответствие ⟨correspondance⟩ II 3 2
Обратный ⟨réciproque⟩ график II 3 2
— изоморфизм IV 1 5
Общая структура ⟨structure générique⟩ IV 1 4
Общее решение ⟨solution générale⟩ I 5 2
Общий член ⟨terme général⟩ последовательности Рез. 7 8
— элемент ⟨élément générique⟩ Рез. 1 2
Общности квантор ⟨quantificateur universel⟩ I 4 1
Объединение ⟨réunion⟩ конечное ⟨finie⟩ Рез. 7 9
— множества множеств II 4 1; Рез. 4 2
— нескольких множеств II 4 5
— — частей Рез. 1 13
— семейства II 4 1; Рез. 4 2
— — частей II 4 1
— счетное ⟨dénombrable⟩ Рез. 7 9
Объект ⟨objet⟩ I 1 3
Объекты вида T ⟨objets d'une forme T⟩ II 1 6
— математические ⟨êtres mathématiques⟩ Введение; II 1 1
Ограниченная индукция ⟨récurrence limitée⟩ III 4 3
— сверху часть ⟨partie majorée⟩ III 1 8; Рез. 6 7
— снизу часть ⟨partie minorée⟩ III 1 8; Рез. 6 7
— часть ⟨partie bornée⟩ III 1 8; Рез. 6 7
Ограниченное отображение ⟨application bornée⟩ III 1 8; Рез. 6 7

Ограниченное сверху отображение ⟨application majorée⟩ III 1 8; Рез. 6 7
Ограниченное снизу отображение ⟨application minorée⟩ III 1 8; Рез. 6 7
Ограничитель верхний ⟨majorant⟩ III 1 8; Рез. 6 7
— нижний ⟨minorant⟩ III 1 8; Рез. 6 7
Однозначная теория ⟨théorie univalente⟩ Рез. 8 7
Однозначное соотношение ⟨relation univoque⟩ I 5 3
Однозначный род структуры ⟨espèce de structure univalente⟩ IV 1 5; I 1 1
Определение ⟨définition⟩ 0 0 0
Определения область ⟨ensemble de définition⟩ графика II 3 1
— — соответствия II 3 1
„Определенная на E" ⟨„définie dans (*ou* sur) E"⟩ [о функции] Рез. 2 1
„Определено для объекта x" ⟨„est définie pour l'objet x"⟩ [о соответствии] II 3 1
Определяемое соотношением соответствие ⟨correspondance définie par une rélation⟩ II 3 1
Определяться соотношением ⟨être déterminee par une relation⟩ [о функции] Рез. 2 1
— частью ⟨être definie par une partie⟩ [об отображении] Рез. 3 6
Ординальная сумма ⟨somme ordinale⟩ порядковых типов III 2 Упр.
— — упорядоченных множеств III 1 Упр.
Ординальное произведение ⟨produit ordinal⟩ III 2 Упр.
— число ⟨ordinal⟩ III 2 Упр.
— — критическое для f ⟨critique pour f⟩ III 6 Упр.
— — начальное ⟨initial⟩ III 6 Упр.
— — недостижимое ⟨inaccessible⟩ III 6 Упр.
— — неразложимое ⟨indécomposable⟩ III 2 Упр.
— — регулярное ⟨régulier⟩ III 6 Упр.
— — сингулярное ⟨singulier⟩ III 6 Упр.
Ординальный функциональный символ (по ξ) ⟨symbole fonctionnel ordinal (par rapport à ξ)⟩ III 2 Упр.
— — — — нормальный ⟨normal⟩ III 2 Упр.
Основание ⟨base⟩ разложения ⟨d'un développement⟩ III 5 7
— системы счисления ⟨d'un système de numération⟩ III 5 7
Основные базисные множества ⟨ensembles de base principaux⟩ IV 1 3; IV 1 4
Остаток от деления числа a на b ⟨reste de la division de a par b⟩ III 5 6
Осуществлять взаимно однозначное соответствие между E и F ⟨réaliser une correspondance biunivoque entre E et F⟩ Рез. 2 9

Отделять ⟨séparer⟩	IV	3	2
Открытое ⟨ouvert⟩ множество	IV	1	4
— отображение	IV	2	1
Отличаться только порядком членов ⟨ne différer que par l'ordre des termes⟩	III	6	1
	Рез.	7	8
„Отлично от" („different de")	I	5	2
	Рез.	1	6
Относительно переносимые ⟨relativement transportables⟩ соотношения и термы	IV	Прил.	4
Отображение ⟨application⟩	II	3	4
	Рез.	2	1
— биективное ⟨bijective⟩	II	3	7
	Рез.	2	9
— взаимно однозначное ⟨biunivoque⟩	II	3	7
	Рез.	2	8
— — — в ⟨dans⟩	Рез.	2	8
— — — на ⟨sur⟩	Рез.	2	9
— возрастающее ⟨croissante⟩	III	1	5
	Рез.	6	12
— выведенное из некоторого отображения переходом к фактормножествам ⟨déduite d'une application par passage aux quotients⟩	II	6	5
	Рез.	5	8
— диагональное ⟨diagonale⟩ A в A×A	II	3	7
	Рез.	3	4
— — E в E^J	II	5	3
— инъективное ⟨injective⟩	II	3	7
	Рез.	2	8
— каноническое ⟨canonique⟩ (см. Каноническое отображение)			
— — для родовой структуры ⟨pour une structure générique⟩	IV	Прил.	4
— множества ⟨d'un ensemble⟩ в множество ⟨dans un ensemble⟩	II	3	1
	Рез.	2	1
— — на множество ⟨sur un ensemble⟩	II	3	7
	Рез.	2	4
— монотонное ⟨monotone⟩	III	1	5
— непрерывное ⟨continue⟩	IV	2	1
— обратное к некоторой биекции ⟨réciproque d'une bijection⟩	II	3	7
	Рез.	2	9
— ограниченное ⟨bornée⟩	III	1	8
	Рез.	6	7

Отображение ограниченное сверху ⟨majorée⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— — снизу ⟨minorée⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— открытое ⟨ouverte⟩	IV	2	1
— парциальное ⟨partielle⟩	II	3	9
	Рез.	3	13
— постоянное ⟨constante⟩	II	3	4
	Рез.	2	3
— пустое ⟨vide⟩	II	3	4
— скомпонованное из ⟨composée de⟩	Рез.	2	11
— совместимое ⟨compatible⟩ с двумя соотношениями эквивалентности ⟨avec deux relations d'équivalence⟩	II	6	5
	Рез.	5	8
— — с соотношением эквивалентности ⟨avec une relation d'équivalence⟩	II	6	5
— составленное из ⟨composé de⟩	Рез.	2	11
— строго ⟨strictement⟩ возрастающее ⟨croissante⟩	III	1	5
	Рез.	6	12
— сходящееся	III	6	Упр.
— — монотонное ⟨monotone⟩	III	1	5
— — убывающее ⟨décroissante⟩	III	1	5
	Рез.	6	12
— сюръективное ⟨surjective⟩	II	3	7
	Рез.	2	4
— тождественное ⟨identique⟩	II	3	4
	Рез.	2	3
— убывающее ⟨decroissante⟩	III	1	5
	Рез.	6	12
— универсальное ⟨universelle⟩	IV	3	1
— частичное	Рез.	3	13
— частное ⟨partielle⟩	II	3	9
	Рез.	3	13
Отображения, совпадающие на некотором множестве ⟨applications coincidant dans un ensemble⟩	II	3	5
Отождествление ⟨identification⟩	IV	Прил.	5
	Рез.	8	5
Отождествлять ⟨identifier⟩	Рез.	8	5
— посредством ⟨au moyen de⟩ изоморфизма	IV	Прил.	5
— — канонической биекции	IV	Прил.	5
Отправления область ⟨ensemble de départ⟩	II	3	1
Отрезок ⟨segment⟩	III	2	1
— отсеченный элементом x ⟨d'extrémité x⟩	III	2	1
Отрицание соотношения ⟨négation d'une relation⟩	I	1	3

Пара ⟨couple⟩	II	2	1
Параметр ⟨paramètre⟩	II	3	7
Параметрическое представление посредством множества (или через множество) ⟨représentation paramétrique au moyen d'un ensemble⟩	Рез.	2	14
	II	3	7
	Рез.	2	14
Параметров множество ⟨ensemble des paramètres⟩	II	3	7
	Рез.	2	14
Парциальная функция ⟨fonction partielle⟩	Рез.	2	13
Парциальное отображение, задаваемое функцией f при данном значении данного аргумента ⟨application partielle déterminée par f, relative à une valeur d'un argument⟩	II	3	9
— — порожденное функцией f и соответствующее данным значениям данных аргументов ⟨application partielle engendrée par f, et correspondant à des valeurs d'argument⟩	Рез.	1	13
Пары аксиома ⟨axiome du couple⟩	II	2	1
Первая ⟨première⟩ координата ⟨coordonnée⟩ [функция]	Рез.	3	1
	Рез.	3	12
— — [элемент]	II	2	1
	Рез.	3	1
— координатная функция ⟨fonction coordonnée⟩	III	3	6
	Рез.	3	1
— проекция ⟨projection⟩ [множество]	II	3	1
	Рез.	3	1
— — [функция]	Рез.	3	1
	Рез.	3	12
— — [элемент]	II	2	1
	Рез.	3	1
— — графика	II	3	1
	Рез.	3	1
— — пары	II	2	1
	Рез.	3	1
Первый ⟨premier⟩ множитель (или сомножитель) произведения множеств ⟨ensemble facteur d'un produit⟩	II	2	2
— член последовательности	III	5	4
Переменная ⟨variable⟩	Рез.	1	2
Перенос структуры ⟨transport d'une structure⟩	IV	1	5
	Рез.	8	5
Переноса соотношение ⟨relation de transport⟩	IV	Прил.	1
Переносимое соотношение ⟨relation transportable⟩	IV	1	3
Переносимый терм ⟨terme transportable⟩ данного типа для данной типизации ⟨d'un type pour une typification⟩	IV	0	1
— — типа S относительно Σ для типизации „T_0 и T“ ⟨de type S relativement a pour la typification „T_0 et T“⟩	IV	Прил.	4

Пересекаться ⟨se rencontrer⟩	II	4	7
	Рез.	1	13
Пересечение ⟨intersection⟩ конечное ⟨finie⟩	Рез.	7	9
— множества множеств	II	4	1
— нескольких множеств	II	4	5
— — частей	Рез.	1	13
— семейства	II	4	1
	Рез.	4	6
— — частей ⟨de parties⟩	II	4	1
— счетное ⟨dénombrable⟩	Рез.	7	9
Перестановка ⟨permutation⟩	II	3	7
	Рез.	2	9
— инволютивная ⟨involutive⟩	II	3	7
Переход к фактормножествам ⟨passage aux ensembles quotients⟩	II	6	3
	II	6	5
	Рез.	5	7
	Рез.	5	8
Подмножество ⟨sous-ensemble⟩ (см. также Часть)	II	1	2
	Рез.	1	7
Подпоследовательность последовательности ⟨suite extraite d'une suite⟩	III	6	1
	Рез.	7	8
Подсемейство ⟨sous-famille⟩	II	3	5
	Рез.	2	14
Подсетчатая ⟨coréticulée⟩ часть	III	4	Упр.
Подстановки критерий ⟨critère de substitution⟩	I	1	2
Подчиненная структура ⟨structure subordonnée⟩	IV	1	6
Покрытие ⟨recouvrement⟩	II	4	6
— более грубое (крупное) ⟨moins fin⟩	II	4	6
— — мелкое (тонкое) ⟨plus fin⟩	II	4	6
— множества ⟨d'un ensemble⟩	II	4	6
	Рез.	4	4
Поле дробей кольца ⟨corps des fractions d'un anneau⟩	IV	3	3
Полная ⟨pleine⟩ часть ⟨partie⟩	II	1	2
	Рез.	1	8
Полное решение ⟨solution⟩	I	5	2
Полное ⟨achevé⟩ сетчатое множество	III	1	Упр.
Полный ⟨bon⟩ порядок	III	2	1
Полный прообраз ⟨image réciproque⟩ множества ⟨d'un ensemble⟩ относительно (по, при) данного графика ⟨par un graphe⟩	II	3	2
— — — — — — — отображения	Рез.	2	6
— — — — — — — соответствия	II	3	2
Полный прообраз покрытия ⟨d'un recouvrement⟩ относительно (по, при) функции	II	4	6

Полный прообраз соотношения эквивалентности (d'une relation d'équivalence) относительно (по, при) функции	II	6	6
Положительные целые числа (entiers positifs)	Рез.	6	2
	Рез.	7	6
Полуоткрытый слева интервал (intervalle semi-ouvert à gauche)	III	1	14
	Рез.	6	4
— справа интервал	III	1	15
	Рез.	6	4
Получать переносом (obtenir en transportant) [о структурах]	IV	1	5
	Рез.	8	5
Попарно не пересекающихся множеств семейство (famille d'ensembles mutuellement disjoints) или (famille d'ensembles deux à deux disjoints)	II	4	7
	Рез.	4	4
— — частей семейство (famille de parties mutuellement disjointes)	Рез.	4	4
Пополнение (complété) пространства	IV	3	3
— (achèvement) упорядоченного множества	III	1	Упр.
Порядка (d'ordre) соотношение (relation d')	III	1	1
	Рез.	6	1
— структура	Рез.	6	1
	III	1	1
Порядковый тип (type d'ordre)	II	2	Упр.
Порядок (ordre)	Рез.	6	1
	Рез.	6	4
— индуцированный (induit)	III	1	4
	Рез.	6	1
— лексикографический (lexicographique)	III	2	6
— линейный	Рез.	6	1
— на (sur) множестве	III	1	1
	Рез.	6	1
	Рез.	6	4
— полный (bon)	III	2	1
— совершенный (total)	III	1	14
	Рез.	6	4
— частичный (partielle)	Рез.	6	1
Последний член конечной последовательности (dernier terme d'une suite finie)	III	5	4
Последовательности, отличающиеся только порядком членов (suites ne différant que par l'ordre des termes)	III	6	1
	Рез.	7	8
Последовательность (suite)	III	6	1
— бесконечная (infinie)	Рез.	7	8
— двойная (double)	III	6	1
	Рез.	7	8

Последовательность конечная (finie)	III	5	4
	Рез.	7	8
— — элементов некоторого множества (d'éléments d'un ensemble)	III	5	4
— кратная (multiple)	III	6	1
— полученная расположением семейства в порядке, определенном отображением f (obtenue en rangeant une famille dans un ordre défini par une application f)	III	6	1
	Рез.	7	8
— с двумя индексами (à deux indices)	Рез.	7	8
— стационарная (stationnaire)	III	6	5
— тройная (triple)	III	6	1
	Рез.	7	8
— элементов некоторого множества (d'éléments d'un ensemble)	III	6	1
— n-кратная (n-uple)	III	6	1
Постоянное отображение (application constante)	II	3	4
	Рез.	2	3
Почти периодическая (presque périodique) функция	IV	3	3
Правая инверсия (inverse à droite)	II	3	8
Правило двойственности (règle de dualité)	Рез.	1	15
	Рез.	4	7
„Превышает“ („est supérieur à“)	III	1	3
	Рез.	6	3
	Рез.	7	3
Предел (limite) индуктивный (inductive) семейства множеств	III	1	11
	Рез.	6	13
— — — отображений	III	1	11
	Рез.	6	13
— проективный (projective) семейства множеств	III	1	12
	Рез.	6	14
— — — отображений	III	1	12
	Рез.	6	14
Предложение (proposition)	I	2	2
Предмет (objet)	I	1	3
Предположение индукции (hypothèse de récurrence)	III	2	2
	III	4	3
	II	1	1
Предпорядка соотношение (relation de préordre)	III	1	2
	Рез.	6	1
Предпорядок (préordre)	III	1	2
— более грубый (крупный) (moins fin)	III	1	4
— — мелкий (тонкий) (plus fin)	III	1	4
— на (sur) множестве	III	1	2
Представителей система (système de réprésentants)	II	6	2

Представитель класса эквивалентности (représentant d'une classe d'équivalence)	II	6	2
Представление (réprésentation)	IV	2	1
— параметрическое (réprésentation paramétrique)	II	3	7
	Рез.	2	14
Представляться в виде T (se mettre sous une forme T)	I	5	2
Представляющее множество (ensemble réprésentitif)	II	3	1
Предупорядоченное множество (ensemble préordonné)	III	1	3
Предшественник (prédécesseur)	III	6	Упр.
Преобразование одного множества в другое (transformation d'un ensemble en un autre)	Рез.	2	4
Преобразовывать (transformer)	II	3	4
	Рез.	2	4
Прибытия область (ensemble d'arrivée)	II	3	1
Приведения к абсурду метод (méthode de réduction à l'absurde)	I	3	3
Приводить A и B во взаимно однозначное соответствие (mettre A et B en correspondance biunivoque)	II	3	7
	Рез.	2	9
Придавать в качестве значения определенный элемент произвольному элементу (donner pour valeur un élément déterminé à un élément arbitraire)	Рез.	1	2
Прилагать (или применять) к теории (appliquer dans une théorie)	I	2	4
„Принадлежит (к)" („appartient à")	II	1	1
	Рез.	1	7
Принадлежности соотношение (relation d'appartenance)	II	1	1
	Рез.	1	10
Принимать значения в множестве (prendre ses valeurs dans un ensemble) [о функции]	Рез.	2	1
Принцип (principe) индукции (de récurrence)	III	4	3
— пастухов (des bergers)	III	5	8
— трансфинитной индукции (de récurrence transfinie)	III	2	2
Присоединение (adjonction) к множеству E множества F	Рез.	4	5
— наибольшего элемента к упорядоченному множеству (d'un plus grand élément à un ensemble ordonné)	III	1	7
Пробегать множество (parcourir un ensemble)	Рез.	2	1
Продолжение (prolongement) соотношения порядка	III	1	4
— отображения на множество (d'une application à un ensemble)	II	3	5
	Рез.	2	13
— порядка (d'un ordre)	III	1	4
	Рез.	6	1
Проективная система множеств (système projectif d'ensemble) относительно множества индексов (rélatif à un ensemble d'indice)	III	1	12
	Рез.	6	14
— — отображений	III	1	12
	Рез.	6	14

Проективный предел семейства множеств для семейства отображений (limite projective d'une famille d'ensembles pour une famille d'applications)	III	1	12
	Рез.	6	14
— — — отображений	III	1	12
	Рез.	6	14
Проектирование (projéction) на множитель (sur un ensemble facteur)	II	5	3
	Рез.	4	11
— на частичное произведение (sur un produit partiel)	II	5	4
	Рез.	4	11
— по индексу α (projéction d'undice α)	II	5	3
	Рез.	4	11
— — — J	II	5	4
	Рез.	4	11
Проекция (projection) [множество]	II	3	1
— [отображение]	Рез.	3	1
	Рез.	3	12
	Рез.	4	11
— [элемент]	II	2	1
— вторая (см. Вторая проекция)			
— графика	II	3	1
	Рез.	3	1
— индекса ι (d'indice ι)	II	5	3
— индекса (1, 2) (d'indice (1, 2))	Рез.	3	12
— пары	II	2	1
	Рез.	3	1
— первая (см. Первая проекция)			
Произведение (produit) кардинальное (cardinal)	III	3	3
— кардинальных чисел (de cardinaux)	III	3	3
— конечное (fini)	Рез.	7	9
— лексикографическое (lexicographique) множества E на множество I (de E par I)	III	2	Упр.
— множеств	II	2	2
	Рез.	3	1
	Рез.	3	12
— семейства множеств	III	2	6
— — X и Y (de X et de Y)	II	2	2
Произведение (ensemble produit) множеств	Рез.	3	1
	Рез.	3	12
— множества E на множество F (de E par F)	Рез.	3	1
Произведение (produit) ординальное (ordinal)	III	2	Упр.
— покрытий	II	4	6
Произведение порядков (ordre produit)	III	1	4
Произведение (produit) свободное (libre)	IV	3	Упр.
— семейства множеств (d'une famille d'ensemble)	II	5	3
— (ensemble produit) семейства множеств	Рез.	4	9

Произведение (produit) семейства отображений	II	5	7
— соотношений порядка	III	1	4
— — эквивалентности	II	6	8
— — R и R′ (de R et R)	Рез.	5	10
	II	6	8
— соотношения R на соотношение S (de R par S)	Рез.	5	10
Произведение структур (structure produit des structures)	IV	2	4
Произведение (produit) счетное (dénombrable)	Рез.	7	9
— тензорное (tensorielle)	IV	3	3
— упорядоченных множеств (d'ensembles ordonnés)	III	1	4
— частичное (partiel)	II	5	4
Противоположное соотношение порядка (relation d'ordre opposée)	III	1	1
	Рез.	6	1
Противоречивая теория (théorie contradictoire)	I	2	2
Противоречивые аксиомы (axiomes contradictoires)	Рез.	8	6
Прямая (direct) композиция (composé)	IV	3	Упр.
— сумма (somme)	IV	3	Упр.
Прямой образ (image directe) структуры	IV	2	6
Пустая (vide) функция	II	3	4
— часть	Рез.	1	8
Пустое (vide) множество	II	1	7
Равенства соотношение (relation d'égalité)	I	5	1
	Рез.	1	6
„Равно“ („égale“)	I	5	1
	Рез.	1	6
Равновесное знакосочетание (assemblage equilibré)	I	Прил.	4
— слово (mot equilibré)	I	Прил.	2
Равномерное пространство (espace uniforme)	Рез.	8	2
Равномощные множества (ensembles équipotents)	III	3	1
	Рез.	7	1
Равносильные (équivalentes) соотношения	Рез.	1	3
— теории	I	2	4
„Равняется“ („égal“)	I	5	1
	Рез.	1	6
Разбиение множества (partition d'un ensemble)	II	4	7
	Рез.	4	4
Разве что счетное множество	Рез.	7	7
Разделения случаев метод (méthode de disjonction des cas)	I	3	3
Разложение (décomposition) каноническое функции (canonique d'une fonction)	II	6	5
	Рез.	5	4
Разложение (développement) по основанию *b* (de base *b*)	III	5	7
	III	5	2

Разность целых чисел *b* и *a* (différence des entiers *b* et *a*)	III	5	2
Располагать в некотором порядке (ranger dans un ordre)	III	6	1
	Рез.	7	8
Распространение (extension) двух функций на произведения множеств (de deux fonctions aux ensembles produits)	II	3	9
— каноническое (см. Каноническое распространение)			
— нескольких отображений на произведения множеств (de plusieurs applications aux ensembles produits)	Рез.	3	14
— обратное (réciproque) отображения	Рез.	2	6
— отображения на множества подмножеств (d'une application aux ensembles de parties)	Рез.	4	4
	I	1	3
— семейства функций на произведения (d'une famille de fonctions aux ensembles produits)	II	5	7
— соответствия на множества частей (d'une correspondance aux ensembles de parties)	II	5	1
Рассеянное (dispersé) множество	III	1	Упр.
Расходящееся (divergente) отображение	III	6	Упр.
Расширение до A кольца операторов (extension à A d'un anneau d'opérateurs)	IV	3	3
Реализация (realisation) на (sur) $E_1, \ldots, E_n$ знакового типа ступени	IV	2	Упр.
— — $E_1, \ldots, E_n$ типа ступени T	IV	1	Упр.
Реализовать взаимно однозначное соответствие между E и F (réaliser une correspondance biunivoque entre E et F)	Рез.	2	9
Регулярное (régulier) кардинальное число	III	6	Упр.
— ординальное число	III	6	Упр.
Реляционный знак (signe relationnel)	0	0	0
Ретракция (rétraction), ассоциированная с данной инъекцией (associée à une injection)	II	0	
Рефлексивное в данном множестве соотношение (relation réflexive dans un ensemble)	II	6	1
— соотношение	Рез.	5	1
Рефлексивность (réflexivité) соотношения	Рез.	5	1
Решение (solution) общее (générale)	I	5	2
— полное (complète)	I	5	2
— проблемы универсального отображения для E (d'un problème d'application universelle pour E)	IV	3	1
— соотношения (d'une relation)	I	2	2
Решетка (lattice)	III	1	13
	Рез.	6	8
Род структуры (espèce de structure)	IV	1	4
	Рез.	8	2
— — абелевой группы (de groupe abélien)	IV	1	7
— — беднее, чем другой (moins riche qu'une autre)	IV	1	6

Род структуры богаче, чем другой ⟨plus riche q'une autre⟩	IV	1	6
— — комплексного аналитического многообразия размерности n ⟨de variéte analytique complexe de dimension n⟩	IV	1	4
— — левого векторного пространства над k ⟨d'espace vectoriel à gauche sur k⟩	IV	1	4
— — множества ⟨d'ensemble⟩	IV	1	4
— — однозначный ⟨univalente⟩	IV	1	5
— — порядка ⟨d'ordre⟩	IV	1	4
— — топологической ⟨topologique⟩	IV	1	4
— — унитарного $\mathbf{Z}$-модуля ⟨de $\mathbf{Z}$-module unitaire⟩	IV	1	7
Родовая структура ⟨structure générique⟩	IV	1	4
Роды структуры, эквивалентные через посредство P и Q ⟨espèces de structure équivalentes par l'intermediaire de P et Q⟩	IV	1	7
Ростки отображений ⟨germes d'applications⟩	III	1	11
Свободная топологическая группа, порожденная пространством ⟨groupe topologique libre engendré par un espace⟩	IV	3	3
— часть ⟨partie libre⟩	III	1	Упр.
Свободное ⟨libre⟩ произведение ⟨produit⟩	IV	3	Упр.
— Σ-множество, порожденное множеством E ⟨Σ-ensemble engendré par E⟩	IV	3	2
Сводящаяся к единственному элементу часть ⟨partie réduite à un seul élément⟩	Рез.	1	9
Сводящееся к единственному элементу множество ⟨eusemble rèduite a un seul élément⟩	I	1	5
Свойство ⟨propriété⟩	I	1	1
— конечного характера ⟨propriété de caractére fini⟩	III	4	5
Связные компоненты множества E относительно соотношения R ⟨composantes connexes de E pour la relation R⟩	II	6	Упр.
Связь ⟨lien⟩	I	1	1
Сегмент ⟨segment⟩	I	Прил.	1
	I	Прил.	4
— знакосочетания	I	Прил.	4
— истинный ⟨propre⟩	I	Прил.	1
— концевой ⟨final⟩	I	Прил.	1
— начальный ⟨initial⟩	I	Прил.	1
— слова	I	Прил.	1
Сегменты непересекающиеся ⟨segment disjoints⟩	I	Прил.	1
Семейство ⟨famille⟩	II	3	4
— двойное ⟨double⟩	II	3	4
— когерентное ⟨cohérente⟩	III	6	Упр.

Семейство конечное ⟨finie⟩	III	4	1
— множеств ⟨famille d'ensembles⟩	III	4	1
— попарно не пересекающихся множеств ⟨d'ensembles deux à deux disjoints⟩ или ⟨d'ensembles mutuellement disjoints⟩	II	4	7
	Рез.	4	4
— частей ⟨des parties⟩	II	4	1
— — возрастающее ⟨croissante⟩	III	1	5
	Рез.	6	12
— — множества ⟨d'un ensemble⟩	II	3	4
— — убывающее ⟨décroissante⟩	III	1	5
	Рез.	6	12
— элементов некоторого множества ⟨d'éléments d'un ensemble⟩	II	3	4
	Рез.	2	14
Сетчатое множество ⟨ensemble réticulé⟩	III	1	13
	Рез.	6	8
Сеть упорядоченная ⟨réseau ordonné⟩	III	1	13
	Рез.	6	8
Сильнее ⟨plus forte⟩ [о теории]	I	2	4
Сильно ⟨fortement⟩ недостижимое ⟨inaccessible⟩ кардинальное число	III	6	Упр.
— связанная ⟨liée⟩ часть	III	4	Упр.
Символ сокращающий ⟨symbole abréviateur⟩	Введение		
	I	1	1
Символ ⟨symbole⟩ функциональный в $\mathcal{T}$ ⟨fonctionnel dans $\mathcal{T}$⟩	I	5	3
— ординальный	III	2	Упр.
— числовой ⟨numérique⟩	III	5	7
Симметрическое ⟨symétrique⟩ соотношение	II	6	1
Симметричная часть ⟨partie symétrique⟩	Рез.	3	4
Симметричное соотношение ⟨relation symétrique⟩	II	6	1
Симметричный график ⟨graphe symétrique⟩	II	3	2
Симметричность ⟨symétrie⟩ соотношения	Рез.	5	1
Симметрия каноническая ⟨symétrie canonique⟩	Рез.	3	4
Сингулярное ⟨singulier⟩ кардинальное число	III	6	Упр.
— ординальное число	III	6	Упр.
Система ⟨système⟩ двоичная ⟨dyadique⟩	III	5	7
— десятичная ⟨décimal⟩	III	5	7
— индуктивная ⟨inductif⟩ (множеств)	III	1	11
	Рез.	6	13
— — (отображений)	III	1	11
	Рез.	6	13
— представителей ⟨de réprésentants⟩	II	6	2
— проективная ⟨projectif⟩ (множеств)	III	1	12

	Рез.	6	14
Система проективная (отображений)	III	1	12
	Рез.	6	14
— счисления по основанию *b* ⟨de numération de base *b*⟩	III	5	7
Скомпонованное ⟨composé⟩ множество	Рез.	3	10
— отображение	Рез.	2	11
Слабо совместимое (по *x* и *y*) с данным соотношением порядка ⟨faiblement compatible (en *x* et *y*) avec une relation d'ordre⟩ соотношение	III	1	Упр.
След ⟨trace⟩ (от) множества ⟨d'un ensemble⟩	II	4	5
— — некоторого множества частей ⟨d'un ensemble de parties⟩	Рез.	1	16
— семейства множеств ⟨d'une famille d'ensembles⟩	II	4	5
— части ⟨d'une partie⟩	Рез.	1	16
Следствие ⟨corollaire⟩	I	2	2
Слово ⟨mot⟩	I	Прил.	1
— знаменательное ⟨significatif⟩	I	Прил.	2
— пустое ⟨vide⟩	I	Прил.	1
— равновесное ⟨équilbré⟩	I	Прил.	3
Сложная функция, скомпонованная (*или* составленная) из ⟨fonction composé de⟩	Рез.	2	11
Совершенно равновесное знакосочетание ⟨assemblage parfaitement équilibrée⟩	I	Прил.	4
Совершенно упорядоченная часть ⟨partie totalement ordonnée⟩	Рез.	6	4
— упорядоченное множество ⟨ensemble totalement ordonné⟩	III	1	14
	Рез.	6	4
Совершенный порядок ⟨ordre total⟩	III	1	14
	Рез.	6	4
Совместимое с соотношением эквивалентности ⟨avec une relation d'équivalence⟩ отображение	II	6	5
— ⟨compatible⟩ с соотношением эквивалентности ⟨avec une relation d'équivalence⟩ соотношение ⟨relation⟩	II	6	5
	Рез.	5	7
— с соотношениями эквивалентности ⟨avec une relation d'équivalence⟩ отображение	II	6	5
	Рез.	5	8
— — — — соотношение	II	6	8
Совпадать на множестве ⟨coincider dans un ensemble⟩	II	3	5
	Рез.	2	13
Согласоваться [о соотношениях]	Рез.	5	7
	Рез.	5	8
Содержать ⟨contenir⟩	II	1	2
	Рез.	1	12

„Содержится в" ⟨„est contenu dans"⟩	II	1	2
	Рез.	1	12
Сокращающий символ ⟨symbole abréviateur⟩	Введение		
Сомножитель ⟨facteur⟩ или ⟨ensemble facteur⟩ (см. Множитель)	I	1	1
— индекса ι в произведении ⟨facteur d'indice ι d'un produit⟩	II	5	3
Соответствие ⟨correspondance⟩ взаимно однозначное ⟨biunivoque⟩, установленное между множествами	II	3	7
— каноническое ⟨canonique⟩ (см. Каноническое соответствие)	Рез.	2	9
— — для родовой структуры ⟨pour structure générique⟩	IV	Прил.	4
— между двумя множествами ⟨entre deux ensembles⟩	II	3	1
— обратное к данному соответствию ⟨réciproque d'une correspondance⟩	II	3	2
— „определено для предмета *x*" ⟨„est définie pour l'objet *x*"⟩	II	3	1
— определяемое соотношением ⟨„est définie par une relation"⟩	II	3	1
— тождественное ⟨correspondance identique⟩	III	3	3
Соответствовать ⟨correspondre⟩ по (посредством, относительно) ⟨par⟩ графику ⟨un graphe⟩	II	3	1
— при (согласно соответствию, по, посредством, в силу) соответствии	II	3	1
Соотношение ⟨relation⟩	I	1	3
	Рез.	1	1
— антирефлексивное	Рез.	6	1
— верное ⟨vraie⟩	I	2	2
— включения ⟨d'inclusion⟩	II	1	2
	III	1	1
— — X в Y ⟨de X dans Y⟩	Рез.	1	12
— выведенное из данного соотношения переходом к фактормножеству (по *x*) ⟨definie d'une relation par passage au quotients (par rapport à *x* *или* pour *x*)⟩	II	6	3
	Рез.	5	7
— истинное ⟨vraie⟩	I	2	2
— коллективизирующее ⟨collectivisante⟩	II	1	4
— лексикографического порядка ⟨d'ordre lexicographique⟩	III	2	6
— логически ⟨logiquement⟩ неприводимое ⟨irréductible⟩	I	Прил.	Упр.
— — построенное ⟨construite⟩	I	Прил.	Упр.
— ложное ⟨fausse⟩	I	2	2
— между элементом множества A и элементом множества B ⟨entre un élément de A et un élément de B⟩	II	3	1
— обладающее графиком ⟨admettant un graphe⟩	II	3	1

Соотношение однозначное по x в $\mathcal{T}$ (univoque en x dans $\mathcal{T}$)	I	5	3
— относительно переносимое (relativement transportable)	IV	Прил.	5
— — x (en x)	I	2	2
— переноса для типизации (de transport par une typification)	IV	2	1
— переносимое (transportable) для типизации (par une typification)	IV	Прил.	1
— — относительно Σ (relativement à Σ) для типизации „T_0 и T"	IV	Прил.	4
— по x (en x)	I	2	2
— полного порядка (de bon ordre)	III	2	1
— порядка (d'ordre)	III	1	1
	Рез.	6	1
— — ассоциированное (associée à) с данным соотношением предпорядка	III	1	2
	Рез.	6	1
— — в множестве (dans un ensemble)	III	1	1
	Рез.	6	1
— — индуцированное (induite) в (dans *или* sur) множестве	III	1	1
	III	1	4
— — лексикографическое (lexicographique)	III	2	6
— — между x и y (entre x et y)	III	1	1
— — относительно x и y (par rapport à x et y)	III	1	1
— — по x и y (par rapport à x et y)	III	1	1
— — противоположное к данному соотношению порядка (opposée à une relation d'ordre)	III	1	1
	Рез.	6	1
— — совершенного (tôtal)	III	1	14
— предпорядка (de préordre)	III	1	2
	Рез.	6	1
— — в (dans) некотором множестве	III	1	2
	Рез.	6	1
— принадлежности (d'appartenance)	II	1	1
	Рез.	1	10
— равенства (d'égalité)	I	5	1
	Рез.	1	6
— рефлексивное (réflexive)	Рез.	5	1
— — в данном множестве по x и y (reflexive dans un ensemble par rapport à x et y)	II	6	1
— симметрическое или симметричное (symétrique)	II	6	1
	Рез.	3	4

Соотношение совершенного порядка (d'ordre total)	III	1	14
— совместимое (compatible) с двумя соотношениями эквивалентности (avec deux relations d'équivalence) по x и x' (par rapport à x et x')	II	6	8
— — с соотношением эквивалентности (compatible avec une relation d'équivalence) по x (par rapport à x)	II	6	3
— — — — — по x (en x)	Рез.	5	7
— справедливое (vraie)	I	2	2
— транзитивное (transitive)	II	6	1
	Рез.	5	1
— функциональное по x (fonctionnelle en x)	Рез.	2	1
— — — — в (dans) данной теории	I	5	3
— эквивалентности (d'équilvalence)	II	6	1
— — ассоциированное с функцией (associée à une fonction)	II	6	2
— — более грубое (крупное) (moins fine)	II	6	7
— — — мелкое (тонкое) (plus fine)	II	6	7
— — в множестве (dans un ensemble)	II	6	1
	Рез.	5	2
— — индуцированное в множестве соотношением (induite par une rélation dans un ensemble)	II	6	6
— — по (относительно) x и y (par rapport à x et y)	II	6	1
— $\leqslant$ (соответственно $\geqslant$)	III	1	3
— $\subset$	III	1	1
Соотношений эквивалентности произведение (produit de relation d'équivalence)	II	6	8
Соотношения (relations) равносильные (équivalentes)	Рез.	1	3
— эквивалентные (équivalentes)	I	3	5
	Рез.	1	3
Составлять (constituer) способ вывода структуры	IV	1	6
Составное отображение, скомпонованное (или составленное) из (application composée de)	Рез.	2	11
Состоящая из единственного элемента часть (partie réduite a un seul élément)	Рез.	1	9
Состоящее из единственного элемента x множество (ensemble dont le seul élément est x)	II	1	5
Специальный знак (signe spécifique)	I	1	1
Способ вывода (procédé de déduction) структуры poda Θ из структуры рода Σ (d'une structure d'espèce Θ à partir d'une structure d'espèce Σ)	IV	1	6
Справедливое соотношение (relation vraie)	I	2	2
Спуска индукция (récurrence descendante)	III	4	3
Сравнимые (comparables) структуры (structures)	IV	2	2
Сравнимые элементы (éléments)	III	1	14
Срез (coupe) графика	II	3	1
	Рез.	3	7

Срез по x ⟨suivant x⟩	II	3	1
	Рез.	3	7
— соответствия	II	3	1
— части произведения	Рез.	3	7
Ставиться во взаимно однозначное соответствие отображениями ⟨être mis en correspondance biunivoque par des applications⟩	Рез.	2	9
Стационарная последовательность ⟨suite stationnaire⟩	III	6	5
Степень разделения покрытия ⟨degré de disjonction d'un recouvrement⟩	III	6	Упр.
Строгая мажоранта ⟨majorant strict⟩	III	2	4
Строгий, строго [о порядке, частичном порядке и т. п.]	Рез.	6	1
	Рез.	6	4
„Строго больше" ⟨„est strictement plus grand"⟩	III	1	3
Строго ⟨strictement⟩ возрастающее ⟨croissante⟩ отображение	III	1	5
	Рез.	6	12
— — семейство частей	III	1	5
— грубое ⟨moins fine⟩	IV	2	2
— крупнее ⟨moins fine⟩	IV	2	2
„Строго мажорирует" ⟨„est strictement supérieur à"⟩	II	1	3
	Рез.	6	3
	Рез.	7	3
Строго мельче ⟨plus fine⟩	IV	2	2
„Строго меньше" ⟨„est strictement plus petit"⟩	III	1	3
	IV	2	2
„Строго минорирует" ⟨„est strictement inférieur à"⟩	III	1	3
	Рез.	6	3
	Рез.	7	3
Строго ⟨strictement⟩ монотонное ⟨monotone⟩ отображение	III	1	5
— положительные ⟨positifs⟩ целые числа	Рез.	6	2
„Строго превышает" ⟨„est strictement supérieur à"⟩	II	1	3
	Рез.	6	3
	Рез.	7	3
Строго ⟨strictement⟩ тоньше ⟨plis fine⟩	IV	2	2
— убывающее ⟨décroissante⟩ отображение	III	1	5
	Рез.	6	12
— — семейство частей	III	1	5
Структура ⟨lattice⟩	Рез.	6	8
Структура ⟨structure⟩ алгебраическая ⟨algébrique⟩	IV	1	4
— богаче, чем другая ⟨plus riche qu'une autre⟩	Рез.	8	3
— более богатая ⟨plus riche⟩	Рез.	8	3
— — грубая ⟨moins fine⟩	IV	2	2
— — крупная ⟨moins fine⟩	IV	2	2
— — мелкая ⟨plus fine⟩	IV	2	2
— — тонкая ⟨plus fine⟩	IV	2	2

Структура, выведенная способом вывода структур ⟨déduite par un procédé de déduction de structures⟩	IV	1	8
— индуцированная на части структурой ⟨induite par une structure dans une partie⟩	IV	2	4
— крупнее ⟨moins fine⟩	IV	2	2
— „лежит ниже, чем s" ⟨„est sous-jacente à s"⟩	IV	1	6
— мельче ⟨plus fine⟩	IV	2	2
— множества ⟨d'ensemble⟩	IV	1	4
— на базисных множествах ⟨sur les ensembles de base⟩	IV	1	4
— — множествах ⟨sur des ensembles⟩	IV	1	4
— — множестве ⟨sur un ensemble⟩	Рез.	8	2
— начальная для семейства ⟨initiale pour une famille⟩	IV	2	3
— нижележащая ⟨sous-jacente⟩	IV	1	6
— общая ⟨générique⟩	IV	1	4
— подчиненная ⟨subordonnée⟩	IV	1	6
— порядка ⟨d'ordre⟩	Рез.	6	1
— рода Σ ⟨d'espèce Σ⟩	IV	1	4
— — T ⟨d'espèce T⟩ (T — множество)	Рез.	8	2
— родовая ⟨générique⟩	IV	1	4
— строго ⟨strictement⟩ грубее ⟨moins fine⟩	IV	2	2
— — — крупнее ⟨moins fine⟩	IV	2	2
— — мельче ⟨plus fine⟩	IV	2	2
— — тоньше ⟨plus fine⟩	IV	2	2
— упорядоченного множества ⟨d'ensemble ordonne⟩	Рез.	6	1
	Рез.	8	2
— финальная для семейства ⟨finale pour une famille⟩	IV	2	5
Структура-произведение ⟨structure produit⟩	IV	2	4
Структуры ⟨structures⟩ в изоморфии ⟨en isomorphie⟩	Рез.	8	5
— изоморфные ⟨isomorphes⟩	IV	1	5
	Рез.	8	5
— сравнимые ⟨comparables⟩	IV	2	2
Ступень над базисными множествами, построенная по схеме S, или ступень схемы S над базисными множествами ⟨échelon de shéma S sur les ensembles de base⟩	IV	1	1
	IV	1	1
Субстантивный знак ⟨signe substantifique⟩	I	1	3
Сужение функции на часть ⟨restriction d'une fonction à une partie⟩	II	3	5
	Рез.	2	13
Сумма ⟨somme⟩ кардинальная ⟨cardinale⟩	III	3	3
— кардинальных чисел ⟨de cardinaux⟩	III	3	3
— мощностей	Рез.	7	5
— ординальная ⟨ordinale⟩ порядковых типов	III	2	Упр.
— — упорядоченных множеств	III	1	Упр.
— положительных целых чисел	Рез.	7	6
— прямая ⟨directe⟩	IV	3	Упр.

Сумма семейства множеств II 4 8; Рез. 4 5
Суперпозиция отображений Рез. 2 11
Существования квантор (quantificateur existentiel) I 4 1
„Существует единственное x, такое, что R" („il existe un x et un seul tel que R") I 5 3
„— и единственно x, такое, что R" („il existe un x et un seul tel que R") I 5 3
„— самое большее одно x, такое, что R" („il existe au plus un x tel que R") I 5 3
„— такое x, что R" („il existe un x tel que R") I 4 1; Рез. 1 4
Схема (schéma) I 2 1
— конструкции ступени (de construction d'échelon) над n термами (sur n termes) IV 1 1
— отбора и объединения (de sélection et réunion) II 1 6
Схемы аксиом (schémas d'axiomes) I 2 1
Счетное (dénombrable) множество (ensemble) III 6 4; Рез. 7 7
— объединение, пересечение, произведение (réunion, intersection, produit) Рез. 7 9
Счисления система (système de numération) III 5 7
Сюръективное отображение (application surjective) II 3 7; Рез. 2 4
Сюръекция (surjection) II 3 7; Рез. 2 4
— каноническая (canonique) (см. Каноническая сюръекция)
Текст доказательный (texte démonstratif) I 2 2
— формализованный (texte formalisé) Введение
Тело (corps) Рез. 8 2
Тензорное произведение (produit tensoriel) IV 3 3
Теорема (théorème) I 2 2
— Кантора (de Cantor) III 3 6
— узаконения (de légitimation) I 3 3
— Цермело (de Zermelo) III 2 3; Рез. 6 5
— Цорна (de Zorn) Рез. 6 10
Теории равносильные (équivalentes) I 2 4
— эквивалентные (équivalentes) I 2 4
Теория (théorie) I 1 1; I 2 1; I 2 2; I 3 1; I 4 3; I 5 2; II 1 1
— более сильная (plus forte) I 2 4

Теория кванторная (quantifiée) I 4 2
— логическая (logique) I 3 1
— математическая (mathématique) I 1 1; I 2 1; I 2 2
— многозначная (multivalente) Рез. 8 7
— множеств (des ensembles) II 1 1
— однозначная (univalente) Рез. 8 7
— противоречивая (contradictoire) I 2 2
— рода структуры (d'une espèce de structure) IV 1 4
— сильнее (plus forte) I 2 4
— структур рода T (des structures d'espèce T) Рез. 8 2
— эгалитарная (égalitaire) I 5 1
Терм (terme) I 1 3
— внутренний для S (intrinsèque pour S) IV 1 6; IV Прил. 4
— данного типа для данной типизации (d'un type pour une typification) IV 0 1
— инвариантный (invariant) IV Прил. 4
— относительно переносимый (relativement transportable) IV Прил. 4
— переносимый (transportable) IV II 1
— представимый в виде T (se mettant sous la forme T) I 5 2
— (terme), удовлетворяющий данному соотношению (vérifiant une relation) I 2 2
Тип порядковый (type d'ordre) III 2 Упр.
— ступени (type d'échelon) знаковый (signé) IV 2 Упр.
— — над $x_1, \ldots, x_n$ (sur $x_1, \ldots, x_n$) IV 1 Упр.
Типизация (typification) IV 1 3
Ти́повая характеристика рода структуры (caractérisation typique de l'espése de structure) IV 1 4
Ти́повый квантор (quantificateur typique) I 4 4
Тождественное отображение (identique) II 3 4; Рез. 2 3
— соответствие II 3 3
Тождество (identité) Рез. 1 3
Тоньше (plus fin) [о покрытиях] II 4 6
— [о предпорядках] III 1 4
— [о соотношениях эквивалентности] II 6 7
— [о структурах] IV 2 2
Топологическое пространство (espace topologique) Рез. 8 2
Топология (topologie) IV 1 4
Транзитивное соотношение (relation transitive) II 6 1; Рез. 5 1

Транзитивность ⟨transitivité⟩ соотношения	Рез.	5	1
Трансфинитной индукции принцип ⟨principe de récurrence transfinie⟩	III	2	2
Трансформат ⟨transformé⟩ части ⟨d'une partie⟩ по (относительно, при) ⟨par⟩ функции	Рез.	2	4
— элемента ⟨d' un élément⟩ по (относительно, при) ⟨par⟩ функции	II	3	4
Тройка ⟨triplet⟩	II	2	2
Тройная последовательность ⟨suite triple⟩	III	6	1
Убывающее ⟨décroissante⟩ отображение ⟨application⟩	III	1	5
	Рез.	6	8
— семейство частей ⟨famille de parties⟩	III	1	5
	Рез.	6	12
— фильтрующееся множество ⟨ensemble filtrant decroissant⟩	III	1	10
Удовлетворять соотношению ⟨verifier une relation⟩	I	2	2
Удовлетворять условию минимальности ⟨satisfaire à la condition minimale⟩	III	6	Упр.
Узаконения теорема ⟨theorème de légitimation⟩	I	3	3
Универсальное ⟨universel⟩ множество ⟨ensemble⟩	IV	3	1
— накрытие ⟨revêtement⟩	IV	3	3
— отображение ⟨application⟩	IV	3	1
Упорядоченная сеть ⟨réseau ordonné⟩	III	1	13
	Рез.	6	8
Упорядоченного множества структура ⟨structure d'ensemble ordonné⟩	Рез.	6	1
	Рез.	8	2
Упорядоченное множество ⟨ensemble ordonné⟩	III	1	3
	IV	1	4
	Рез.	6	1
	Рез.	6	4
	Рез.	8	2
— фактормножество ⟨ensemble ordonné quotient⟩	III	1	Упр.
Уравнение ⟨equation⟩	I	5	2
Условие минимальности ⟨condition minimale⟩	III	6	Упр.
Устанавливать взаимно однозначное соответствие между A и B ⟨mettre A et B en correspondance biunivoque⟩	II	3	7
Устойчивая часть ⟨partie stable⟩	Рез.	2	4
Утверждение ⟨assertion⟩	I	1	3
Факториал: „n факториал“ ⟨„factorielle n“⟩	III	5	8
Факторизация ⟨factorisation⟩	Рез.	5	7
	Рез.	5	8
— отображения	Рез.	2	11
— — каноническая	Рез.	5	3

Фактормножество ⟨ensemble quotient⟩ множества по соотношению ⟨d'un ensemble par une relation⟩	II	6	2
	Рез.	5	2
Факторсоотношение ⟨relation quotient⟩ по соотношению эквивалентности	II	6	7
	III	1	Упр.
— соотношения порядка по соотношению эквивалентности ⟨d'une relation d'ordre par une relation d'équivalence⟩	III	1	Упр.
— — P по Q ⟨de P par Q⟩	II	6	7
	Рез.	5	9
Факторструктура ⟨structure quotient⟩ структуры по соотношению ⟨d'une structure par une rélation⟩	IV	2	6
Фильтрующееся ⟨filtrant⟩ влево ⟨à gauche⟩ множество	III	1	10
	Рез.	6	8
— возрастающее ⟨croissant⟩ множество	III	1	10
— вправо ⟨à droite⟩ множество	III	1	10
	Рез.	6	8
— по соотношению $\subset$ (соответственно $\supset$) ⟨pour la relation $\subset$ (resp. $\supset$)⟩	III	1	10
— убывающее ⟨décroissant⟩ множество	III	1	10
Финальная структура ⟨structure finale⟩	IV	2	5
Финальный характер множества ⟨caractère final d'un ensemble⟩	III	6	Упр.
Формализованный текст ⟨texte formalisé⟩	Введение		
Формативная конструкция ⟨construction formative⟩	I	1	3
Формативный критерий ⟨critère formatif⟩	I	1	4
Функции, совпадающие на множестве ⟨fonctions coincident dans un ensemble⟩	II	3	5
	Рез.	2	13
Функциональное соотношение ⟨relation fonctionnelle⟩	I	5	3
	Рез.	2	1
Функциональный ⟨fonctionnel⟩ график	II	3	4
— символ	I	5	3
— — ординальный	III	2	Упр.
Функция ⟨fonction⟩ (см. также Отображение)	II	3	4
	Рез.	2	1
— двух аргументов ⟨de deux arguments⟩	II	3	9
— координатная ⟨coordonnée⟩	II	3	6
	II	5	3
	Рез.	3	1
	Рез.	4	11
— не зависящая от x ⟨ne dépendant pas de x⟩	II	3	9
— несколько аргументов ⟨de plusieurs arguments⟩	Рез.	3	13
— одного аргумента ⟨d'un argument⟩ (см. Отображение)			
— определенная на A со значениями в B ⟨définie dans A, à valeurs dans B⟩	II	3	4

Функция, определенная на E ⟨définie dans (ou sur) E⟩	II	3	4
	Рез.	2	1
— — функциональным соотношением ⟨déterminée par une relation fonctionnel⟩	Рез.	2	1
— почти периодическая на E ⟨presque périodique dans E⟩	IV	3	3
— принимает значения в ⟨prend ses valeurs dans⟩	II	3	4
	Рез.	2	1
— характеристическая ⟨caractéristique⟩	III	5	5
Характер финальный множества ⟨caractère final d'un ensemble⟩	III	6	Упр.
Характера конечного ⟨de caractère fini⟩ множество подмножеств	III	4	5
	Рез.	6	11
— — свойство	III	4	5
Характеристика типовая рода структуры ⟨caractérisation typique d'une espèce de structure⟩	IV	1	4
Характеристическая функция ⟨fonction caractéristique⟩	III	5	5
Целая часть частного от деления a на b ⟨partie entiere du quotient de a par b⟩	III	4	1
Целое число ⟨entier⟩	III	4	1
— — натуральное ⟨naturel⟩	III	4	1
— — положительное ⟨positif⟩	Рез.	6	2
— — строго положительное ⟨strictement positif⟩	Рез.	6	2
Цена ⟨variance⟩	IV	2	Упр.
Цепь ⟨chaîne⟩ элемента a для функции f ⟨de a pour une fonction f⟩	III	2	Упр.
Цермело ⟨Zermelo⟩ аксиома ⟨axiome de⟩	Рез.	4	9
— теорема ⟨théorème de⟩	III	2	3
	Рез.	6	5
Цифра ⟨chifre⟩	III	5	7
Цорна теорема ⟨théorème de Zorn⟩	III	2	4
	Рез.	6	10
Частей множество ⟨ensemble des parties⟩	II	5	1
	Рез.	1	10
Части ⟨parties⟩ непересекающиеся ⟨disjointes⟩	Рез.	1	13
— пересекающиеся ⟨qui se rencontrent⟩	Рез.	1	13
Частичная функция	Рез.	3	13
Частично вполне упорядоченное множество ⟨ensemble partiellement bien ordonné⟩	III	2	Упр.
— упорядоченное множество	Рез.	6	1
Частичное отображение	Рез.	3	13
— произведение ⟨produit partiel⟩	II	5	4
Частичный порядок	Рез.	6	1

Частная ⟨partielle⟩ производная ⟨dérivée⟩	Рез.	3	13
— функция ⟨fonction⟩, порожденная функцией f ⟨engendrée par f⟩	Рез.	3	13
Частное от деления a на b ⟨quotient de a par b⟩	III	5	6
— отображение ⟨application partielle⟩	II	3	9
— — задаваемое функцией f при данном значении аргумента a ⟨diterminée par f, relative à une valeur d'un argument a⟩	II	3	9
— — порожденное функцией f и соответствующее данным значениям данных аргументов ⟨engendree par f, et correspondant à des valeurs d'arguments⟩			
Часть ⟨partie⟩ (см. также Множество)			
— коинициальная ⟨coinitiale⟩	III	1	7
	Рез.	6	5
— конфинальная ⟨cofinale⟩	III	1	7
	Рез.	6	5
— мажорированная ⟨majorée⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— минорированная ⟨minorée⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— множества	II	1	2
	Рез.	1	7
	Рез.	1	12
— насыщенная для соотношения эквивалентности ⟨saturee pour une relation d'équivalence⟩	II	6	4
	Рез.	5	6
— ограниченная ⟨bornée⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— — сверху ⟨majorée⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— — снизу ⟨minorée⟩	III	1	8
	Рез.	6	7
— подсетчатая ⟨coréticulée⟩	III	4	Упр.
— полная ⟨pleine⟩	Рез.	1	8
— пустая ⟨vide⟩	Рез.	1	8
— ⟨partie⟩ свободная ⟨libre⟩	III	1	Упр.
— сводящаяся к единственному элементу ⟨réduite à un seul élément⟩	Рез.	1	9
— сильно связанная в E ⟨fortement liée dans E⟩	III	4	Упр.
— симметричная ⟨symétrique⟩	Рез.	3	4
— совершенно упорядоченная ⟨totalement ordonnée⟩	Рез.	6	4
— состоящая из единственного элемента ⟨réduite à un seul élément⟩	Рез.	1	9
— устойчивая ⟨stable⟩ относительно ⟨par⟩ множества отображений	Рез.	2	4
— — — отображения	Рез.	2	4

Часть целая частного от деления a на b ⟨entière du quotient de a par b⟩ III 5 6
Часть ⟨partie⟩ Σ-допустимая ⟨Σ-permise⟩ IV 3 2
Четное целое число ⟨entier pair⟩ III 5 6
Число кардинальное ⟨cardinal⟩ III 3 1; Рез. 7 2
— — конечное ⟨fini⟩ III 4 1
— объектов некоторого типа ⟨nombre des objects d'un certain type⟩ III 4 1
— ординальное ⟨ordinal⟩ III 2 Упр.
— — неразложимое ⟨indécomposable⟩ III 2 Упр.
— целое ⟨entier⟩ III 4 1
— — натуральное ⟨natural⟩ III 4 1
— — положительное ⟨positif⟩ Рез. 6 2; Рез. 7 6
— — строго положительное ⟨strictement positif⟩ Рез. 6 2
— элементов конечного множества ⟨nombre d'éléments d'un ensemble fini⟩ III 4 1
Числовой символ ⟨symbole numérique⟩ III 5 7
Член ⟨terme⟩ k-й ⟨k-ème⟩ последовательности III 5 4
— общий ⟨général⟩ последовательности Рез. 7 8
— первый ⟨premier⟩ последовательности III 5 4
— последний ⟨dernier⟩ конечной последовательности III 5 4
— с индексом n последовательности ⟨d'indice n d'une suite⟩ III 6 1; Рез. 7 8

Шкала множеств ⟨echelle d'ensembles⟩, имеющая в качестве базы E, F, G ⟨ayant pour base E, F, G⟩ Рез. 8 1

Эгалитарная теория ⟨théorie égalitaire⟩ I 5 1
Эквивалентно: „x эквивалентно y по модулю R" ⟨„x est équivalent à y modulo R"⟩ II 6 1
— „x эквивалентно y по (согласно) R" ⟨„x est équvalent à y suivant R"⟩ Рез. 5 2
Эквивалентности ⟨d'équivalence⟩ классы ⟨classes d'⟩ II 6 2; Рез. 5 2
— соотношение ⟨relation⟩ II 6 1; Рез. 5 2
— — в некотором множестве ⟨dans un ensemble⟩ II 6 1; Рез. 5 2
Эквивалентность ⟨équivalence⟩ на ⟨dans⟩ некотором множестве II 6 1
Эквивалентные ⟨equivalents⟩ мощности Рез. 7 2
— системы аксиом Рез. 8 4
— соотношения I 3 5; Рез. 1 3

Эквивалентные роды структуры IV 1 7
— теории I 2 4
— элементы II 6 1; Рез. 5 2
Экстенсиональности аксиома ⟨axiome d'extensionalité⟩ II 1 3
Элемент ⟨élément⟩ Рез. 1 1
Элемент (из) множества ⟨élément d'un ensemble⟩ Рез. 2 3
— инвариантный относительно (для, при) ⟨invariant par⟩ множества отображений Рез. 2 3
— — — — — отображения II 3 4; Рез. 2 3
— максимальный ⟨maximal⟩ III 1 6; Рез. 6 6
— минимальный ⟨minimal⟩ III 1 6; Рез. 6 6
— наибольший ⟨le plus grand⟩ III 1 7; Рез. 6 5
— наименьший ⟨le plus petit⟩ III 1 7; Рез. 6 5
— неподвижный ⟨invariant⟩ (см. Элемент инвариантный)
— неприводимый ⟨irréductible⟩ III 4 Упр.
— общий множества ⟨générique d'un ensemble⟩ Рез. 1 2
Элементы сравнимые ⟨éléments comparables⟩ III 1 14

Явная аксиома ⟨axiome explicite⟩ I 2 1

α-отображение ⟨α-application⟩ IV 3 1
Σ-допустимая ⟨Σ-permise⟩ часть IV 3 2
Σ-множество ⟨Σ-ensemble⟩ IV 3 1
— свободное ⟨libre⟩ IV 3 3
σ-морфизм ⟨σ-morphisme⟩ IV 2 1

ОГЛАВЛЕНИЕ[1]

Предисловие редактора перевода 5

Способ пользования данным трактатом 19

Введение 23

Глава I. **Описание формальной математики** 31

§ 1. Термы и соотношения 31
1. Знаки и знакосочетания 31
2. Критерии подстановки 34
3. Формативные конструкции 35
4. Формативные критерии 36
Упражнения 39

§ 2. Теоремы 40
1. Аксиомы 40
2. Доказательства 41
3. Подстановки в теорию 42
4. Сравнение теорий 43
Упражнения 44

§ 3. Логические теории 44
1. Аксиомы 44
2. Первые следствия 45
3. Методы доказательства 46
4. Конъюнкция 49
5. Эквивалентность 50
Упражнения 52

§ 4. Кванторные теории 53
1. Определение кванторов 53
2. Аксиомы кванторных теорий 54
3. Свойства кванторов 55
4. Типовые кванторы 57
Упражнения 60

[1] „Способ пользования данным трактатом" переведен Г. Н. Поваровым и М. В. Ломковской; Введение, гл. I, гл. II (кроме п. 9 § 6) и § 1 гл. III переведены Г. Н. Поваровым; п. 9 § 6 гл. II, гл. III (кроме § 1), Исторический очерк к § 5 гл. III, гл. IV, Исторический очерк к гл. I—IV, Сводка результатов, Указатель терминов и оглавление переведены Ю. А. Шихановичем.

§ 5. Эгалитарные теории 61
1. Аксиомы 61
2. Свойства равенства 62
3. Функциональные соотношения 63
Упражнения 65

Приложение. **Характеристика термов и соотношений** 66
1. Знаки и слова 66
2. Знаменательные слова 67
3. Характеристика знаменательных слов 67
4. Применение к знакосочетаниям произвольной математической теории 69
Упражнения 71

Глава II. **Теория множеств** 75

§ 1. Коллективизирующие соотношения 75
1. Теория множеств 75
2. Включение 75
3. Аксиома экстенсиональности 76
4. Коллективизирующие соотношения 77
5. Аксиома двухэлементного множества 78
6. Схема отбора и объединения 79
7. Дополнение множества. Пустое множество 80
Упражнения 81

§ 2. Пары 82
1. Аксиома пары 82
2. Произведение двух множеств 83
Упражнения 84

§ 3. Соответствия 84
1. Графики и соответствия 84
2. Соответствие, обратное к данному соответствию 87
3. Композиция двух соответствий 88
4. Функция 90
5. Сужения и продолжения функций 92
6. Определение функции через терм 92
7. Композиция двух функций. Обратная функция 93
8. Ретракции и иссечения 95
9. Функции двух аргументов 98
Упражнения 100

§ 4. Объединение и пересечение семейства множеств 101
1. Определение объединения и пересечения семейства множеств 101
2. Свойства объединения и пересечеиия 104
3. Образы объединения и пересечения 105

4. Дополнение объединения или пересечения 106
5. Объединение и пересечение двух множеств 106
6. Покрытия 108
7. Разбиения 110
8. Сумма семейства множеств 110
Упражнения 111

§ 5. Произведение семейства множеств 112
1. Аксиома множества частей 112
2. Множество отображений одного множества в другое 113
3. Определение произведения семейства множеств 114
4. Частичные произведения 116
5. Ассоциативность произведений множеств 118
6. Формулы дистрибутивности 119
7. Распространение отображений на произведения 122
Упражнения 124

§ 6. Соотношения эквивалентности 124
1. Определение соотношения эквивалентности 125
2. Классы эквивалентности, фактормножество 126
3. Соотношения, совместимые с соотношением эквивалентности 128
4. Насыщенные части 129
5. Отображения, совместимые с соотношениями эквивалентности 130
6. Полный прообраз соотношения эквивалентности, индуцированное соотношение эквивалентности 131
7. Факторсоотношения соотношений эквивалентности 131
8. Произведение двух соотношений эквивалентности 132
9. Классы эквивалентных объектов 133
Упражнения 134

Глава III. **Упорядоченные множества. Кардинальные числа. Натуральные числа** 137

§ 1. Соотношения порядка. Упорядоченные множества 137
1. Определение соотношения порядка 137
2. Соотношения предпорядка 138
3. Обозначения и терминология 140
4. Упорядоченные подмножества. Произведение упорядоченных множеств 142
5. Возрастающие отображения 143
6. Максимальные и минимальные элементы 144
7. Наибольший элемент; наименьший элемент 145
8. Мажоранты; миноранты 146
9. Верхняя грань; нижняя грань 147
10. Фильтрующиеся множества 150
11. Отображения: I. Индуктивные пределы 151

12. Отображения: II Проективные пределы 156
13. Сетчатые множества 160
14. Совершенно упорядоченные множества 160
15. Интервалы 161
Упражнения 162

§ 2. Вполне упорядоченные множества 171
1. Отрезки вполне упорядоченного множества 171
2. Принцип трансфинитной индукции 174
3. Теорема Цермело 176
4. Индуктивные множества 177
5. Изоморфизмы вполне упорядоченных множеств 178
6. Лексикографические произведения 180
Упражнения 180

§ 3. Равномощные множества. Кардинальные числа 186
1. Кардинальное число множества 186
2. Отношение порядка между кардинальными числами 188
3. Операции над кардинальными числами 190
4. Свойства кардинальных чисел 0 и 1 192
5. Возведение кардинальных чисел в степень 193
6. Отношение порядка и операции между кардинальными числами 195
Упражнения 196

§ 4. Натуральные целые числа. Конечные множества 197
1. Определение целых чисел 197
2. Неравенства между целыми числами 198
3. Принцип индукции 199
4. Конечные подмножества упорядоченных множеств 201
5. Свойства конечного характера 202
Упражнения 202

§ 5. Вычисления с целыми числами 206
1. Операции над целыми числами и конечными множествами 206
2. Строгие неравенства между целыми числами 207
3. Интервалы в множествах целых чисел 208
4. Конечные последовательности 209
5. Характеристические функции множеств 210
6. Эвклидово деление 210
7. Разложения по основанию b 211
8. Комбинаторный анализ 213
Упражнения 217

§ 6. Бесконечные множества 221
1. Множество натуральных целых чисел 221
2. Определение отображений индукцией 223
3. Вычисления с бесконечными кардинальными числами . . . 225

4. Счетные множества 227
5. Стационарные последовательности 229
Упражнения 229
Исторический очерк 240

Глава IV. **Структуры** 242

§ 1. Структуры и изоморфизмы 242
1. Ступени 242
2. Канонические распространения отображений 243
3. Переносимые соотношения 244
4. Роды структуры 245
5. Изоморфизмы и перенос структур 247
6. Вывод структур 249
7. Эквивалентные роды структуры 252
Упражнения 251

§ 2. Морфизмы и производные структуры 255
1. Морфизмы 255
2. Более тонкие структуры 256
3. Начальные структуры 258
4. Примеры начальных структур 260
5. Финальные структуры 265
6. Примеры финальных структур 266
Упражнения 268

§ 3. Универсальные отображения 272
1. Универсальные отображения и множества 272
2. Существование универсальных отображений 274
3. Примеры универсальных отображений 276
Упражнения 279

Приложение. *Критерии переносимости* 281
1. Переносимые термы 281
2. Критерии переносимости 283
3. Примеры 290
4. Относительно переносимые термы и соотношения 292
5. Отождествления 296

Исторический очерк к гл. I—IV 298

Формализация логики 300
Понятие истины в математике 309
Объекты, модели, структуры 317
Теория множеств 325
Парадоксы теории множеств и кризис оснований 332
Метаматематика 341
Литература 348

Сводка результатов 353

Введение 353
§ 1. Элементы и части множества 353
§ 2. Функции 358
§ 3. Произведение нескольких множеств 365
§ 4. Объединение, пересечение, произведение семейства множеств 372
§ 5. Соотношения эквивалентности, фактормножество 380
§ 6. Упорядоченные множества 383
§ 7. Мощности. Счетные множества 392
§ 8. Шкалы множеств и структуры 395

Указатель обозначений 399
Указатель терминов 404
Оглавление 450

БУРБАКИ Н.
Теория множеств

Редактор А. А. Бряндинская
Художественный редактор
В. И. Шаповалов
Технический редактор В. П. Сизова

Сдано в производство 20/VI 1964 г.
Подписано к печати 3/III 1965 г.
Бумага $60 \times 90^{1}/_{16}$ = 14,4 бум. л.
28,8 печ. л. в т/ч 2 вкл.
Уч.-изд. л. 32,65 Изд. № 1/5372
Цена 2 р. 48 к. Зак. 513

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2
(Темплан 1964 г. изд-ва ИЛ, пор. № 1)

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Государственного комитета
Совета Министров СССР по печати.
Измайловский проспект, 29

АКСИОМЫ И СХЕМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

S1. Если A — соотношение, то соотношение

$$(A \text{ или } A) \Rightarrow A$$

— аксиома.

S2. Если A и B — соотношения, то соотношение

$$A \Rightarrow (A \text{ или } B)$$

— аксиома.

S3. Если A и B — соотношения, то соотношение

$$(A \text{ или } B) \Rightarrow (B \text{ или } A)$$

— аксиома.

S4. Если A, B и C — соотношения, то соотношение

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \text{ или } A) \Rightarrow (C \text{ или } B))$$

— аксиома.

S5. Если R — соотношение, T — терм и x — буква, то соотношение

$$(T \mid x) R \Rightarrow (\exists x) R$$

— аксиома.

S6. Пусть x — буква, T и U — термы и $R\{x\}$ — соотношение; тогда соотношение

$$(T = U) \Rightarrow (R\{T\} \Leftrightarrow R\{U\})$$

— аксиома.

S7. Пусть R и S — соотношения и x — буква, тогда соотношение

$$((\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$$

— аксиома.

S8. Пусть R — соотношение, x и y — различные буквы, X и Y — буквы, отличные от x и y и не встречающиеся в R; тогда соотношение

$$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y) \operatorname{Coll}_x((\exists y)((y \in Y) \text{ и } R))$$

— аксиома.

A1. $(\forall x)(\forall y)((x \subset y \text{ и } y \subset x) \Rightarrow (x = y))$.

A2. $(\forall x)(\forall y) \operatorname{Coll}_z (z = x \text{ или } z = y)$.

A3. $(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')((x, y) = (x', y') \Rightarrow (x = x' \text{ и } y = y'))$.

A4. $(\forall X) \operatorname{Coll}_Y (Y \subset X)$.

A5. Существует бесконечное множество.